

## Влияние высокочастотных электромагнитных полей на провода большого сечения

ТКАЧЕНКО С.В., НИЧ Ю., КОРОВКИН Н.В.

*Для цилиндрического криволинейного провода с бесконечной проводимостью, когда длина волны может быть сравнима как с радиусом провода, так и с радиусом кривизны оси провода, получена система трех интегро-дифференциальных уравнений, связывающих азимутальную и аксиальную компоненты поверхностного тока в локальной системе координат с потенциалом на поверхности провода. Решение этой системы для простого, но практически важного случая бесконечного цилиндра над проводящей поверхностью, возбуждаемого произвольным полем, найдено с помощью метода модальных параметров, который требует обращения бесконечных матриц с известными элементами. Для случая возбуждения провода кольцевыми источниками напряжения была использована так называемая обобщенная теория линии передачи, которая требует знания только конечного числа параметров, являющихся обобщением классических емкости и индуктивности на единицу длины. Для случая тонких проводов, когда можно пренебречь азимутальной компонентой тока и зависимостью аксиальной компоненты тока и потенциала от локального азимутального угла, полученная система переходит в систему двух интегро-дифференциальных уравнений смешанных потенциалов для полного аксиального тока и поверхностного потенциала, которая, в свою очередь, переходит в систему уравнений для провода над проводящей поверхностью, когда длина волны много больше высоты подвеса, описывается классическим приближением линии передачи.*

**К л ю ч е в ы е с л о в а:** электромагнитное поле, провод большого сечения, кабели, кабельные пучки, обобщенная классическая теория линий электропередачи

Характерные частоты сигналов, используемых в различного рода проводниках и линиях передачи, как и частоты различного рода помех, достигают в настоящее время нескольких гигагерц. Поэтому обычно используемая классическая теория линий передачи [1] и так называемое «приближение тонких проводов» не применимы для кабелей, кабельных пучков и т.д. Необходимо обобщить классическую теорию линий передачи для случая высоких частот и проводов большого сечения\*. Такая обобщенная теория должна моделировать проводные системы сложной геометрии, включая линии конечной длины, неоднородные криволинейные линии с отличной от нуля кривизной и кручением и периодические структуры. Необходимо учитывать радиационные потери и возбуждение мод, отличных от ТЕМ-моды, при больших частотах. Для коаксиальных кабелей и кабельных пучков также может иметь существенное значение азимутальная составляющая тока, что тоже должно быть учтено в обобщенной теории.

Если поперечный размер провода существенно меньше других характерных размеров задачи, то применимо так называемое «приближение тонких проводов»: азимутальной составляющей тока и

электрического поля пренебрегается, аксиальная компонента тока считается сконцентрированной вдоль бесконечно тонкой осевой линии провода, в то же время граничное условие для суммарной тангенциальной компоненты поля записывается на поверхности провода. Это граничное условие вместе с определением скалярного потенциала на поверхности провода (с учетом уравнения непрерывности для тока и плотности заряда) приводит к паре так называемых интегро-дифференциальных уравнений смешанного потенциала (ИДУСП), связывающих полный аксиальный ток и потенциал на поверхности провода.

Система уравнений обобщенных линий передачи на основе ИДУСП была впервые получена в [2] (подробную библиографию см. также в [3]). Другой подход к построению этих уравнений был применен в [4–7]. В настоящей работе авторы будут придерживаться этой схемы, кратко описанной ниже. Для систем с высокой симметрией, т.е. для бесконечного прямого провода, провода в виде окружности, спирального провода и их комбинаций, сохраняющих симметрию (например, бесконечного провода, параллельного бесконечно проводящей поверхности), систему уравнений ИДУСП можно разложить в пространственный интеграл или ряд Фурье, в котором различные Фурье-моды «расцеп-

\* В дальнейшем изложении могут быть названы толстыми проводами.

ляются», поскольку являются представлениями соответствующей группы симметрии (группы трансляций для прямого провода, группы вращений для провода в виде окружности и т.д.). Затем для каждой моды возможно ввести так называемые модальные параметры линии передачи на единицу длины: модальные «емкость» и «индуктивность». Эти параметры связаны, соответственно, с Фурье-образами ядер первого и второго интегральных уравнений ИДУСП. Решение для тока и потенциала для каждой моды выражается через эти параметры. Для системы произвольной геометрической формы конечных размеров (когда уравнения ИДУСП не расцепляются) модальные параметры могут рассматриваться как бесконечные матрицы с отличными от нуля недиагональными элементами. В этом случае решение ИДУСП системы также может быть выражено через эти параметры для случая произвольного возбуждения. В том числе может быть рассмотрено возбуждение провода сосредоточенным источником напряжения (и(или) провода с сосредоточенным импедансом, который может быть представлен как управляемый источник напряжения [8]). Рассматривая возбуждение провода двумя сосредоточенными источниками напряжения, локализованными в оконечных точках провода, можно показать, что ИДУСП может быть точно сведено к системе дифференциальных уравнений первого порядка для тока и потенциала, которые были названы обобщенными телеграфными уравнениями. В отличие от классических телеграфных уравнений матрица параметров обобщенных телеграфных уравнений (так называемые глобальные параметры) является комплексно-значной, содержит диагональные элементы и зависит от локальной координаты и частоты. Было показано, что неклассическая часть глобальных параметров (мнимая часть недиагональных элементов и диагональные элементы) связаны с излучением системы. В частности, глобальные параметры были исследованы для случая высокосимметричных токопроводных систем: бесконечного прямого провода с двумя сосредоточенными источниками напряжения над бесконечно проводящей плоскостью и вертикального полукольца над плоскостью с бесконечной проводимостью. Была показана связь глобальных параметров с модами утечки и радиационной модой.

В настоящей работе мы применим описанную выше схему для случая большого сечения провода, когда радиус провода может быть сравним с характерными размерами задачи (например, высотой подвеса провода и (или) длиной волны). В этом случае нельзя пренебрегать ни азимутальной компонентой тока и электрического поля, ни угловой зависимостью аксиальной компоненты.

На первом этапе будут получены уравнения ИДУСП, описывающие компоненты поверхностной плотности тока и поверхностный потенциал для толстого локально-цилиндрического криволинейного провода. В отличие от случая тонкого провода эта система включает три интегро-дифференциальных уравнения: для локально-аксиальной плотности тока, локально азимутальной плотности тока и поверхностного потенциала. Все величины зависят от двух переменных — текущей длины осевой линии провода и локальной угловой координаты. В систему уравнений входит геометрический параметр — кривизна осевой линии провода.

В случае прямого толстого цилиндрического провода для случая нулевой кривизны осевой линии провода система уравнений ИДУСП существенно упрощается, и ее можно решать методом модальных параметров. Разлагая уравнения ИДУСП в интеграл Фурье по координате  $z$  и в ряд Фурье по координате  $\varphi$ , можно ввести матрицы модальных параметров на единицу длины (емкости и индуктивности), зависящих от аксиального  $k_1$  и азимутального параметров. Для прямого цилиндрического провода матрицы емкости и индуктивности являются диагональными по аксиальному параметру  $k_1$  из-за трансляционной симметрии. Для прямого цилиндрического провода в свободном пространстве эти матрицы являются диагональными также по азимутальному параметру  $\varphi$  из-за симметрии вращения. Для прямого цилиндрического провода над идеально проводящей поверхностью симметрия вращения нарушается, и матрицы параметров становятся недиагональными, однако все элементы могут быть вычислены с помощью функций Бесселя.

Зная модальные параметры системы, можно исследовать ее возбуждение произвольным внешним полем. Во-первых, было рассмотрено возбуждение системы плоской вертикально поляризованной электромагнитной волной. В качестве проверки рассматривались различные предельные случаи задачи: тонкого провода, скользящего падения и провода в свободном пространстве. Во-вторых, с помощью метода модальных параметров было найдено решение для случая возбуждения системы тонким кольцевым источником напряжения. С помощью интегрирования по азимутальному углу было найдено решение для полного аксиального тока и усредненного потенциала на поверхности провода (которое включает интегрирование по координате  $k_1$  и использование нулевого элемента обратной матрицы индуктивности на единицу длины). Затем, используя схему для тонких проводов, были найдены глобальные параметры обобщенной теории линии передачи для толстого провода, которая содержит телеграфные уравнения для полно-

го аксиального тока и усредненного потенциала на поверхности провода. Было проведено краткое исследование свойств глобальных параметров.

**Уравнения для плотности тока и потенциала на поверхности криволинейного толстого провода.** Геометрия криволинейного провода. Предположим, что цилиндрический проводник в свободном пространстве является слабо искривленным (это утверждение будет уточнено позже) и его ось представляет собой кривую, лежащую в плоскости  $yz$  (вывод может быть сделан и для более общего трехмерного случая, но получающиеся уравнения будут более громоздкими). Эта кривая задается вектором  $\vec{r}_0(l)$  (рис. 1). Параметр  $l$  (натуральный параметр) является длиной осевой линии цилиндрического провода, а единичный вектор  $\vec{e}_l(l)$  — тангенциальным вектором этой кривой:

$$\vec{e}_l(l) = \frac{\partial \vec{r}_0(l)}{\partial l}; \quad |\vec{e}_l(l)| = 1. \quad (1)$$

Этот вектор вместе с единичными векторами нормали  $\vec{n}(l)$  и бинормали  $\vec{b}(l)$  образует сопутствующий ортонормальный базис или репер Френе [9]:

$$\vec{n}(l) = \frac{1}{K(l)} \frac{\partial \vec{e}_l(l)}{\partial l}; \quad (2a)$$

$$\vec{b}(l) = \vec{e}_l(l) \times \vec{n}(l) = \vec{e}_x(l); \quad (2b)$$

$$|\vec{n}(l)| = |\vec{b}(l)| = 1. \quad (2c)$$

(Второе равенство в (2b) справедливо только для рассматриваемого случая плоской кривой.)

