

Математическая модель системы «канал молнии—протяженный заземлитель»

КАРЯКИН Р.Н., ЛОСЕВ В.Г.

Рассмотрена модель расчета процесса распространения импульса тока молнии в «системе канал молнии—протяженный заземлитель». Проанализированы условия рассмотрения модели сопряжения двух длинных линий. Сделан вывод, что при неизменных параметрах протяженного заземлителя форма волны и максимальное значение тока канала молнии определяются однозначно параметрами заземлителя. На основании этого утверждается, что при исследованиях молнии (естественной и искусственной) на испытательных полигонах можно управлять ее параметрами, изменяя параметры заземлителя. Это означает, что для данного класса задач молнию следует рассматривать как идеальный «генератор заряда». Установленные закономерности позволяют при исследовании молнии на испытательных полигонах управлять ее параметрами как при естественных, так и при триггерных разрядах посредством направленного изменения параметров искусственных протяженных заземлителей, подверженных удару молнии.

К л ю ч е в ы е с л о в а: неоднородная длинная линия, параметры, протяженный заземлитель, канал молнии

Для получения простого метода определения с допустимой погрешностью основных значений разряда, достаточных для создания эффективной молниезащиты протяженных заземленных коммуникаций, была разработана математическая модель системы «канал молнии — протяженный заземлитель» (КМ—ПЗ) на основе классической теории длинных линий с распределенными параметрами. Способы преодоления возникающих при этом математических трудностей, обусловленных *неравномерным* распределением электрических параметров вдоль «длинных линий» (КМ и ПЗ), приведены в предшествующих работах [1–9].

Цепь разряда молнии образует сложную систему, включающую связанные между собой в «точке атаки» две составные части: канал молнии и подверженный разряду протяженный заземлитель. Выполненные ранее работы авторов, основанные на работах предшественников [10–17], были посвящены рассмотрению электромагнитных процессов либо в КМ [4, 6–8], либо в подверженном прямому удару молнии (ПУМ) протяженном заземлителе [1–3, 5]. Это обстоятельство позволяет при построении математической модели системы «канал молнии — протяженный заземлитель» (КМ—ПЗ) развить и обобщить полученные в этих работах результаты (см. Приложения 1, 2).

Главная стадия разряда молнии состоит из двух одновременно протекающих процессов: разряда положительного заряда земли Q^+ , вызывающего нейтрализацию отрицательного заряда канала молнии,

и разряда отрицательного заряда канала Q^- на заземлитель, вызывающего нейтрализацию его положительного заряда. При этом протекающий в системе КМ—ПЗ ток $i(x, y, t)$ достигает максимального значения в точке атаки A ($x=0, y=0$) в момент времени $t_{0\min}$ и затухает по мере удаления от этой точки в обоих направлениях.

В качестве расчетной модели КМ при коротком нисходящем отрицательном разряде рассматривается неоднородная длинная линия, образованная вертикально натянутым от нижней границы отрицательно заряженного грозового облака до точки атаки проводящим плазменным шнуром с постоянным продольным активным сопротивлением¹ r_a , окруженным непроводящим чехлом в форме коаксиальной воронки, обращенной усеченной вершиной конуса к земле, имеющим поперечную емкость¹, нарастающую по высоте воронки в соответствии с выражением

$$C_y = Ce^{ky},$$

где $C_y(y=0)=C$, Ф/м; k — вещественное положительное число, характеризующее изменение распределенной емкости чехла $C_y(y)$ по высоте КМ в направлении вертикальной оси y , м⁻¹ [4, 6].

В случае короткого нисходящего отрицательного разряда молнии Q^- ток $i_K(y, t)$ и потенциал $u_K(y, t)$ КМ связаны дифференциальными уравнениями:

¹ На единицу длины.

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial u_K(y,t)}{\partial y} &= r_a i_K(y,t); \\ -\frac{\partial i_K(y,t)}{\partial y} &= C e^{k_K y} \frac{\partial u_K(y,t)}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

при граничном условии $i_K(y=0,t) = \delta(t)Q^+$, где Q^+ – разряжаемый заряд, Кл; $\delta(t)$ – импульсная функция Дирака [18–22].

Решение уравнений (1) известно [4, 6]:

$$u_K(y,t) = Q^+ \frac{1}{k_K} r t^{-1} e^{-2t_{0K} t^{-1}}; \quad (2)$$

$$i_K(y,t) = 2Q^+ t_{0K} t^{-2} e^{-2t_{0K} t^{-1}}, \quad (3)$$

где

$$t_{0K} = \frac{1}{2} \frac{1}{k_K^2} r_a C e^{k_K y};$$

$$t_{0K \min} = t_{0K}(y=0) = \frac{1}{2} \frac{1}{k_K^2} r_a C.$$

Из рассмотрения выражения (3) следует, что максимальный ток молнии

$$I = \frac{2}{e^2 t_{0K \min}} Q^+. \quad (4)$$

В качестве расчетной модели заземлителя будем рассматривать размещенный вдоль оси x протяженный неоднородный заземлитель с распределенными параметрами (на единицу длины): продольной индуктивностью L , Гн/м, и поперечным переходным сопротивлением $r_{ПХ}(x)$, Ом·м, изменяющимся по закону [5]:

$$r_{ПХ} = r_{П} e^{-k_3 x},$$

где $r_{П} = r_{ПХ}(x=0)$, Ом·м; k_3 – вещественное число, м⁻¹.

