

Использование метода конформных преобразований для расчета магнитного поля в воздушном зазоре синхронного двигателя с модулированным магнитным потоком

ШЕВЧЕНКО А.Ф., ШЕВЧЕНКО Л.Г.

Проведён аналитический расчёт магнитного поля в воздушном зазоре двигателя с модулированным магнитным потоком и гладким гармоническим ротором. При этом сложная исходная область воздушного зазора была преобразована с использованием метода конформного преобразования в более простую кольцевую область. Уравнение Лапласа для кольцевой области было решено методом разделения переменных в полярных координатах. Для потенциала магнитного поля в воздушном зазоре было получено решение в виде ряда. Неизвестные коэффициенты ряда были определены с учетом граничных условий на поверхности ротора и статора. Проведено сравнение результатов расчёта магнитного поля аналитическим и численным методами. Результаты аналитического расчёта позволяют сделать анализ влияния различных факторов на магнитное поле и выходные характеристики электрической машины.

Ключевые слова: синхронный двигатель, гладкий гармонический ротор, расчёт, магнитное поле, метод конформных преобразований, потенциал магнитного поля, уравнение Лапласа

На одном из основных этапов проектирования электрических машин рассчитывается магнитное поле в воздушном зазоре. Такой расчёт положен в основу анализа рабочего процесса машин. Зная значение и закон распределения магнитного поля в воздушном зазоре, можно определить все основные характеристики машины.

Расчёт магнитных полей строгими аналитическими методами при неравномерном воздушном зазоре представляет собой сложную задачу даже для обычных машин с классическими распределёнными обмотками с $q \geq 2$ [1, 2]. Особенно большие сложности возникают для электрических машин с многофазным модулированным полем, созданным обмотками с сосредоточенными катушками. К таким обмоткам относятся дробные зубцовые обмотки с $q < 1$ [3].

В практике инженерных расчетов широкое применение нашли приближённые методы, например метод эквивалентных магнитных схем, развитый в работах Б.Х. Коники [4]. Этим методом определяется магнитный поток зубцового деления для различных взаимных угловых положений статора и ротора. Затем полученная зависимость разлагается в ряд Фурье и определяется закон изменения потокосцепления обмотки от взаимного положения зубцов статора и ротора.

В дальнейшем идеи, заложенные в методе эквивалентных магнитных схем, получили развитие в методе проводимостей зубцовых контуров (МПЗК). Метод разработан А.В. Ивановым-Смоленским [5], развит и реализован в работах его учеников [6].

В последние годы широкое распространение получили численные методы расчёта магнитных полей. Но даже при наличии специализированных программных пакетов для расчёта магнитных полей (FEMM, ANSYS, ELCUT и др.) весьма актуальными остаются аналитические методы расчёта магнитных полей в электрических машинах.

В статье приводятся результаты расчёта магнитного поля в воздушном зазоре с использованием метода конформных отображений на примере двигателя с модулированным магнитным потоком и гладким гармоническим ротором. Результаты расчёта, полученные аналитическим методом, позволяют провести анализ влияния различных факторов, геометрии воздушного зазора, на магнитное поле и выходные характеристики электрической машины.

Расчёт магнитного поля. Синхронные двигатели с модулированным магнитным потоком и гладким гармоническим ротором довольно подробно рассмотрены в [3]. Они представляют собой частный случай вентильного индукторного двигателя (switch reluctance motor). Двигатель имеет дробную зубцовую обмотку на статоре, но вместо развитой двухсторонней зубчатости, как у вентильного индукторного двигателя, статор выполнен зубчатым, а ротор имеет профиль, обеспечивающий гармонический закон изменения проводимости воздушного зазора [3]. Наиболее предпочтительное число периодов изменения проводимости воздушного зазора – два. Поперечный разрез двигателя приведён на рис. 1.