В (2a)  $K(l)$  — кривизна кривой  $\vec{r}_0(l)$ , параметр, обратный радиусу кривизны  $R(l)$  кривой. Подчеркнем, что в общем случае эти величины также являются функцией натурального параметра  $l$ .

Теперь можно ввести локальную цилиндрическую систему координат  $(\rho, \varphi, l)$  для каждого  $l$  в плоскости, проходящей через векторы  $\vec{n}(l)$  и  $\vec{b}(l)$ .

Каждая точка в объеме проводника  $V$  может быть однозначно описана этими координатами (при условии, что  $\rho < a$ , где  $a$  — радиус провода):

$$\vec{r}(l, \rho, \varphi) = \vec{r}_0(l) + \vec{n}(l)\rho \sin(\varphi) + \vec{e}_x(l)\rho \cos(\varphi). \quad (3)$$

Становится понятным требование слабоискривленности проводника — радиус кривизны осевой линии  $R(l)$  должен быть больше радиуса проводника  $a$ , чтобы избежать локальных пересечений  $R(l) > a$ . Кроме того, очевидно, минимальное расстояние между удаленными участками кривой должно быть больше  $2a$ , чтобы избежать глобальных пересечений. Положение точек на поверхности проводника при  $\rho = a$  описывается выражением:

$$\vec{r}(l, \varphi) = \vec{r}_0(l) + \vec{n}(l)a \sin \varphi + \vec{e}_x(l)a \cos \varphi. \quad (4)$$

Для того чтобы записать граничные условия для электрического поля идеального проводника, необходимо знать сопутствующий базис Френе  $(\vec{e}_l(l), \vec{e}_\rho(l), \vec{e}_\varphi(l))$  на его поверхности. Последний может быть получен с помощью дифференцирования вектора  $\vec{r}(l, \rho, \varphi)$  последовательно по  $l$ ,  $\rho$  и  $\varphi$ , в результате

$$\vec{e}_l(l) = \vec{e}_l(l); \quad (5a)$$

$$\vec{e}_\rho(l) = \vec{n}(l) \sin \varphi + \vec{e}_x(l) \cos \varphi; \quad (5b)$$

$$\vec{e}_\varphi(l) = \vec{n}(l) \cos \varphi - \vec{e}_x(l) \sin \varphi. \quad (5c)$$

В этом базисе можно вычислять инфинитезимальные элементы объема ( $dV$ ) и поверхности ( $dS$ ), а также представления дифференциальных операторов. (Соответствующие вычисления детально проводятся в курсах дифференциальной геометрии, см., например, [9].) Площадь поверхностного элемента

$$dS = a(1 - K(l)a \sin \varphi) d\rho dl. \quad (6)$$

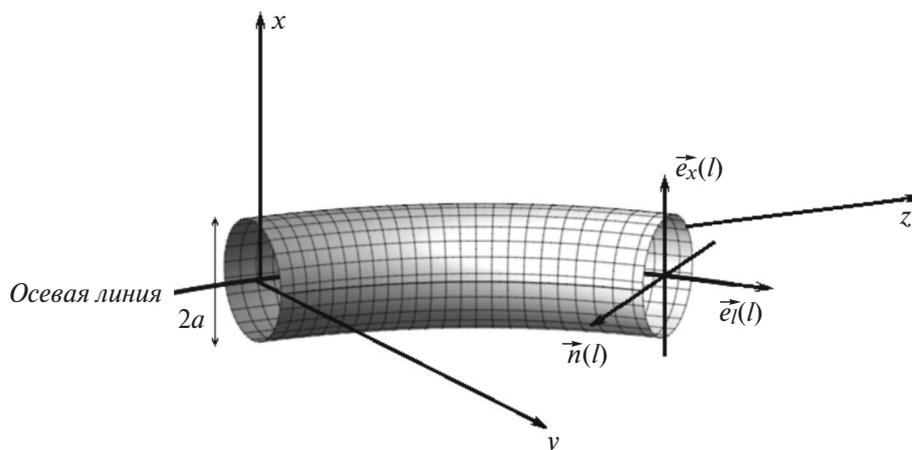


Рис. 1. Геометрия толстого криволинейного провода и сопутствующая система координат

Для градиента скалярного потенциала  $\Phi(l, \varphi)$  и дивергенции поверхностной плотности тока  $\vec{i}(l, \varphi)$  имеем:

$$\nabla\Phi(l, \varphi) = \frac{1}{h_1} \frac{\partial\Phi}{\partial\rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{h_2} \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{1}{h_3} \frac{\partial\Phi}{\partial l} \vec{e}_l(l); \quad (7a)$$

$$\operatorname{div} \vec{i} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left( \frac{\partial}{\partial l} (h_1 h_2 i_l) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (h_1 h_3 i_\varphi) \right). \quad (7b)$$

Коэффициенты Ламэ:

$$h_1 = 1; \quad (8a)$$

$$h_2 = \rho; \quad (8b)$$

$$h_3 = 1 - K(l)\rho \sin \varphi. \quad (8c)$$

Вектор поверхностной плотности тока  $\vec{i}(l, \varphi)$  в (7b) в сопутствующем базисе представляется как

$$\vec{i}(l, \varphi) = \vec{i}_l(l, \varphi) \vec{e}_l + \vec{i}_\varphi(l, \varphi) \vec{e}_\varphi, \quad (\rho = a, i_\rho = 0). \quad (9)$$

После этих предварительных геометрических замечаний можно сформулировать физические уравнения, описывающие компоненты тока и скалярный потенциал на поверхности провода.

**Уравнения для компонент тока и скалярного потенциала.** В этом разделе статьи получим интегрально-дифференциальные уравнения смешанных потенциалов (ИДУСП), которые связывают скалярный потенциал и компоненты поверхностного тока на поверхности идеально проводящего провода. Используя уравнение непрерывности, которое связывает поверхностную плотность заряда и дивергенцию тока на поверхности проводника, и полученные в предыдущем разделе представления дифференциальных операторов на поверхности провода, можно получить выражение для поверхностной плотности заряда:

$$q(l, \varphi) = -\frac{1}{j\omega} \frac{1}{1 - K \sin \varphi} \left\{ \frac{\partial i_l}{\partial l} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} ((1 - K \sin \varphi) i_\varphi) \right\}. \quad (10)$$

Подставляя его в интеграл для электрического потенциала

$$\Phi(l, \varphi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S G(l, \varphi; l', \varphi') q(l', \varphi') dS', \quad (11)$$

получаем первое из уравнений ИДУСП:

$$\begin{aligned} \Phi(l, \varphi) = & \frac{1}{j\omega 4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dl' \int_0^{2\pi} ad\varphi' \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi'} (1 - K(l')a \sin \varphi') i_\varphi(\varphi', l') + \frac{\partial}{\partial l'} i_l(\varphi', l') \right\} \times \\ & \times G(l, \varphi; l', \varphi') = 0, \quad (12) \end{aligned}$$

где  $G(l, \varphi; l', \varphi')$  обозначает скалярную функцию Грина в свободном пространстве, записанную в сопутствующей системе координат:

$$G(l, \varphi; l', \varphi') = \frac{\exp(-jk|\vec{r}(\varphi, l) - \vec{r}(\varphi', l')|)}{|\vec{r}(\varphi, l) - \vec{r}(\varphi', l')|}. \quad (13)$$

Два других уравнения ИДУСП для толстого провода получаются из нулевых граничных условий для поверхностных компонент полного (падающего+рассеянного) поля на поверхности с бесконечной проводимостью:

$$\vec{E}_\tau^{sc}(l, \varphi) + \vec{E}_\tau^{in}(l, \varphi) = 0. \quad (14)$$

Падающее возбуждающее поле считается известным, а рассеянное выражается через скалярный и векторный потенциалы:

$$\vec{E}_\tau^{sc}(l, \varphi) = -(\nabla\Phi)_\tau - j\omega \vec{A}_\tau. \quad (15)$$

Из (7a)

$$(\nabla\Phi)_\tau = \frac{1}{h_3} \frac{\partial\Phi}{\partial l} \vec{e}_l + \frac{1}{h_2} \frac{\partial\Phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi. \quad (16)$$

Аналогично, используя полученные выражения, имеем для векторного потенциала  $\vec{A}$  и его поверхностных компонент:

$$\begin{aligned} \vec{A} = & \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dl' \int_0^{2\pi} ad\varphi' (1 - K(l')a \sin \varphi') \times \\ & \times \{ i_l(l', \varphi') \vec{e}_l + i_\varphi(l', \varphi') \vec{e}_\varphi \} G(l, \varphi; l', \varphi'); \quad (17a) \end{aligned}$$

$$A_l = \vec{A}(l, \varphi) \vec{e}_l(l, \varphi); \quad (17b)$$

$$A_\varphi = \vec{A}(l, \varphi) \vec{e}_\varphi(l, \varphi). \quad (17c)$$

Уравнение (17) вместе с (14) дает два остальных уравнения ИДУСП:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 - K(l)a \sin \varphi} \frac{\partial\Phi}{\partial l} + j\omega \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dl' \int_0^{2\pi} ad\varphi' (1 - K(l')a \sin \varphi') \times \\ & \times \{ (\vec{n}(l') - (\vec{n}(l)) \vec{e}_l(l) \cos \varphi' i_\varphi(\varphi', l') + \vec{e}_l(l) \vec{e}_l(l') i_l(\varphi_1, l_1)) \} \times \\ & \times G(l, \varphi; l', \varphi') = E_l^{in}(l, \varphi); \quad (18) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{a} \frac{\partial\Phi}{\partial \varphi} + j\omega \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dl' \int_0^{2\pi} ad\varphi' (1 - K(l')a \sin \varphi') \times$$

$$\times \{ [(\vec{n}(l)(\vec{n}(l') - 1) \cos \varphi \cos \varphi' + \cos(\varphi - \varphi')] \times$$

$$\times i_\varphi(\varphi', l') + (\vec{n}(l) - (\vec{n}(l')) \vec{e}_l(l') \cos \varphi i_l(\varphi', l') \} \times$$

$$\times G(l, \varphi; l', \varphi') = E_{\varphi}^{in}(l, \varphi), \quad (19)$$

где  $E_{\varphi}^{in}$  и  $E_l^{in}$  являются  $\varphi$ - и  $l$ -компонентами возбуждающего внешнего поля на поверхности провода.