Предполагается, что максимальная плотность тока, стекающего ПУМ с заземлителя в структуру (горную породу), ниже порогового значения, при котором возможно искрообразование ($j \leq 3 \cdot 10^5 / \rho_0$, А/м² [2, 5]). Это условие реализуется при использовании искусственного молниезащитного протяженного заземлителя.

В этом случае при разряде молнии ток $i_3(x,t)$ и потенциал $u_3(x,t)$ заземлителя связаны дифференциальными уравнениями [5]:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial u_3(x,t)}{\partial x} &= L \frac{\partial i_3(x,t)}{\partial t}; \\ -\frac{\partial i_3(x,t)}{\partial x} &= \frac{1}{r_a} e^{k_3 x} u_3(x,t). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

При граничном условии

$$i_3(x=0,t) = \delta(t)Q^-,$$

где Q^- – заряд, Кл, решение уравнений (5), данное в [5]:

$$u_3(x,t) = Q^- \frac{1}{k_3} L t^{-2} e^{-2t_{03} t^{-1}} (2t_{03} t^{-1} - 1); \quad (6)$$

$$i_3(x,t) = 2Q^- t_{03} t^{-2} e^{-2t_{03} t^{-1}}, \quad (7)$$

где

$$t_{03} = \frac{1}{2} \frac{1}{k_3^2} \frac{L}{r_{П}} e^{k_3 x}; \quad I = \frac{2}{e^2 t_{03 \min}} Q^-. \quad (8)$$

Условие непрерывности цепи КМ–ПЗ в «точке атаки»

$$i_K(y=0,t) = i_3(x=0,t),$$

из которого следует:

$$t_{0K \min} = t_{03 \min}$$

или

$$\frac{1}{k_K^2} r_a C = \frac{1}{k_3^2} \frac{L}{r_{П}}. \quad (9)$$

Выражения, стоящие в левой и правой частях равенства (9), будем называть критериями подобия канала молнии (КМ) и протяженного заземлителя (ПЗ) и обозначать $\Pi_{КМ}$ и $\Pi_{ПЗ}$ соответственно ($\Pi_{КМ} = \Pi_{ПЗ}$). Равенство критериев подобия является условием совместимости обеих цепей, означающим возможность протекания по ним без искажения одного тока $i(t)$.

Переход от КМ к ПЗ, сопровождающийся резким изменением формы волны напряжения $u(t)$ в точке атаки, становится возможным при условии последовательного включения в этой точке между КМ и ПЗ согласующего сопротивления:

$$Z_A = \frac{i_3(x=0,t) - i_K(y=0,t)}{i(x=0,y=0,t)} \quad (10)$$

или, после подстановки в (10) выражений (2), (3), (6), (7):

$$Z_A = \frac{1}{k_3} L t^{-1} - \frac{1}{2k_3} L \frac{1}{t_{0 \min}} - \frac{1}{2k_K} r_a \frac{1}{t_{0 \min}} t. \quad (11)$$

Из рассмотрения формулы (11) следует, что согласующее сопротивление, выполняющее роль вентили, пропускающего ток $i_A(x=0,y=0,t)$ без искажения и одновременно «закручивающего» потенциал, принимает значения (рис. 1):

$$\text{при } t=0 \quad Z_A = \infty;$$

при $t=t_{0\min}$ $Z_A = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k_3} L \frac{1}{t_{0\min}} - \frac{1}{k_K} r_a \right);$

при $t = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\left(\frac{k_K L}{k_3 r_a} \right)^2 + 4 \frac{k_K L}{k_3 r_a} t_{0\min}} - \frac{k_K L}{k_3 r_a} \right)$

$Z_A = 0;$

при $t = \infty$ $Z_A = -\infty.$

Уравнения, описывающие предложенную математическую модель системы КМ–ПЗ, электрическая схема замещения которой представлена на рис. 2, имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial u_K(y,t)}{\partial y} &= r_a i(y,t); \\ -\frac{\partial i(y,t)}{\partial y} &= C e^{k_K y} \frac{\partial u_K(y,t)}{\partial t}; \\ -\frac{\partial u_3(x,t)}{\partial x} &= L \frac{\partial i(y,t)}{\partial t}; \\ -\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} &= \frac{1}{r_{\Pi}} e^{k_3 x} u_3(y,t); \\ i(x=0,y=0,t) &= \delta(t)Q; \\ \Pi_{\text{КМ}} &= \Pi_{\text{ПЗ}}; \\ Z_A(x=0,y=0,t) &= \\ &= \frac{1}{k_3} L t^{-1} - \frac{1}{2k_3} L \frac{1}{t_{0\min}} - \frac{1}{2k_K} r_a \frac{1}{t_{0\min}} t. \end{aligned} \right\} (12)$$

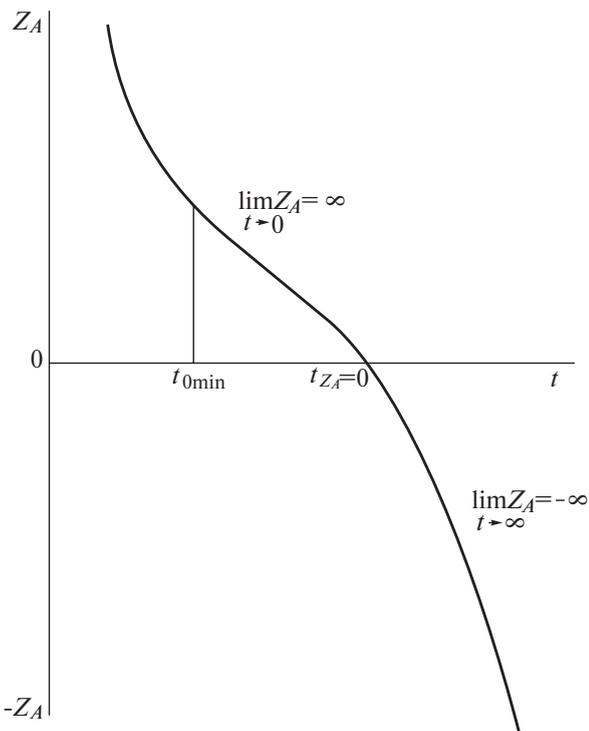


Рис. 1. Зависимость согласующего сопротивления Z_A от времени t

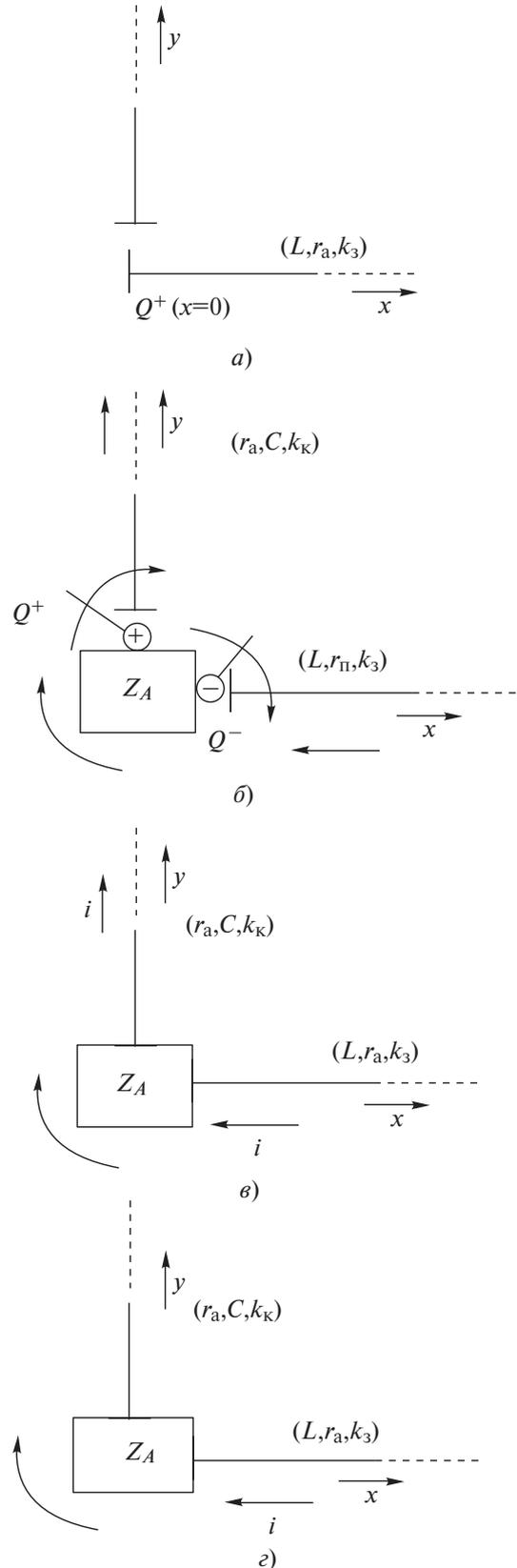


Рис. 2. Электрическая схема замещения системы КМ–ПЗ: а – исходное состояние системы; $t < 0$, $Q_{(y=0)}^-$; б – начало главной стадии разряда: разряд диполя с внутренним сопротивлением $Z_A = \infty$, $t = 0$; $i_K(y=0,t=0) = \delta(t)Q^+$; в – $I = i(x=0,y=0,t_{0\min})$; $t = t_{0\min}$, $Z_A(t_{0\min})$; г – окончание разряда, $t \rightarrow \infty$, $\lim_{t \rightarrow \infty} Z_A = -\infty$; $i(x=0,y=0,t \rightarrow \infty) \rightarrow 0$

Из системы уравнений (12) следует, что при любых коротких нисходящих отрицательных разрядах (первых и последующих) естественных и триггерных молний в рассматриваемый протяженный заземлитель критерий подобия:

$$\Pi_{\text{пз}} = \frac{r_a C}{k_k^2} = \text{const.} \quad (9')$$

При этом каждый из параметров r_a , C , k_k может принимать бесчисленное множество значений, удовлетворяющих этому уравнению. С физической точки зрения это означает, что при каждом разряде заряда Q на рассматриваемый заземлитель происходит автоматическая подстройка параметров канала молнии (r_a , C , k_k) под соотношение (9').