Уравнения (18), (19) и (12) образуют систему ИДУСП, которая описывает компоненты плотности тока на единицу длины и скалярный потенциал на поверхности толстого провода, возбуждаемого внешним электромагнитным полем. Переменными здесь являются длина осевой кривой провода (натуральный параметр) и аксиальный угол  $\varphi$  в сопутствующей системе координат. Отметим, что в отличие от случая тонких проводов, когда система ИДУСП состоит из двух уравнений (для усредненного потенциала на поверхности провода и полного аксиального тока, см., например, [10]), система ИДУСП для толстого провода содержит три уравнения: для потенциала на поверхности провода и двух компонент тока на поверхности провода. Дополнительное уравнение необходимо для описания аксиальной (локальной) компоненты плотности тока, которая не учитывается в приближении тонких проводов.

Выше был рассмотрен случай толстого провода, осевая линия которого является плоской кривой. Таким же образом может быть рассмотрен более сложный случай, когда осевая линия является пространственной кривой. В этом случае три уравнения ИДУСП будут иметь более сложную структуру и содержать наряду с кривизной  $K(l)$  также и кручение  $T(l)$  [9] — параметр, отличный от нуля для неплоских кривых.

Отметим также, что до сих пор рассматривался только один провод в свободном пространстве, который не образует линии передачи из-за отсутствия обратного проводника. Включение обратного проводника (например, хорошо проводящей подстилающей поверхности) приведет только к изменению функции Грина написанных выше уравнений. В следующем разделе будет дано решение ИДУСП для идеально проводящего толстого цилиндрического провода, расположенного над бесконечно проводящей землей.

**Бесконечный прямолинейный провод над проводящей поверхностью.** Уравнения для плотности тока и потенциала. Рассмотрим бесконечный идеально проводящий цилиндрический провод над поверхностью с бесконечной проводимостью, который возбуждается внешним электромагнитным полем. Поле может быть, например, либо плоской волной (рис. 2), либо так называемым кольцевым сосредоточенным источником (рис. 6).

В случае прямого провода над проводящей поверхностью уравнения ИДУСП (12), (18) и (19) должны быть изменены. Во-первых, кривизна осевой линии равна нулю и, во-вторых, сопутствующий базис существенно упрощается и становится базисом в соответствующей цилиндрической системе координат (рис. 2):

$$\begin{aligned} \tilde{e}_l(l, \varphi) &= \tilde{e}_z(z); \quad (l = z); \quad \tilde{n}(l) = \tilde{e}_y(z); \\ \tilde{e}_{\varphi}(l, \varphi) &= \tilde{e}_{\varphi}(\varphi) = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0). \end{aligned} \quad (20)$$

Кроме того, изменяется входящая в уравнения функция Грина, что вызвано наличием идеально проводящей подстилающей поверхности. Изменение функции Грина можно определить, рассматривая отражения наведенных токов и заряда (рис. 3). Не останавливаясь на подробном выводе, запишем конечный результат — уравнения ИДУСП для прямого бесконечного цилиндрического провода:

$$\frac{\partial \Phi(\varphi, z)}{\partial z} + j\omega \frac{\mu_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} a d\varphi_1 \times \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 i_z(\varphi_1, z_1) g_z(\varphi, \varphi_1, z - z_1) = E_z(\varphi, z) \Big|_{\tilde{r} \in S}; \quad (21a)$$

$$\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi(\varphi, z)}{\partial \varphi} + j\omega \frac{\mu_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} a d\varphi_1 \times \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 i_{\varphi}(\varphi_1, z_1) g_{\varphi}(\varphi, \varphi_1, z - z_1) = E_{\varphi}(\varphi, z) \Big|_{\tilde{r} \in S}; \quad (21b)$$

$$j\omega 4\pi \varepsilon_0 \Phi(\varphi, z) + \int_0^{2\pi} a d\varphi_1 \times$$

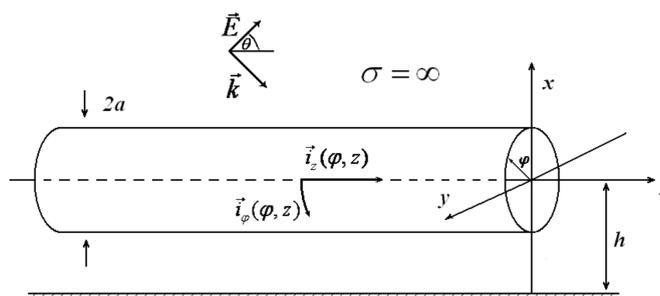


Рис. 2. Возбуждение цилиндрического провода над проводящей поверхностью плоской вертикально поляризованной волной

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 \left( \frac{1}{a} \frac{\partial i_{\varphi}(\varphi, z)}{\partial \varphi} + \frac{\partial i_z(\varphi, z)}{\partial z} \right) g_z(\varphi, \varphi_1, z - z_1) = 0; \quad (21c)$$

$$g_z(\varphi, \varphi_1, z) = g(\varphi, \varphi_1, z) - g_{ref}(\varphi, \varphi_1, z); \quad (22)$$

$$g_{\varphi}(\varphi, \varphi_1, z) = g(\varphi, \varphi_1, z) - g_{ref}(\varphi, \pi - \varphi_1, z). \quad (23)$$

Здесь  $g$  и  $g_{ref}$  — скалярная функция Грина в свободном пространстве  $g(r) = \exp(-jkr)/r$ , записанная не в сопутствующей, как в (13), а в фиксированной цилиндрической системе координат, когда точка наблюдения и точка источника находятся на поверхности провода (для  $g$ ), или, когда точка наблюдения находится на поверхности провода, а точка источника — на поверхности отраженного провода (для  $g_{ref}$ ) (рис. 3);

$$g(\varphi, \varphi_1, z) = \frac{\exp(-jk\sqrt{4a^2 \sin^2((\varphi - \varphi_1)/2) + z^2})}{\sqrt{4a^2 \sin^2((\varphi - \varphi_1)/2) + z^2}}; \quad (24)$$

$$g_{ref}(\varphi, \varphi_1, z) = \frac{\exp(-jk\sqrt{\tilde{\rho}^2(\varphi, \varphi_1) + z^2})}{\sqrt{\tilde{\rho}^2(\varphi, \varphi_1) + z^2}}; \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}^2(\varphi, \varphi_1) = & 4h^2 + 4ah(\cos\varphi + \cos\varphi_1) + \\ & + 4a^2 \cos^2\left(\frac{\varphi + \varphi_1}{2}\right). \end{aligned} \quad (26)$$

Аксиальная компонента плотности тока и плотность заряда отражаются одинаково, а азимуталь-

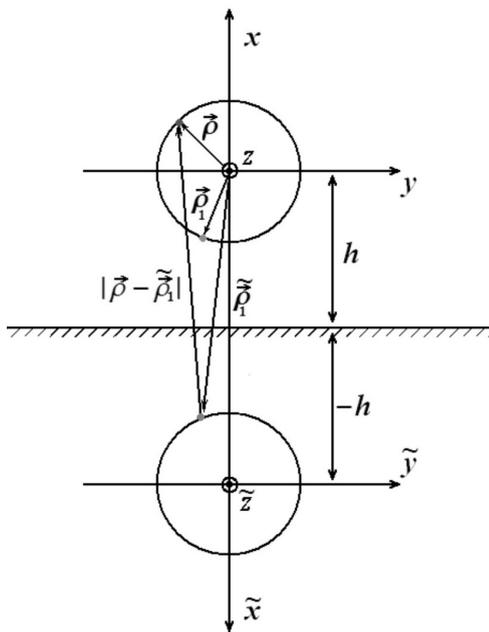


Рис. 3. К вычислению функции Грина толстого цилиндрического провода над идеально проводящей поверхностью

ная компонента плотности тока — по-другому (см. рис. 3). Это приводит к тому, что в (21a), (21c) в качестве ядра входит функция  $g_z(\varphi, \varphi_1, z)$  (22), а в уравнение (21b) — функция  $g_{\varphi}(\varphi, \varphi_1, z)$  (23).

Решение ИДУСП потенциала для прямолинейного провода над проводящей поверхностью с помощью метода модальных параметров. Система (21) зависит от двух цилиндрических координат на поверхности провода —  $\varphi$  и  $z$ . Ее можно решать с помощью разложения по этим переменным в пространственный ряд и интеграл Фурье, соответственно, в соответствие с симметрией системы: точной трансляционной симметрией вдоль оси  $z$  и приближенной симметрией вращения вокруг оси  $z$ . В силу наличия этих симметрий можно использовать разложение Фурье по полной системе модальных функций  $\{\exp(-jk_1 z) \exp(-jm\varphi) / (2\pi)^{1/2}\}$ , где первый множитель является представлением группы трансляций, а второй — представлением группы вращений. Действительное число  $k_1$  и целое  $m$  есть параметры этих представлений.