Поскольку параметры протяженного заземлителя определяются геометрически и физически неизменяемыми параметрами металлических конструкций заземлителя ($L = \text{const}$), максимальное значение тока в «точке атаки» при любых разрядах молнии в рассматриваемый заземлитель (L , $r_{\text{п}}$, k_3) будет изменяться только при изменении значения разряжаемого заряда Q .

Приложение 1. Выбор расчетной модели. В общем случае, расчетную модель канала молнии можно представить в виде протяженного вертикального проводника с распределенными параметрами L , r_a , C , $r_{\text{п}}$, где L , C – индуктивность и емкость проводника соответственно (на единицу длины). В этом случае ток $i(y,t)$ и потенциал $u(y,t)$ проводника связаны дифференциальными уравнениями длинной линии:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial u(y,t)}{\partial y} &= L \frac{\partial i(y,t)}{\partial t} + r_a i(y,t); \\ -\frac{\partial i(y,t)}{\partial y} &= C \frac{\partial u(y,t)}{\partial t} + \frac{1}{r_{\text{п}}} u(y,t). \end{aligned} \right\} \quad (\text{П1-1})$$

Рассмотрим разряд через канал молнии индуцированного отрицательно заряженным грозовым облаком положительного элементарного заряда Земли Q . Тогда граничные условия задачи [1]:

$$i_0(y=0,t) = \delta(t)Q, \quad (\text{П1-2})$$

где $\delta(t)$ – импульсная функция Дирака [1].

Решая систему уравнений (1) при граничном условии (2), получим ток канала молнии в виде:

$$i(y,t) = Qe^{-\mu_2 t} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \mu_1 \right) \left[I_0 \left(\mu_1 \sqrt{t^2 - \frac{y^2}{v^2}} \right) H \left(t - \frac{y}{v} \right) \right], \quad (\text{П1-3})$$

или

$$\begin{aligned} i(y,t) &= Qe^{-\mu_2 t} \left\{ I_0 \left(\mu_1 \sqrt{t^2 - \frac{y^2}{v^2}} \right) \delta \left(t - \frac{y}{v} \right) + \right. \\ &+ \mu_1 \left[I_1 \left(\mu_1 \sqrt{t^2 - \frac{y^2}{v^2}} \right) \frac{t}{\sqrt{t^2 - \frac{y^2}{v^2}}} - I_0 \left(\mu_1 \sqrt{t^2 - \frac{y^2}{v^2}} \right) \right] \times \\ &\left. \times H \left(t - \frac{y}{v} \right) \right\}, \quad (\text{П1-3}') \end{aligned}$$

где

$$\mu_1 = \frac{1}{2} v^2 \left(r_a C - \frac{L}{r_n} \right); \quad (\text{П1-4})$$

$$\mu_2 = \frac{1}{2} v^2 \left(r_a C + \frac{L}{r_n} \right); \quad (\text{П1-5})$$

$I_0(z)$, $I_1(z)$ – модифицированные функции Бесселя нулевого и первого порядка соответственно;

$H \left(t - \frac{y}{v} \right)$ – единичная функция;

$H \left(t - \frac{y}{v} \right) = 0$ при $t - \frac{y}{v} \leq 0$;

$H \left(t - \frac{y}{v} \right) = 1$ при $t - \frac{y}{v} > 0$;

v – фазовая скорость волны тока в канале молнии.

Из выражения (3') следует, что ток длинной линии в общем случае является суммой двух волн: волны импульса и волны последствия. Амплитуды обеих волн затухают по экспоненциальному закону. Волну последствия можно рассматривать как расплывающийся вдоль линии хвост волны импульса. Волна импульса искажается в результате рассеивания энергии в активных (продольном и поперечном) сопротивлениях линии (r_a и $r_{\text{п}}$). Волна последствия расплывается из-за тормозящего действия тех же сопротивлений.

Из рассмотрения выражений (4), (5) следует, что если

$$(r_a C)_{\text{min}} > > \left(\frac{L}{r_{\text{п}}} \right)_{\text{max}}, \quad (\text{П1-6})$$

то должна быть принята модель (C, r_a) , для которой

$$\mu = \mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{2} v^2 r_a C \quad (\text{П1-7})$$

и

$$i(y,t) = Qe^{-\frac{1}{2}v^2 r_a C t} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}v^2 r_a C \right) \times \left[I_0 \left(\frac{1}{2}v^2 r_a C \sqrt{t^2 - \frac{y^2}{v^2}} \right) H \left(t - \frac{y}{v} \right) \right], \quad (\text{П1-8})$$

или

$$i(y,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} Q \sqrt{C r_a} y t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{4}C r_a \frac{y^2}{t}}. \quad (\text{П1-9})$$

Если

$$(r_a C)_{\max} \ll \left(\frac{L}{r_{\Pi}} \right)_{\min}, \quad (\text{П1-10})$$

то должна быть принята модель (L, r_{Π}) , для которой

$$\mu_1 = -\frac{1}{2}v^2 \frac{L}{r_{\Pi}}; \quad (\text{П1-11})$$

$$\mu_2 = \frac{1}{2}v^2 \frac{L}{r_{\Pi}} \quad (\text{П1-12})$$

и

$$i(y,t) = Qe^{-\frac{1}{2}v^2 \frac{L}{r_{\Pi}} t} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}v^2 \frac{L}{r_{\Pi}} \right) \times \left[I_0 \left(\frac{1}{2}v^2 \frac{L}{r_{\Pi}} \sqrt{t^2 - \frac{y^2}{v^2}} \right) H \left(t - \frac{y}{v} \right) \right], \quad (\text{П1-13})$$

или

$$i(y,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} Q \sqrt{\frac{L}{r_{\Pi}}} y t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{4} \frac{L}{r_{\Pi}} \frac{y^2}{t}}. \quad (\text{П1-14})$$

Если неравенства (6) и (10) не выполняются, то должна быть оставлена исходная модель (L, r_a, C, r_{Π}) .

Как и в общем случае, в случаях (6) и (10) имеют место обе волны: волна импульса и волна последствия.

Для частного случая

$$r_a C = \frac{L}{r_{\Pi}}, \quad (\mu_1 = 0), \quad (\text{П1-15})$$

как это следует из (3):

$$i(y,t) = \delta \left(t - \frac{y}{v} \right) Q e^{-\frac{1}{2}v^2 \left(r_a C + \frac{L}{r_{\Pi}} \right) t}, \quad (\text{П1-16})$$

затухающий импульс тока распространяется по линии со скоростью v без искажения.

Для другого частного случая

$$r_a = 0, \quad r_{\Pi} = \infty,$$

как это следует из того же уравнения (3),

$$i(y,t) = \delta \left(t - \frac{y}{v} \right) Q \quad (\text{П1-17})$$

импульс тока распространяется по линии со скоростью

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (v = c) \quad (\text{П1-18})$$

без искажения и без затухания.

Волна последствия отсутствует.

Для канала молнии во время рассматриваемой (главной) стадии разряда

$$r_{a \min} \geq 0,035 \text{ Ом/м}; \quad C_{\min} \geq 2,5 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м};$$

$$L_{\max} \leq 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}; \quad r_{\Pi \min} > 2,5 \cdot 10^{14} \text{ Ом}\cdot\text{м}$$

неравенство (6) выполняется:

$$0,875 \cdot 10^{-13} \text{ с}\cdot\text{м}^{-2} > > 10^{-20} \text{ с}\cdot\text{м}^{-2}.$$

Следовательно, каналу молнии соответствует расчетная модель (C, r_a) .

Расчетные модели протяженного заземлителя, размещенного в горных породах ($10 \text{ Ом}\cdot\text{м} \leq \rho \leq 10^6 \text{ Ом}\cdot\text{м}; 1 \leq \epsilon_r \leq 10$) при ПУМ, выявленные на основе анализа электромагнитных процессов в нем [1–3, 5], даны в работе авторов [5].

Приложение 2. Расчетная модель протяженного заземлителя (r_a, C) .

В реальных условиях относительная диэлектрическая проницаемость горных пород (ϵ_r) может изменяться более чем в 6 раз. В связи с этим в случаях использования расчетной модели (r_a, C) в интересах большой точности расчетов можно учесть изменение погонной емкости протяженного заземлителя посредством соотношения

$$C_x = C e^{kx},$$

где $C_x (x=0) = C$, Ф/м; k – вещественное число, характеризующее изменение распределенной емкости C_x по длине протяженного заземлителя в направлении оси x , м⁻¹.

Для рассматриваемых условий процесс распространения волн тока и потенциала вдоль протяженного заземлителя при коротком нисходящем отрицательном разряде на него описывается уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} &= r_a i(x,t); \\ -\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} &= C e^{kx} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \end{aligned} \right\}$$

или в преобразованном по Лапласу виде:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{d\bar{u}}{dx} &= r_a \bar{i}; \\ -\frac{d\bar{i}}{dx} &= p C e^{kx} \bar{u}, \end{aligned} \right\}$$

где p – комплексное число ($p = \sigma + j\tau$).

После разделения переменных имеем:

$$\frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} - \gamma_0^2 e^{kx} \bar{u} = 0; \quad (\text{П2-1})$$

$$\frac{d^2 \bar{i}}{dx^2} - l \frac{d\bar{i}}{dx} - \gamma_0^2 e^{kx} \bar{i} = 0, \quad (\text{П2-2})$$

где $\gamma_0 = \sqrt{p} \sqrt{C r_a}$.