Для удобства последующих вычислений введем нормализованные величины для плотностей тока, которые имеют размерность тока (с целью получения тока правильной размерности после интегрирования по  $\varphi$ ):

$$I_{\varphi}(\varphi, z) = 2\pi a i_{\varphi}(\varphi, z); \quad (27a)$$

$$I_z(\varphi, z) = 2\pi a i_z(\varphi, z). \quad (27b)$$

Эти токи, скалярный потенциал и тангенциальное возбуждающее поле на поверхности затем представляются в виде интеграла Фурье (переменная  $z$ ) и ряда Фурье (переменная  $\varphi$ ) на поверхности провода, используя выбранную систему модальных функций:

$$E_z^e(\varphi, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \sum_{m=-\infty}^{\infty} E_{z,k_1,m}^e \frac{e^{-jk_1 z - jm\varphi}}{\sqrt{2\pi}}; \quad (28)$$

$$E_{\varphi}^e(\varphi, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \sum_{m=-\infty}^{\infty} E_{\varphi,k_1,m}^e \frac{e^{-jk_1 z - jm\varphi}}{\sqrt{2\pi}}; \quad (29)$$

$$I_{\varphi}(\varphi, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \sum_{m=-\infty}^{\infty} I_{\varphi,k_1,m} \frac{e^{-jk_1 z - jm\varphi}}{\sqrt{2\pi}}; \quad (30)$$

$$I_z(\varphi, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \sum_{m=-\infty}^{\infty} I_{z,k_1,m} \frac{e^{-jk_1 z - jm\varphi}}{\sqrt{2\pi}}; \quad (31)$$

$$\Phi(\varphi, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Phi_{k_1,m} \frac{e^{-jk_1 z - jm\varphi}}{\sqrt{2\pi}}. \quad (32)$$

В (28)–(32) введены модальные амплитуды, которые могут также рассматриваться как бесконечные вектор-столбцы (например,  $[I_{z,k_1,m}]_{m_1} = I_{z,k_1,m_1}$ ).

На следующем этапе разложения уравнений (28)—(32) можно подставить в систему уравнений ИДУСП (21) и получить после достаточно громоздких вычислений следующую бесконечную систему алгебраических уравнений для модальных амплитуд:

$$-jk_1[\Phi_{k_1,m}] + j\omega[L'_z][I_{z,k_1,m}] = [E_{z,k_1,m}^e]; \quad (33a)$$

$$-j[k_m][\Phi_{k_1,m}] + j\omega[L'_\varphi][I_{\varphi,k_1,m}] = [E_{\varphi,k_1,m}^e]; \quad (33b)$$

$$-j[k_m][\Phi_{\varphi,k_1,m}] - jk_1[I_{z,k_1,m}] + j\omega[C][\Phi_{k_1,m}] = 0; \quad (33c)$$

В (33) матрица  $[k_m]$  является бесконечной матрицей (собственных) волновых векторов для круговых волн ( $\det[k_m] = 0$ ):

$$[k_m]_{m_1,m_2} = \delta_{m_1,m_2} m_1 / a. \quad (34)$$

В (18) были введены матрицы емкости и индуктивности на единицу длины (с бесконечным числом элементов) для аксиального и азимутального токов в модальном представлении [4, 11]:

$$[L'_z] = \frac{\mu_0}{4\pi} [G_z]; \quad (35a)$$

$$[L'_\varphi] = \frac{\mu_0}{4\pi} [G_\varphi]; \quad (35b)$$

$$[C] = 4\pi\epsilon_0 [G_z]^{-1}; \quad (35c)$$

$$[L'_z][C] = \frac{1}{c^2} [U], \quad (36)$$

где  $[U]$  — единичная матрица.

Матрицы  $[G_z]$  и  $[G_\varphi]$ , в свою очередь, возникают после вычисления Фурье — представления ядер ИДУСП с использованием теоремы сложения для цилиндрических функций [12]:

$$[G_z]_{m,m_1} = -j\pi \{ H_m^{(2)}(\tilde{k}a) J_{m_1}(\tilde{k}a) \delta_{m,m_1} - (-1)^{m+m_1} J_m(\tilde{k}a) J_{m_1}(\tilde{k}a) H_{m+m_1}^{(2)}(2\tilde{k}h) \}; \quad (37)$$

$$[G_\varphi]_{m,m_1} = -j\frac{\pi}{2} \{ [H_{m+1}^{(2)}(\tilde{k}a) J_{m+1}(\tilde{k}a) + H_{m-1}^{(2)}(\tilde{k}a) J_{m-1}(\tilde{k}a)] \delta_{m,m_1} - (-1)^{m+m_1} \times [J_{m+1}(\tilde{k}a) J_{m_1-1}(\tilde{k}a) + J_{m-1}(\tilde{k}a) J_{m_1+1}(\tilde{k}a)] \times H_{m+m_1}^{(2)}(2\tilde{k}h) \} \quad (38)$$

для  $\tilde{k}^2 := k^2 - k_1^2 > 0$ .

$$[G_z]_{m,m_1} = 2 \{ K_m(\tilde{k}a) I_m(\tilde{k}a) \delta_{m,m_1} - (-1)^{m+m_1} I_m(\tilde{k}a) I_{m_1}(\tilde{k}a) K_{m+m_1}(2\tilde{k}h) \}; \quad (39)$$

$$[G_\varphi]_{m,m_1} = [K_{m+1}(\tilde{k}a) I_{m+1}(\tilde{k}a)] + K_{m-1}^{(2)}(\tilde{k}a) I_{m-1}(\tilde{k}a) \delta_{m,m_1} - (-1)^{m+m_1} \times [I_{m+1}(\tilde{k}a) I_{m_1-1}(\tilde{k}a) + I_{m-1}(\tilde{k}a) I_{m_1+1}(\tilde{k}a)] \times K_{m+m_1}(\tilde{k}h) \quad (40)$$

для  $\tilde{k}^2 := k_1^2 - k^2 > 0$ .

Формальное решение системы (33) для токов и потенциала может быть получено путем обращения описанных выше бесконечных матриц. Для практических целей нет необходимости рассматривать большое число членов в матрице параметров, поскольку они затухают как  $1/m!$  для конечных  $ka$  и  $kh$ . Это в особенности справедливо для частот ( $ka \sim 1$ ), которые важны в современных СВЧ приложениях. Следовательно, распределение плотностей компонент тока на поверхности толстого провода, включая эффект близости, может быть описано матрицами конечной размерности для произвольного возбуждения.

Уравнения для токов и потенциалов (33) справедливы для возбуждения общего вида, т.е. для произвольного набора Фурье-амплитуд возбуждающего электрического поля  $E_{z,k_1,m}^e, E_{\varphi,k_1,m}^e$ . Полные достаточно громоздкие выражения, описывающие вектор-столбцы Фурье-амплитуд тока для случая произвольного возбуждения, приведены в [4, 11]. Однако в некоторых важных частных случаях возбуждения (вертикально поляризованная плоская волна, кольцевой источник) эти выражения допускают существенное упрощение, которое и будет рассматриваться в дальнейшем в настоящей работе. Можно показать, что именно в этом случае азимутальная и тангенциальные Фурье- амплитуды возбуждающего поля связаны соотношениями:

$$[E_{\varphi,k_1,m}^e] = k_1 (k^2 - k_1^2)^{-1} [k_m][E_{z,k_1,m}^e]. \quad (41)$$

Подставляя (41) в (33) и учитывая (36), после некоторых действий с матрицами получаем простые выражения для вектор-столбцов модальных аксиальной и азимутальной компонент тока и скалярного потенциала:

$$[\Phi_{k_1,m}] = \frac{jk_1}{k_1^2 - k^2} [E_{z,k_1,m}^e]; \quad (42)$$

$$[I_{z,k_1,m}] = \frac{k}{jc(k^2 - k_1^2)} [L'_z]^{-1} [E_{z,k_1,m}^e]; \quad (43)$$

$$[I_{\varphi,k_1,m}] = 0. \quad (44)$$

Отсутствие азимутального тока при возбуждении цилиндрического провода вертикально поляризованной плоской волной имеет следующий физический смысл. В рассматриваемом случае имеем дело с ТМ-волной, т.е.  $z$ -компонента  $H_z^e$  возбуждающего магнитного поля равна нулю. В курсах математической физики доказывается (см., например, [13]), что в любой системе идеально проводящих цилиндрических проводников, параллельных оси  $z$  (не обязательно круговых цилиндров), решение уравнений Максвелла для электромагнитных полей (и, соответственно, для поверхностных токов) расщепляется на две системы волн: ТМ-волны (когда  $z$ -компонента магнитного поля равна нулю) и ТЕ-волны (когда равна нулю  $z$ -компонента электрического поля). Поскольку азимутальная компонента тока связана с  $z$ -компонентой магнитного поля, она обращается в нуль для ТМ-поляризации.

Используя вектор-столбцы модальных амплитуд (42)–(44) и обратные преобразования Фурье, можно получить выражения для распределения потенциала и токов на поверхности провода:

$$\Phi(\varphi, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \frac{jk_1 e^{-jk_1 z}}{k_1^2 - k^2 + j\delta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} E_{z,k_1,m}^e \frac{e^{-jm\varphi}}{\sqrt{2\pi}}; \quad (45)$$

$$i_z(\varphi, z) = \frac{jk}{(2\pi)^2 ca} \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \frac{jk_1 e^{-jk_1 z}}{k_1^2 - k^2 + j\delta} \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jm\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} [L'_z]^{-1}_{m,m_1} E_{z,k_1,m}^e; \quad (46)$$

$$i_{\varphi}(\varphi, z) = 0. \quad (47)$$

В знаменатели выражений (45) и (46) стандартным образом присутствует малая мнимая добавка  $\delta \rightarrow 0$ , которая обеспечивает правильный обход полюсов при интегрировании (в частности, точечный источник дает расходящиеся волны).

*Возбуждение цилиндрического провода над проводящей поверхностью вертикально поляризованной плоской волной.* Важным частным случаем применения полученных выражений является возбуждение бесконечного провода над хорошо проводящей по-

верхностью плоской вертикально поляризованной волной, когда вектор электрического поля находится в плоскости падения (рис. 2). В этом случае  $z$ -компонента возбуждающего поля (падающего + отраженного) на поверхности провода дается выражением:

$$E_z^e(\varphi, z) = 2jE_0 \sin\theta \sin(k \sin\theta(h + a \cos\varphi)) \times \exp(-jk \cos\theta z), \quad (48)$$

где  $\theta$  — угол падения волны.