В случае бесконечно длинного заземлителя ($l \rightarrow \infty$) имеем:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \bar{u}(x) = 0; \quad (\text{П2-3})$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \bar{i}(x) = 0. \quad (\text{П2-4})$$

Учитывая, что из всех бесселевых функций функции Ганкеля единственные, которые обращаются в нуль при бесконечных значениях комплексного аргумента:

$H_{0(1)}^{(1)}(jU)$ – когда мнимая часть аргумента положительна, решение дифференциальных уравнений (П2-1), (П2-2) будем искать в виде:

$$\bar{u}(x) = C_0 H_0 \left(2j\gamma_0 \frac{1}{k} e^{\frac{1}{2}kx} \right); \quad (\text{П2-5})$$

$$\bar{i}(x) = C_1 e^{\frac{1}{2}kx} H_1 \left(2j\gamma_0 \frac{1}{k} e^{\frac{1}{2}kx} \right). \quad (\text{П2-6})$$

Рассмотрим разряд заряда Q . Тогда к граничным условиям (П2-3), (П2-4) добавятся:

$$i_0(t, x=0) = \delta(t)Q; \quad (\text{П2-7})$$

$$-\frac{\partial u_0(t, x=0)}{\partial x} = r_a \delta(t)Q, \quad (\text{П2-8})$$

Запишем уравнения (П2-7), (П2-8) в преобразованном виде:

$$\bar{i}_0 = \bar{i}(x=0) = \delta(t)Q; \quad (\text{П2-9})$$

$$-\frac{\partial \bar{u}(x=0)}{\partial x} = r_a Q. \quad (\text{П2-10})$$

Решая уравнения (П2-9), (П2-10) совместно с (П2-5), (П2-6) и учитывая, что

$$H_0(jz) = -j \frac{2}{\pi} K_0(z);$$

$$H_1(jz) = -\frac{2}{\pi} K_1(z);$$

$$K_1(x \ll 1) = \frac{1}{z};$$

$$Z'_0(z) = -Z_1(z),$$

где $K_0(z)$, $K_1(z)$ – модифицированные функции Ганкеля или функции Макдональда, найдем постоянные интегрирования:

$$C_0 = j\pi \frac{1}{k} r_a Q;$$

$$C_1 = -\pi \frac{1}{k} \sqrt{C r_a} Q \sqrt{p}$$

и, следовательно,

$$\bar{u}(x) = 2 \frac{1}{k} r_a Q K_0 \left(\alpha \frac{1}{2} p \frac{1}{2} \right) \quad (\text{П2-11})$$

и

$$\bar{i}(x) = Q \alpha \frac{1}{2} p \frac{1}{2} K_1 \left(\alpha \frac{1}{2} p \frac{1}{2} \right), \quad (\text{П2-12})$$

где

$$\alpha = 4 \frac{1}{k^2} r_a C e^{kx}. \quad (\text{П2-13})$$

Перейдя в уравнениях (П2-11), (П2-12) от изображений к оригиналам, получим:

$$u(x, t) = \frac{1}{k} r_a Q t^{-1} e^{-\frac{1}{4}\alpha t^{-1}};$$

$$i(x, t) = \frac{1}{3} \alpha Q t^{-2} e^{-\frac{1}{4}\alpha t^{-1}},$$

или

$$u(x, t) = \frac{1}{k} r_a Q t^{-1} e^{-2t_0 t^{-1}}; \quad (\text{П2-14})$$

$$i(x, t) = 2Q t_0 t^{-2} e^{-2t_0 t^{-1}}, \quad (\text{П2-15})$$

где

$$t_0 = \frac{1}{8} \alpha. \quad (\text{П2-16})$$

Наконец, в инвариантной форме выражения (П2-14), (П2-15) можно записать в виде:

$$u(x, t) = u_{\max} \sigma(\xi); \quad i(x, t) = I\eta(\xi),$$

где

$$\left. \begin{aligned} I &= \frac{2}{e^2 t_0} Q; \\ \sigma(\xi) &= e^{2\xi-1} e^{-2\xi^{-1}}; \\ \eta(\xi) &= e^{2\xi-2} e^{-2\xi^{-1}}; \\ \xi &= \frac{t}{t_0}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П2-17})$$

Между прочим, из физического соотношения

$$Q = \int_0^{\infty} i(x, t) dt$$

следует, что

$$\int_0^{\infty} t^{-2} e^{-2t_0 t^{-1}} dt = \frac{1}{2t_0}.$$

Как видно из (П2-17), инвариантная форма выражения производной тока $\eta(\xi)$, характеризующей крутизну фронта волны, имеет вид:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = 2e^{2\xi-3} e^{-2\xi^{-1}} (\xi^{-1} - 1).$$

Выводы. 1. Основные параметры канала молнии (r_a , C , k_k), каждый из которых при любом разряде молнии на рассматриваемый заземлитель может принимать бесчисленное множество значений, должны удовлетворять критерию подобия канала молнии, численно равному критерию подобия подверженного разряду молнии протяженного заземлителя, параметры которого (L , r_n , k_3) остаются неизменными при любом разряде.

2. Форма волны, как и максимальное значение тока канала молнии в точке атаки $I = i(x=0, y=0, t_{0\text{к min}})$, однозначно определяются электромагнитными параметрами подверженного разряду протяженного заземлителя (L , r_n , k_3). Это означает, что для данного класса задач молнию следует рассматривать как идеальный «генератор заряда».

3. Установленные закономерности позволяют при исследовании молнии на испытательных полигонах управлять ее параметрами как при естественных, так и при триггерных разрядах посредством направленного изменения параметров искусственных протяженных заземлителей, подверженных удару молнии.