Фурье-образ  $E_{z,k_1,m}^e$  выражения (48) несложно вычислить, используя свойства цилиндрических функций [12]:

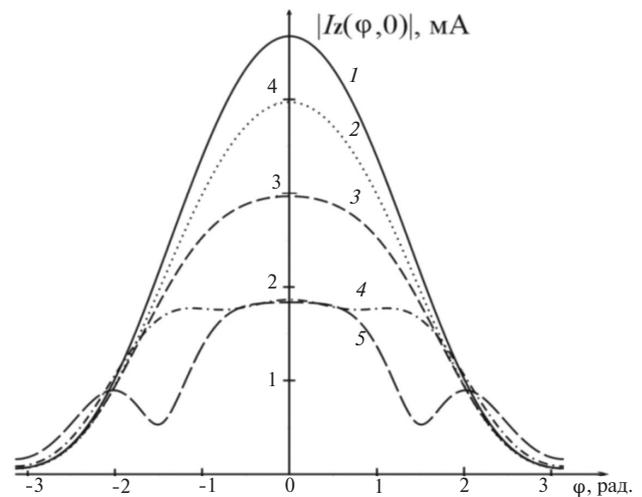
$$E_{z,k_1,m}^e = 2jE_0 \sin\theta \sin(k \sin\theta h + m\pi/2) \times J_m(k a \sin\theta) (2\pi)^{3/2} \delta(k_1 - k \cos\theta). \quad (49)$$

Интегрируя (46) и учитывая определение (27b), имеем окончательно для нормализованной плотности тока:

$$I_z(\varphi, z) = \frac{\exp(-jkz \cos\theta)}{jkc \sin^2 \theta} \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jm\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} ([L'_z]^{-1})_{m,m_1} E_{z,m_1}^e, \quad (50)$$

где

$$E_{z,k_1,m}^e = 2jE_0 \sin\theta \sin(k \sin\theta h + m\pi/2) \times J_m(k a \sin\theta) (2\pi)^{1/2}. \quad (51)$$



**Рис. 4.** Зависимость нормированного аксиального тока  $I_z(\varphi, z) = 2\pi a i_z(\varphi, z)$  от азимутального угла, значения параметров:  $E_0 = 1$  В/м,  $\theta = \pi/4$ ,  $a = 0,05$  м,  $h = 0,1$  м,  $z = 0$ : кривая 1 —  $f = 47,7$  МГц; 2 —  $f = 239$  МГц; 3 —  $f = 0,955$  ГГц; 4 —  $f = 1,91$  ГГц; 5 —  $f = 3,82$  ГГц

Численный пример зависимости нормированной плотности аксиальной компоненты тока от азимутального угла представлен на рис. 4 для разных частот. Для высоких частот, когда длина волны сравнима или больше радиуса провода, явно различаются «освещенная» и «теневая» стороны провода. Так же явно прослеживается волновая природа тока в зависимости от  $\varphi$ .

Исследуем выражения (50)–(51) для наведенного тока в различных предельных случаях. Во-первых, необходимо обратить внимание (учитывая определение (27)), что усредненный по углу  $\varphi$  нормированный ток  $I_z(\varphi, z)$  отвечает проинтегрированной по  $\varphi$  плотности тока  $i_z(\varphi, z)$ , т.е. полному аксиальному току  $I_z^{tot}(z)$ , протекающему по проводнику.

После интегрирования остается только член с  $m=0$ :

$$I_z(z) = \frac{\exp(-jkz \cos \theta)}{jkc \sin^2 \theta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} ([L'_z]^{-1})_{0,m_1} E_{z,m_1}^e. \quad (52)$$

Для случая тонкого провода  $ka \ll 1$  в матрице индуктивностей, соответственно, в сумме (52) необходимо учитывать только слагаемое с  $m=0$ ,  $m_1=0$ , что приводит к результату:

$$I_z(\varphi, z) = \frac{8jE_0(kh \sin \theta)}{k\eta_0 \sin \theta} \times e^{-jkz \cos \theta} \times \frac{H_0^{(2)}(k \sin \theta) - J_0(k \sin \theta) H_0^{(2)}(2kh \sin \theta)}{H_0^{(2)}(k \sin \theta) - J_0(k \sin \theta) H_0^{(2)}(2kh \sin \theta)}. \quad (53)$$

Учитывая асимптотики функций Бесселя при малых значениях аргумента, окончательно приходим к соотношению (54), которое совпадает с известным результатом для тока, наведенного плоской вертикально поляризованной волной в горизонтальном тонком проводе (см., например, [14]):

$$I_z(\varphi, z) = \frac{8jE_0(kh \sin \theta)}{k\eta_0 \sin \theta} \times e^{-jkz \cos \theta} \times \frac{2j \ln \left( \frac{2}{j\gamma k \sin \theta} \right) - H_0^{(2)}(2kh \sin \theta)}{\pi}. \quad (54)$$

Следующий предельный случай, который будет исследован, — возбуждение толстого провода над проводящей поверхностью при скользящем угле падения  $\theta \rightarrow 0$ . В этом случае электромагнитная волна, распространяющаяся вдоль провода, является ТЕМ-волной. При этом электрическое и магнитное поля имеют только поперечные компоненты, т.е. распределение магнитного поля в поперечной плоскости отвечает полю постоянного тока, распределение электрического поля в поперечной

плоскости имеет электростатическую форму, а скалярный потенциал на поверхности провода при фиксированном  $z$  не зависит от азимутального угла  $\varphi$  и имеет постоянное значение  $\Phi_0$ . Задача о распространении ТЕМ-волны по толстому цилиндрическому проводу над поверхностью идеально проводящей земли была решена Зоммерфельдом [15]. В наших обозначениях выражение для азимутального распределения аксиального нормированного тока имеет вид:

$$I_z(\varphi, z) = \frac{\Phi_0 e^{-jkz}}{\eta_0} \frac{2\pi \sqrt{h^2 - a^2}}{\ln \left( \frac{h + \sqrt{h^2 - a^2}}{a} \right)} \frac{1}{h + a \cos(\varphi)}. \quad (55)$$

Для того чтобы сравнить наши результаты с (55), перепишем систему (33) для случая ТМ-поляризации, учитывая (44):

$$-jk_1 [\Phi_{k_1, m}] + j\omega [L'_z] [I_{z, k_1, m}] = [E_{z, k_1, m}^e]; \quad (56a)$$

$$-j[k_m] [\Phi_{k_1, m}] = [E_{\varphi, k_1, m}^e]; \quad (56b)$$

$$-jk_1 [I_{z, k_1, m}] + j\omega [C'] [\Phi_{k_1, m}] = 0. \quad (56c)$$

Замечая, что компоненты  $z$  и  $\varphi$  электрического поля в ТЕМ-волне равны нулю, получаем вместо (56) систему однородных уравнений. С учетом вида диагональной матрицы  $[k_m]$ , где равен нулю только член с  $m=0$ , из второго однородного уравнения следует, что у потенциала на поверхности провода может быть отлична от нуля компонента  $\Phi_0$  с  $m=0$ , т.е., как и указывалось ранее, потенциал является постоянным на поверхности провода и для него можно записать:

$$[\Phi_{k, m}]_m = \Phi_0 \sqrt{2\pi} \delta_{m,0}. \quad (57)$$

Условие существования решения однородной системы из первого и третьего уравнений (56) имеет вид:

$$-k_1^2 + \omega^2 [C'] [L'_z] = 0 \text{ или с учетом } (36)$$

$$k_1^2 = \omega^2 / c^2 = k^2, \quad (58)$$

тогда из (56c) получаем:

$$[I_{z, k, m}] = \frac{\omega}{k} [C'] [\Phi_{k, m}] = \frac{4\pi}{\eta_0} [G_z]^{-1} [\Phi_{k, m}], \quad (59)$$

где матрица  $[G_z]$  берется при  $k_1 \rightarrow k$ .

Окончательно выражение для вектор-столбца тока получается после учета (57) в выражении (59).

Далее, сравнивая разложение в ряд Фурье по углу  $\varphi$  выражения (55) с суммой ряда Фурье, коэф-

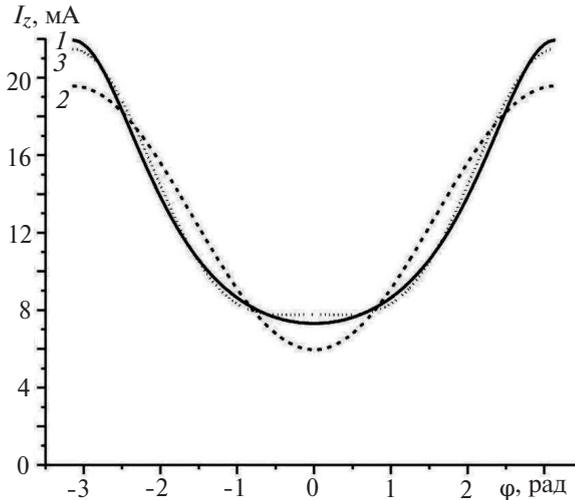


Рис. 5. Зависимость нормированной аксиальной плотности тока  $I_z(\varphi, z) = 2\pi a i_z(\varphi, z)$  от азимутального угла  $\varphi$  для ТЕМ-волны; значения параметров:  $\Phi_0 = 1$  В/м,  $a = 0,05$  м,  $h = 0,1$  м,  $z = 0$ ; 1 – точное решение (55); 2 – модальное решение, 3 члена; 3 – модальное решение, 5 членов

коэффициенты которого определяются (59), (57) (в аналитическом рассмотрении учтены три члена разложения для  $a/2h < 1$ ), можно показать, что эти два метода приводят к одинаковому результату. Как можно видеть из численного примера, приведенного на рис. 5, даже для случая  $h - a \sim a$  (когда расстояние между поверхностью провода и подстилающей поверхностью равно примерно радиусу провода) достигается хорошее согласие при учете всего нескольких модальных членов. Этот пример показывает возможность использования модального метода при рассмотрении эффекта близости.