4. Для молниезащиты стратегически важных объектов (атомные электростанции, космодромы, пороховые склады, нефте- и газохранилища, газо- и нефтеперекачивающие станции, взрыво- и пожароопасные объекты и др.) путем снижения амплитуды и крутизны фронта волны тока молнии до безопасных значений может быть использован единственный искусственный специальный мол-

ниезащитный протяженный заземлитель, в том числе вынесенный с наперед заданными параметрами, обеспечивающими выполнение условия $\max\left(\frac{L_{\text{max}}}{r_{a \text{ min}}}\right)$. Численные значения его параметров определяются уравнениями (1)–(12).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Карякин Р.Н.** Электромагнитные процессы в протяженных заземлителях в неоднородных структурах. — Электричество, 1996, № 7, с. 43–51.
2. **Карякин Р.Н.** Электробезопасность заземляющего устройства. — Электричество, 2000, № 12, с. 25–32.
3. **Карякин Р.Н.** Методика расчета основных параметров нисходящего отрицательного разряда молнии. — Электричество, 2006, № 11, с. 24–32.
4. **Карякин Р.Н., Лосев В.Г.** Форма волны тока молнии в контактной сети. — Электричество, 2008, № 11, с. 12–22.
5. **Карякин Р.Н., Лосев В.Г.** Удар молнии в протяженный неоднородный заземлитель — Электричество, 2009, № 4, с. 12–18.
6. **Карякин Р.Н., Лосев В.Г.** Математическая модель канала молнии. — Электричество, 2009, № 10, с. 25–35.
7. **Карякин Р.Н., Лосев В.Г.** Удар молнии в высокую башню. — Электричество, 2011, № 7, с. 25–31.
8. **Карякин Р.Н., Лосев В.Г.** Анализ инженерных моделей главной стадии молнии. — Электричество, 2012, № 3, с. 23–29.
9. **Карякин Р.Н., Лосев В.Г.** Математическая модель системы «канал молнии — линия электропередачи». — Электричество, 2013, № 1, с. 60–66.
10. **Горин Б.Н.** Математическое моделирование главной стадии молнии. — Электричество, 1985, № 4, с. 10–15.
11. **Базелян Э.М., Райзер Ю.П.** Физика молнии и молниезащиты. — М.: Физматлит, 2001, 319 с.
12. **Rakov V.A.** Lightning Return Stroke Speed: A Review of Experimental Data. — 27th International Conference on Lightning Protection (ICLP, 2004), Avignon, France, 13 p.
13. **Rakov V.A. and Unan M.A.** Lightning Physics and Effects. — Cambridge University Press, 2006, 687 p.
14. **Борисов Р.К., Смирнов М.Н., Коломиец Е.В., Янковский Б.Д.** Экспериментальные исследования импульсных характеристик заземляющих устройств. — Сб. докладов Второй Российской конф. по заземляющим устройствам/Под ред. Ю.В. Целебровского. — Новосибирск: Сибирская энергетическая академия, 2005, с. 107–113.
15. **Hasse P., Wessinger J., Zischank W.** Handbuch für Blitzschutz und Erdung. — Pflaum Verlag GmbH/Munchen. — Berlin: Heidelberg, 2006, 314 p.
16. **Кадомская К.П., Рейхердт А.А.** Моделирование волны тока молнии при расчетах грозоупорности электрических сетей. — Электричество, 2006, № 11, с. 17–23.
17. **Александров Г.Н.** Молния и молниезащита. — С.Петербург: Изд-во Политехнического университета, 2007, 281 с.
18. **Ван дер Поль Б., Бреммер Х.** Операционное исчисление на основе двустороннего преобразования Лапласа. — М.: Иностранная литература, 1952, 506 с.
19. **Сикорский Ю.С.** Элементы теории эллиптических функций. — М.; Л.: Изд-во ОНТИ НКТП СССР, 1936, 365 с.
20. **Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф.** Специальные функции. Изд. 2-е / Пер. с немецкого. — М.: Наука, 1968, 344 с.
21. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. — М.: Наука, 1969, 343 с.
22. **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Издательство иностранной литературы, 1951, 828 с.

А в т о р ы: **Карякин Рудольф Николаевич** окончил факультет электрификации железных дорог Московского электромеханического института инженеров железнодорожного транспорта в 1952 г. В 1976 г. защитил докторскую диссертацию «Исследование электромагнитных процессов в тяговых сетях переменного тока (в связи с проблемами электробезопасности)» во Всесоюзном научно-исследовательском институте железнодорожного транспорта. Главный научный сотрудник отдела комплексной защиты

электроустановок Научно-исследовательского института электромонтажной технологии.

Лосев Виктор Григорьевич окончил факультет электрификации железных дорог Московского института инженеров железнодорожного транспорта в 1983 г. В 2007 г. защитил кандидатскую диссертацию «Повышение эффективности молниезащиты тяговых сетей переменного тока» в Московском государственном университете путей сообщения (МИИТ). Заместитель начальника Трансэнерго – филиала ОАО «РЖД».

Elektrichestvo, 2018, No. 6, pp. 41–48

DOI:10.24160/0013-5380-2018-6-41-48

A Mathematical Model of the «Lightning Channel–Extended Grounding Conductor» System

KARYAKIN Rudol'f N. (*Scientific and Research Institute of Wiring Technology, Moscow, Russia*) – Chief researcher of the Department, Dr. Sci. (Eng.)