Третьим предельным случаем, который будет рассмотрен с помощью общих формул, является известная задача дифракции электромагнитного поля на бесконечном идеально проводящем цилиндре в свободном пространстве. В этом случае для разложения воздействующего поля в цилиндрической системе координат имеем вместо (51):

$$E_{z,m}^{TM} = E_0 \sin(\theta) j^m J_m(\tilde{k}a) (2\pi)^{1/2}. \quad (60)$$

Выражение для бесконечной матрицы индуктивности получается при переходе к пределу  $h \rightarrow \infty$  в (37). При этом матрица (37) (как и все другие матрицы (38)–(40)) становится диагональной в силу того, что геометрия задачи теперь имеет точную аксиальную симметрию и, соответственно, собственные функции  $\exp(-jm\varphi)$  являются представлениями группы вращений:

$$[G_z]_{m,m_1} \Big|_{h \rightarrow \infty} = -j\pi H_m^{(2)}(\tilde{k}a) J_m(\tilde{k}a) \delta_{m,m_1}. \quad (61)$$

При подстановке (60)–(61) в (50) имеем следующее выражение для нормированной плотности тока в свободном пространстве:

$$I_z(\varphi, z) = \frac{4E_0}{\eta_0 k \sin \theta} e^{-jkz \cos \theta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{j^m}{H_m^{(2)}(ka \sin \theta)} e^{-jm\varphi}. \quad (62)$$

Для  $\theta = \pi/2$  это выражение совпадает (с учетом нормировки плотности тока) с известным выражением для тока дифракции плоской вертикально поляризованной волны на бесконечно проводящем цилиндре (см., например, [10, 16]):

$$I_{z,m}^{TM} = \frac{4}{\eta_0} \frac{j^m}{k \sin(\theta)} \frac{1}{H_m^{(2)}(\tilde{k}a)} E^i. \quad (63)$$

Возбуждение цилиндрического провода над проводящей поверхностью кольцевым источником (рис. 6). В этом случае тангенциальная компонента возбуждающего поля на поверхности провода имеет только  $z$ -компоненту (64а и с):

$$E_z^e(\varphi, z) = U_0 \delta(z); \quad (64a)$$

$$E_{z,k_1,m}^e(\varphi, z) = \sqrt{2\pi} U_0 \delta_{m,0}; \quad (64b)$$

$$E_\varphi^e(\varphi, z) = 0. \quad (64c)$$

Можно показать, что разложение источника (64) в ряд Фурье содержит ненулевую компоненту только для  $m=0$ , так что удовлетворяется условие (41) наличия только ТМ-волны. Таким образом, распределение потенциала и тока на поверхности провода определяется уравнениями (45)–(47).

Ниже нас будет интересовать только полное значение аксиального тока  $I_z(z)$  и усредненное значение потенциала  $\Phi(z)$ :

$$I_z(z) = \int_0^{2\pi} i_z(\varphi, z) a d\varphi; \quad (65)$$

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(\varphi, z) d\varphi. \quad (66)$$

После интегрирования по  $\varphi$  выражений (45) и (46) остаются только компоненты с  $m=0$ , что дает:

$$\Phi_0(z) = \frac{U_0}{2} (h(z) - h(-z)) e^{-jk|z|}; \quad (67)$$

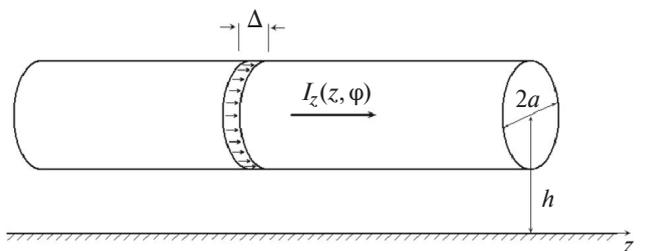


Рис. 6. Возбуждение бесконечного цилиндрического провода кольцевым источником

$$I_{z,\delta}(z) = \frac{2jkU_0}{\eta_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_1 e^{-jk_1 z}}{k_1^2 - k^2 + j\delta} ([G(k, k_1)]^{-1})_{0,0}. \quad (68)$$

Отметим, что дельта-функция в (64а) является математической идеализацией. В реальности кольцевой источник имеет конечный продольный размер  $\Delta \ll a$ . Поскольку нас не интересует детальная структура тока в окрестности области  $|z| < \Delta$ , возможно ограничить интегрирование по  $k_1$  максимальным волновым числом  $k_{\max} \approx \pi/2\Delta$ , что обеспечивает сходимость интегрирования.

Как и для приближения тонких проводов  $ka \ll 1$  [17], решение для потенциала (67) совпадает с решением для классической линии передач с ТЕМ-волной (см. ниже и уравнение (55)). Затем, используя тот факт, что в этом случае  $G_{m,m_1} \approx \delta_{m,0} \delta_{m_1,0}$ , можем получить из (37), (39) и (68) уравнение для тока сосредоточенного источника в приближении тонких проводов [17] (см. уравнения (7), (8) и рис. 7).

Исследование модальных свойств решения уравнения (68) для толстого провода, аналогичное исследованию мод в тонком проводе, возбуждаемом сосредоточенным источником напряжения, с выделением мод утечки, радиационной моды и ТЕМ-моды (которые отвечают, соответственно, вкладу в интегрирование (68) для случая тонкого провода полюсов, разреза и точки ветвления в комплексной плоскости  $k_1$  — см., например, [17]), неизвестно в литературе. Известно только классическое решение для распространяющейся ТЕМ-волны, полученное Зоммерфельдом в начале XX в. [15], которое частично описано в предыдущем разделе. В этом случае для плотности тока, потенциала и полного тока провода в наших обозначениях имеем:

$$i_z^{\text{ТЕМ}}(\varphi, z) = \frac{\Phi_0 e^{-jkz}}{\eta_0} \frac{\sqrt{h^2 - a^2}}{a(h + a \cos \varphi) \ln(h/a + \sqrt{(h/a)^2 - 1})}; \quad (69)$$

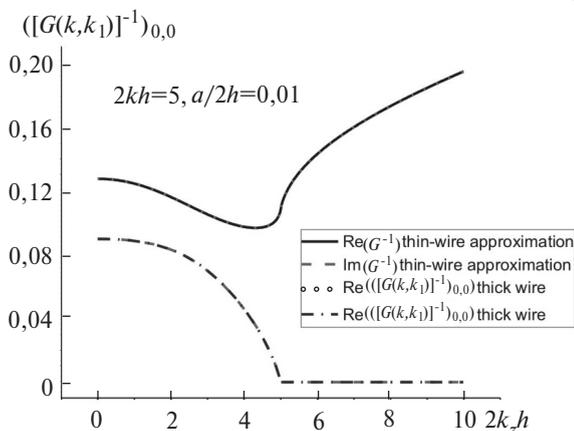


Рис. 7. Сравнение ядра уравнения (68) в приближении тонких и толстых проводов

$$\Phi^{\text{ТЕМ}}(\varphi, z) = \Phi^{\text{ТЕМ}}(z) = \Phi_0 e^{-jkz}; \quad (70)$$

$$I_z^{\text{ТЕМ}}(z) = \frac{\Phi_0 e^{-jkz}}{\eta_0} \frac{2\pi}{\ln(h/a + \sqrt{(h/a)^2 - 1})}. \quad (71)$$

Можно показать, что распространение ТЕМ-волн вдоль толстого цилиндрического провода над поверхностью описывается классическими телеграфными уравнениями с индуктивностью  $L'_0$  и емкостью  $C'_0$  на единицу длины:

$$L'_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln(h/a + \sqrt{(h/a)^2 - 1}); \quad (72-73)$$

$$C'_0 = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(h/a + \sqrt{(h/a)^2 - 1})}. \quad (74)$$

Очевидно, уравнение (67) для потенциала совпадает с (70) (например, для  $z > 0$ ), если  $\Phi_0 = U_0/2$ . После громоздких вычислений возможно показать, что вклад точек ветвления ( $k_1 = \pm k$ ) в интеграл (68) совпадает с (71), если  $\Phi_0 = U_0/2$ .

*Обобщенная теория линий передачи для бесконечного толстого провода.* Рассмотрим бесконечный идеально проводящий цилиндрический провод, параллельный идеально проводящей поверхности, который возбуждается двумя кольцевыми источниками напряжения (или кольцевым источником напряжения и нагружен на кольцевой импеданс, который может также рассматриваться как управляемый источник напряжения  $U = -ZI_z$ ), разделенными интервалом  $L$  (см. рис. 8).

Таким образом, конечная система — область между двумя кольцевыми источниками — может быть рассмотрена в рамках модели бесконечного провода, которая допускает точное решение для любого возбуждения, представленное в предыдущем разделе. Помимо чисто теоретической важности решение этой задачи представляет интерес, например, для исследования распространения высокочастотных токов, помех в кабельных экранах, проводящих трубах в химической промышленности, трубах газо- и нефтепроводов.

Для того чтобы описать полную  $z$ -компоненту индуцированного тока  $I_z(z)$  и среднее значение по

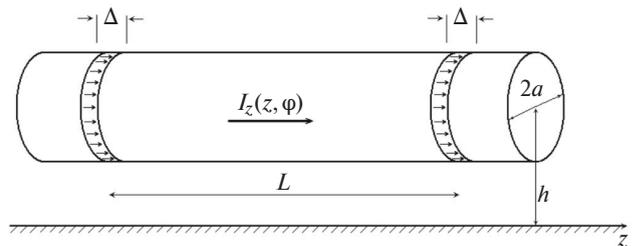


Рис. 8. Возбуждение бесконечного цилиндрического провода двумя кольцевыми источниками

тенциала на поверхности провода в моделируемой области между источниками, которые являются решениями интегро-дифференциального уравнения с помощью системы дифференциальных уравнений первого порядка, применим общий метод обобщенной теории линий передачи [2, 6, 17]. Во-первых, предположим, что кольцевые источники являются независимыми. Для рассматриваемой модели можно показать, что это предположение справедливо только для конечной области между первым и вторым источниками  $0 < z < L$ . Во-вторых, предположим, что воздействие на систему первого источника с единичной амплитудой приводит к появлению полного тока  $Y_1(z)$  и усредненного потенциала  $K_1(z)$  вдоль линии. Воздействие второго источника с единичной амплитудой дает полный ток  $Y_2(z)$  и усредненный потенциал вдоль линии  $K_2(z)$ . Используя результаты предыдущего раздела, выразим эти решения через функции  $I_{z,\delta}(z)$  и  $\Phi_\delta(z)$  — (67) и (68):

$$Y_1(z) = I_{z,\delta}(z) / U_0; \quad (75a)$$

$$Y_2(z) = I_{z,\delta}(z - L) / U_0; \quad (75b)$$

$$K_1(z) = \Phi_\delta(z) / U_0; \quad (75c)$$

$$K_2(z) = \Phi_\delta(z - L) / U_0, \quad (75d)$$

Для вывода системы уравнений обобщенной теории линий передачи повторим рассуждения [4, 6, 17]. Если первый источник имеет амплитуду  $U_1$ , а второй  $U_2$ , то общее решение для тока и потенциала в центральной области может быть записано в виде:

$$I(z) = U_1 Y_1(z) + U_2 Y_2(z); \quad (76a)$$

$$\varphi(z) = U_1 K_1(z) + U_2 K_2(z). \quad (76b)$$

Затем можно показать, что если потребовать, чтобы ток и потенциал (76a и b) в промежуточной области описывались линейной системой (77) при всех значениях  $U_1$  и  $U_2$

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \Phi(z) \\ I_z(z) \end{pmatrix} + i\omega \begin{bmatrix} P_{11}(z) & P_{12}(z) \\ P_{21}(z) & P_{22}(z) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Phi(z) \\ I_z(z) \end{pmatrix} = 0, \quad (77)$$

то матрица параметров должна вычисляться как

$$[P(z)] = -\frac{1}{j\omega} \left( \frac{d}{dz} \begin{bmatrix} K_1(z) & K_2(z) \\ Y_1(z) & Y_2(z) \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} K_1(z) & K_2(z) \\ Y_1(z) & Y_2(z) \end{bmatrix}^{-1}. \quad (78)$$

Параметры, определенные в (78), не зависят от того, какие линейно независимые решения будут взяты, т.е. определение (78) является непротиворечивым. Действительно, если рассмотреть другую пару решений, связанную с исходными невырожденной матрицей  $\hat{\alpha}$

$$\begin{bmatrix} \tilde{K}_1 & \tilde{K}_2 \\ \tilde{Y}_1 & \tilde{Y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ Y_1 & Y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}, \quad \det \hat{\alpha} \neq 0$$

то

$$[\tilde{P}(z)] = -\frac{1}{j\omega} \frac{d \left( \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ Y_1 & Y_2 \end{bmatrix} [\alpha] \right)}{dz} \left( \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ Y_1 & Y_2 \end{bmatrix} [\alpha] \right)^{-1} =$$

$$= -\frac{1}{j\omega} \frac{d \left( \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ Y_1 & Y_2 \end{bmatrix} [\alpha] \right)}{dl} \left( \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ Y_1 & Y_2 \end{bmatrix} \right)^{-1} = [P(z)], \quad (79)$$

т.е. матрица параметров не изменяется.

Таким образом показано, что решение системы дифференциальных уравнений первого порядка (обобщенных уравнений линии передачи) с граничными условиями дает решение интегро-дифференциальных уравнений смешанных потенциалов для любых комбинаций значений  $U_1, U_2$ .

Как и в случае тонких проводов [2, 4, 6, 17], параметры являются комплексно-значными, зависят от координаты текущей точки и геометрии системы. Матрица параметров содержит диагональные элементы. Используя ТЕМ-приближение, которое обсуждалось в предыдущем разделе, можно показать, что при низких частотах матрица параметров становится классической с индуктивностью и емкостью на единицу длины (72)–(74) и нулевыми диагональными элементами:

$$[P(z)]_{kh \rightarrow 0} = \begin{bmatrix} 0 & L'_0 \\ C'_0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (80)$$

Неклассическая часть параметров (комплексная часть недиагональных элементов и диагональные элементы), как и в случае тонких проводов [6], связана с излучением системы, однако в данном случае эта связь имеет более сложный характер. В качестве примера рассмотрим линию, которая возбуждается двумя кольцевыми источниками. Высота линии  $h=0,5$  м, радиус провода  $a=0,25$  м, расстояние между источниками  $L=10$  м, частота возбуждения  $f=0,238$  GHz ( $k=5$  м<sup>-1</sup>,  $kh=2,5 > \sim 1$ ). На рис. 9,  $a$  и  $d$  представлены индуктивно- и емкостно-подобные элементы матрицы параметров  $[P(z)]$ , вычисленные с помощью (78) и точных решений (67)–(68). Для сравнения приведены параметры обобщенной теории линии передачи для тонкой линии (отличающейся только радиусом провода  $a=1$  см), вычисленные с помощью метода, описанного в [17]. Также представлены индуктивность  $L'_0$  и емкость  $C'_0$  на единицу длины для толстого и тонкого проводов.

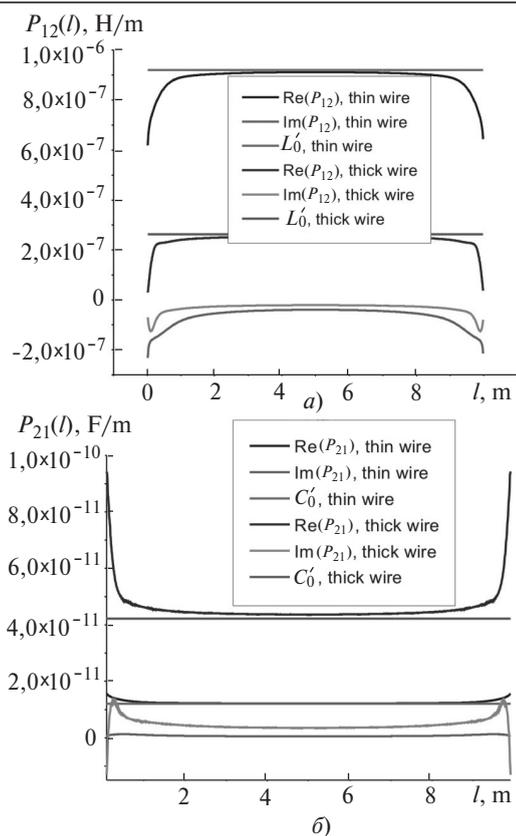


Рис. 9. Индуктивно и емкостно-подобные параметры  $P_{12}(z)$  и  $P_{21}(z)$  для толстого и тонкого проводов

Как и в случае тонких проводов, параметры имеют сингулярности в околонугрузочных областях и плавную зависимость от  $z$  ближе к центру, стремясь по мере удаления от нагрузок к своим классическим значениям. Отметим, что изменение радиуса провода существенно влияет на реальную, классическую, часть параметров (которая связана с осциллирующей электрической и магнитной энергией в ближней зоне рядом с проводом), но практически не влияет на мнимую часть параметров, которая ответственна за излучение [4, 6].

На рис. 10 приведены решение задачи для возбуждения толстого провода кольцевым источником и соответствующее решение для тонкого провода. Геометрические параметры задачи отвечают рассмотренным выше:  $U_1 = 1$  В,  $Z_1 = Z_2 = 0$   $\Omega$ ,  $k = 9$  м<sup>-1</sup>. Представленные зависимости позволяют сделать выводы:

при равной амплитуде возбуждения полный ток в толстом проводе может быть существенно больше, чем в тонком;

вблизи источника ток, особенно для толстого провода, имеет сложную структуру, обусловленную наличием высших мод;

вдали от источника ток имеет синусоидальную  $z$ -зависимость, что отвечает тому факту, что параметры имеют классический TEM-вид.

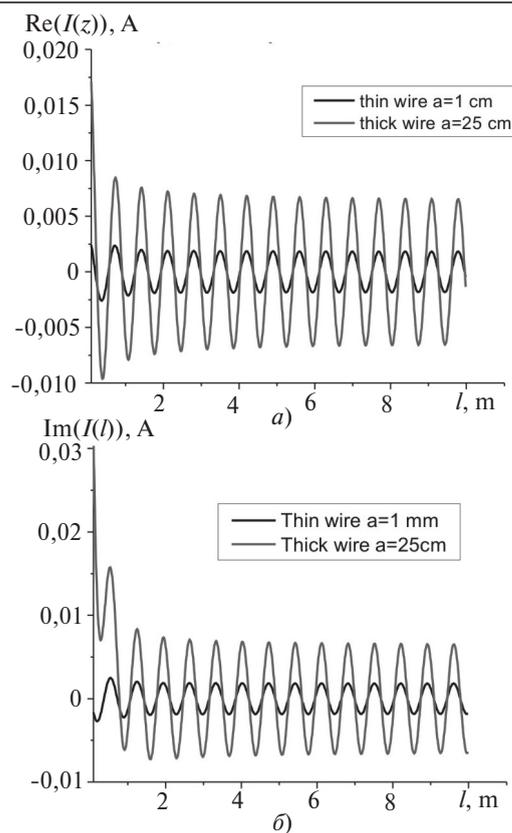


Рис. 10. Ток в бесконечном цилиндрическом проводе, возбужденном кольцевым источником

**Заключение.** Интегро-дифференциальное уравнение смешанных потенциалов было получено для криволинейного цилиндрического провода в свободном пространстве, осевая линия которого представляет плоскую кривую (кручение отсутствует). После упрощения этих уравнений для толстого прямого провода, параллельного проводящей поверхности, уравнения были решены для специальных случаев возбуждения: плоской вертикально поляризованной волной и кольцевым источником с помощью метода модальных параметров, который сводится к двойному пространственному преобразованию Фурье.