LOSEV Viktor G. (*Transenergo – Branch of the Public Company «RZhD», Moscow, Russia*) – Deputy Head, Cand. Sci. (Eng.)

A model for calculating the propagation of a lightning current impulse in the «lightning channel - extended grounding conductor» system is considered. The conditions of considering the model of matching two long lines are analyzed. It is shown that, given constant parameters of an extended grounding conductor, the waveform and the maximal value of the lightning channel current are uniquely determined by the grounding conductor parameters. A statement is made on the basis of this result that in carrying out investigations of lightning (both natural and artificial) at test grounds, it is possible to control the lightning parameters by varying the grounding conductor parameters. This means that for the given class of tasks, lightning should be regarded as an ideal «charge generator». The revealed regularities open the possibility to control the parameters of lightning during its investigations at test grounds during both natural and triggered discharges by directly changing the parameters of artificial extended grounding conductors susceptible to lightning stroke.

Key words: heterogeneous long line, parameters, extended grounding conductor, lightning channel

REFERENCES

1. Karyakin R.N. *Elektrichestvo – in Russ. (Electricity)*, 1996, No. 7, pp. 43–51.
2. Karyakin R.N. *Elektrichestvo – in Russ. (Electricity)*, 2000, No. 12, pp. 25–32.
3. Karyakin R.N. *Elektrichestvo – in Russ. (Electricity)*, 2006, No. 11, pp. 24–32.
4. Karyakin R.N., Losev V.G. *Elektrichestvo – in Russ. (Electricity)*, 2008, No. 11, pp. 12–22.
5. Karyakin R.N., Losev V.G. *Elektrichestvo – in Russ. (Electricity)*, 2009, No. 4, pp. 12–18.
6. Karyakin R.N., Losev V.G. *Elektrichestvo – in Russ. (Electricity)*, 2009, No. 10, pp. 25–35.
7. Karyakin R.N., Losev V.G. *Elektrichestvo – in Russ. (Electricity)*, 2011, No. 7, pp. 25–31.
8. Karyakin R.N., Losev V.G. *Elektrichestvo – in Russ. (Electricity)*, 2012, No. 3, pp. 23–29.
9. Karyakin R.N., Losev V.G. *Elektrichestvo – in Russ. (Electricity)*, 2013, No. 1, pp. 60–66.
10. Gorin B.N. *Elektrichestvo – in Russ. (Electricity)*, 1985, No. 4, p. 10–15.
11. Bazelyan E.M., Raizer Yu.P. *Fizika molnii i molnierzashchity* (Lightning physics and lightning protection). Moscow, Fizmatlit, 2001, 319 p.
12. Rakov V.A. Lightning Return Stroke Speed: A Review of Experimental Data. – 27th International Conference on Lightning Protection (ICLP, 2004), Avignon, France, 13 p.
13. Rakov V.A. and Unan M.A. *Lightning Physics and Effects*. – Cambridge University Press, 2006, 687 p.
14. Borisov R.K., Smirnov M.N., Kolomiyyets Ye.V., Yankovskii B.D. *Sb. Dokladov 2-i Rossiiskoi konf. po zazemlyayushchim ustroystvam* (Collection of reports of the 2nd Russian conf. by grounding devices)/Edit. by Yu.V. Tselebrovskii. Novosibirsk, Siberian Energy Academy, 2005, pp. 107–113.
15. Hasse P., Wessinger J., Zischank W. *Handbuch für Blitzschutz und Erdung*. – Pflaum Verlag GmbH/München. – Berlin: Heidelberg, 2006, 314 p.
16. Kadomskaya K.P., Reikherdt A.A. *Elektrichestvo – in Russ. (Electricity)*, 2006, No. 11, pp. 17–23.
17. Aleksandrov G.N. *Molniya i molnierzashchita* (Lightning and lightning protection). St. Petersburg, Publ. of the Politechnical University, 2007, 281 p.
18. Van der Pol' B., Bremmer Kh. *Operatsionnoye ischisleniye na osnove dvustoronnego preobrazovaniya Laplasa* (Operational calculus based on the two-way Laplace transform). Moscow, Publ. «Inostrannaya literatura», 1952, 506 p.
19. Sikorskii Yu.S. *Elementy teorii ellipticheskikh funktsii* (Elements of the theory of elliptic functions). Moscow; Leningrad, Publ. ONTI NKTP SSSR, 1936, 365 p.
20. Yanke Ye., Emde F., Lesh F. *Spetsial'nye funktsii. Izd. 2-ye/Per. s nemets.* (Special functions. 2nd ed./Trans. with the German). Moscow, Publ. «Nauka», 1968, 344 p.
21. Beitmen G., Erdeii A. *Tablitsy integral'nykh preobrazovaniy. Tom 1. Preobrazovaniya Fur'ye, Laplasa, Mellina* (Tables of integral transformations. Vol.1. Transforms of Fourier, Laplace, Mellin). Moscow, Publ. «Nauka», 1969, 343 p.
22. Kamke E. *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nykh uravneniyam* (Handbook of ordinary differential equations). Moscow, Publ. «Inostrannaya literatura», 1951, 828 p.

[26.03.2018]