Метод обобщенной теории линий передачи, который сводит интегро-дифференциальные уравнения смешанных потенциалов к системе дифференциальных уравнений первого порядка, разработанный ранее для случая тонких проводов, был развит для толстого бесконечного провода, параллельного проводящей поверхности. Использовалась общая идеология метода обобщенной линии передачи, которая справедлива для любых линейных систем. Для нахождения парциальных решений для полного аксиального тока и усредненного поверхностного потенциала, необходимых для получения параметров, использовался метод модальных параметров.

Преимущество описываемого метода в том, что для решения телеграфных уравнений можно использовать уже существующие методы решения. Кроме того, решение телеграфных уравнений является «быстрым» по сравнению с решением интегральных уравнений. Другое преимущество — физическая интерпретация параметров обобщенной линии передачи и возможность провести аналогию между толстым проводом и многопроводной линией.

В будущем могут представить интерес следующие направления исследований:

построение системы уравнений обобщенной линии передачи для любой  $m$ -компоненты индуцированного тока и поверхностного потенциала с целью более детального описания распределения тока;

изучение модальной структуры решения для тока в окрестности кольцевого источника при исследовании модальной структуры параметров обобщенной теории линий передачи;

построение обобщенной теории линий передачи для криволинейного провода.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демирчян К.С., Нейман Л.Р., Коровкин Н.В. Теоретические основы электротехники, т. 2. С. Петербург: Питер, 2007, 431 с.
2. Naase H., Nitsch J. Full-wave transmission line theory (FWTLT) for the analysis of three-dimensional wire-like structures. — 14th International Zurich Symposium on Electromagnetic Compatibility, Feb. 2001, pp. 235–240.
3. Nitsch J., Gronwald F., Wollenberg G. Radiating Nonuniform Transmission-Line Systems and the Partial Element Equivalent Circuit Method, Wiley, 2009, chapter 2, pp. 57–135.
4. Nitsch J., Tkachenko S. Newest Development in Transmission Line Theory and Applications, Interaction Notes, Note 592.
5. Коровкин Н.В., Ткаченко С.В. Уравнения и схема замещения длинной линии с учетом излучения электромагнитной энергии. — Труды Кольского научного центра РАН. Энергетика, 2012, вып. 5, 3/2012(10), с. 7–17.
6. Nitsch J., Tkachenko S. Global and modal parameters in the generalized transmission line theory and their physical meaning. — Radio Science Bulletin, March 2005, 312, pp. 21–31.
7. Nitsch J.B., Tkachenko S.V. Propagation of Current Waves along Quasi-Periodical Thin-Wire Structures: Taking Radiation Losses into Account. — Radio Science Bulletin, 2007, No. 322, pp. 19–40.
8. Леонтович М.А., Левин М.Л. К теории возбуждения колебаний в вибраторах антенн. — Журнал Технической Физики, 1944, 14, с. 481–506.
9. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. — М.: Наука, 1984.
10. Марков Г.Т., Чаплин А.Ф. Возбуждение электромагнитных волн. — М.: Радио и связь, 1983, с. 118–146.
11. Nitsch J., Tkachenko S. Newest Developments in Transmission-Line. Theory and Applications, Ultra-Wideband, Short-Pulse Electromagnetics 7, Springer 2007, pp. 21–22.
12. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979, с. 183–185.
13. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
14. Rachidi F., Tkachenko S. Electromagnetic field interaction with transmission lines: from classical theory to HF radiation effects, WIT Press, 2008, chapter 5, pp. 154–186.
15. Sommerfeld A. Electrodynamics. — NY: Academic Press, 1952, chapter 25, pp. 198–211.
16. Кинг Р., Тай-Цзунь У. Рассеяние и дифракция электромагнитных волн. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1962 (§ 13), pp. 40–45.
17. Nitsch J., Tkachenko S. Physical Interpretation of the Parameters in the Full-Wave Transmission Line Theory. — 15th International Symposium on Theoretical Electrical, Engineering (ISTET 2009), Lübeck, Germany, CD, pp. 10–14.

[12.02.18]

*А в т о р ы: Ткаченко Сергей окончил Московский инженерно-физический институт (в настоящее время — Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ») по специальности теоретическая и математическая физика в 1987 г. Научный сотрудник кафедры электромагнитной совместимости в университете им. Отто-фон-Герике, Магдебург, Германия; доцент Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.*

*Нич Юрген Б. окончил Университет Кельна в 1971 г. и там же защитил диссертацию PhD в 1974 г. Научный сотрудник, профессор Отто-фон-Герике Университете, Магдебург, Германия.*

*Коровкин Николай Владимирович окончил электротехнический факультет Ленинградского политехнического института в 1977 г. В 1977 г. защитил докторскую диссертацию «Построение синтетических схем для численного анализа электромагнитных процессов, описываемых жесткими уравнениями». Профессор, заведующий кафедрой теоретической электротехники и электроэнергетики Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.*

## The Influence of High-frequency Electromagnetic Fields on Thick Wires

**TKACHENKO Sergey V.** (Otto-von-Guericke University, Magdeburg, Germany; Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Russia) — Guest Researcher; Associate Professor, Dr. Sci. (Eng.)

**NITSCH Juergen B.** (Otto-von-Guericke University, Magdeburg, Germany) — Professor, Dr. Sci. (Eng.)

**KOROVKIN Nikolai V.** (*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Russia*) – Professor, Dr.Sci. (Eng.)

*A system of three integro-differential equations is obtained for a cylindrical curvilinear wire with infinite conductivity for the case in which the wave length can be commensurable with both the wire radius and the wire axis curvature radius; these equations correlate the surface current azimuthal and axial components in the local system of coordinates with the wire surface potential. The solution of this system for the simple (although important for practical applications) case of an infinite cylinder above a conducting surface excited by an arbitrary field has been found using the method of modal parameters, which involves the need to invert infinite matrices with known entries. For the case of exciting a wire by means of annular voltage sources, a so-called generalized theory of a transmission line was used, for which it is necessary to know only a finite number of parameters, which are a generalization of the classic capacitance and inductance per unit length. For the case of thin wires, in which it is possible to neglect the azimuthal for the case of thin wires, in which it is possible to neglect the azimuthal current component and the dependence of the axial current component and potential on the local azimuthal angle, the obtained system transforms into a system of two integro-differential equations of mixed potentials for the total axial current and surface potential. In turn, this system transforms into a system of equations for a wire above a conducting surface when the wave length is much larger than the suspension height and is described by the classic approximation for a transmission line.*

**Key words:** *electromagnetic field, large cross-section wire, cables, cable bundles, generalized classic theory of electric power transmission lines*

#### REFERENCES

1. Demirchyan K.S., Neiman L.R., Korovkin N.V. *Teoreticheskiye osnovy elektrotekhniki, t. 2* (Theoretical foundations of electrical engineering, vol. 2). St. Petersburg, Publ. «Piter», 2007, 431 c.
2. Haase H., Nitsch J. Full-wave transmission line theory (FWTLT) for the analysis of three-dimensional wire-like structures. – 14th International Zurich Symposium on Electromagnetic Compatibility, Feb. 2001, pp. 235–240.
3. Nitsch J., Gronwald F., Wollenberg G. Radiating Nonuniform Transmission-Line Systems and the Partial Element Equivalent Circuit Method, Wiley, 2009, chapter 2, pp. 57–135.
4. Nitsch J., Tkachenko S. Newest Development in Transmission Line Theory and Applications, Interaction Notes, Note 592.
5. Korokin N.V., Tkachenko S.V. *Trudy Kol'skogo nauchnogo tsentra RAN. Energetika – in Russ. (Proc. of the Kol'skii scientific centre of Russian Academy of Sciences)*, 2012, iss. 5, 3/2012(10), pp. 7–17.
6. Nitsch J., Tkachenko S. Global and modal parameters in the generalized transmission line theory and their physical meaning. – Radio Science Bulletin, 312, March 2005, pp. 21–31.
7. Nitsch J.B., Tkachenko S.V. Propagation of Current Waves along Quasi-Periodical Thin-Wire Structures: Taking Radiation Losses into Account. – Radio Science Bulletin, 2007, No. 322, pp. 19–40.
8. Leontovich M.A., Levin M.L. *Zhurnal Tekhnicheskoi Fiziki – in Russ. (Journal of Technical Physics)*, 1944, 14, p. 481–506.
9. Dubrovina B.A., Hovikov S.P., Fomenko A.T. *Sovremennaya geometriya* (Modern geometry). Moscow, Publ. «Nauka», 1984.
10. Markov G.T., Chaplin A.F. *Vozbuzhdeniye elektromagnitnykh voln* (Excitation of electromagnetic waves). Moscow, Publ. «Radio i svyaz'», 1983, pp. 118–146.
11. Nitsch J., Tkachenko S. Newest Developments in Transmission-Line. Theory and Applications, Ultra-Wideband, Short-Pulse Electromagnetics 7, Springer 2007, pp. 21–22.
12. Abramovits M., Stigan I. *Spravochnik po spetsial'nykh funktsiyam* (Handbook of special functions). Moscow, Publ. «Nauka», 1979, pp. 183–185.
13. Budak B.M., Samarskii A.A., Tekhnov A.N. *Sbornik zadach po matematicheskoi fizike* (Collection of problems in mathematical physics). Moscow, FIZMATLIT, 2004.
14. Rachidi F., Tkachenko S. Electromagnetic field interaction with transmission lines: from classical theory to HF radiation effects, WIT Press, 2008, chapter 5, pp. 154–186.
15. Sommerfeld A. *Electrodynamics*. – NY: Academic Press, 1952, chapter 25, pp. 198–211.
16. King R., Tai-Tszum' U. *Rasseyaniye i difraktsiya elektromagnitnykh voln* (Scattering and diffraction of electromagnetic waves). Moscow, Izd-vo inostrannoi literatury, 1962 (§ 13), pp. 40–45.
17. Nitsch J., Tkachenko S. Physical Interpretation of the Parameters in the Full-Wave Transmission Line Theory. – 15th International Symposium on Theoretical Electrical, Engineering (ISTET 2009), L'beck, Germany, CD, pp. 10–14.

[12.02.18]