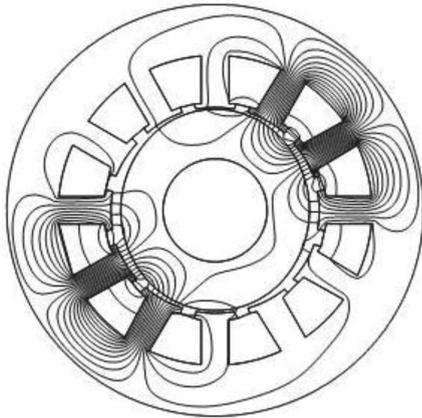


Рис. 1. Поперечный разрез исследуемого двигателя

При расчете магнитного поля в воздушном зазоре приняты следующие допущения:

магнитная проницаемость стального магнитопровода равна бесконечности $\mu_{ст} = \infty$;

магнитное поле не зависит от продольной координаты, так как размер воздушного зазора много меньше длины машины;

магнитное поле вычисляется в квазистационарном приближении, что допустимо для всех случаев, представляющих практический интерес;

реальные значения токов в пазах заменены значениями поверхностных токов, сосредоточенных в области раскрытия пазов статора, для того чтобы получить приближенное граничное условие на поверхности статора.

Сделанные допущения и отсутствие токов в воздушном зазоре позволяют ввести скалярный магнитный потенциал, который удовлетворяет двумерному уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \varphi_M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_M}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

где x и y – координаты в поперечном сечении машины.

Таким образом, задача расчета магнитного поля сводится к решению уравнения (1) с учетом граничных условий.

Граничное условие на поверхности ротора учитывает допущение $\mu_{ст} = \infty$ и отсутствие тока на поверхности ротора. В этом случае граничное условие сводится к постоянству скалярного магнитного потенциала на поверхности ротора:

$$\varphi_M = \text{const}. \tag{2}$$

Граничное условие на поверхности статора представляет собой непрерывную функцию «ступенчатого» вида с периодической зависимостью от угла (рис. 2):

$$\varphi_M = \varphi_M(\theta). \tag{3}$$

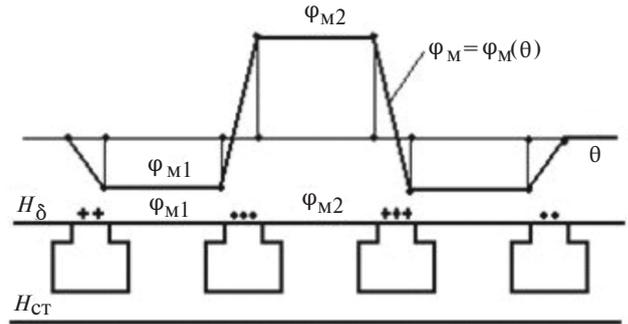


Рис. 2. Распределение магнитного потенциала на поверхности статора

На границе зубцов статора магнитные потенциалы $\varphi_{M1} = \text{const}$ и $\varphi_{M2} = \text{const}$. На границе пазов потенциал с учетом допущения о равномерности распределения тока в этой области изменяется по линейному закону от потенциала φ_{M1} до потенциала φ_{M2} , причем φ_{M1} и φ_{M2} различаются на значение полного тока в пазу.

Получить аналитическое решение уравнения Лапласа в воздушном зазоре рассматриваемого двигателя не удастся из-за сложной формы поверхности ротора. Предлагается воспользоваться конформным отображением исходной области воздушного зазора на более простую кольцевую область, для которой существует аналитическое решение задачи.

Вследствие симметрии исследуемой области воздушного зазора и симметричного распределения потенциала на поверхности статора достаточно отобразить на кольцевую область лишь половину исходной области. Для этого удобно воспользоваться промежуточным отображением на область между двумя эксцентрическими окружностями. Вначале половина исходной области на плоскости z с координатами x, y конформно преобразуется в область между двумя эксцентрическими окружностями на плоскости zz с координатами xx, yy , как показано на рис. 3. Это отображение осуществляется с помощью функции

$$zz(z) = z^2. \tag{4}$$

Затем область между двумя эксцентрическими окружностями на плоскости zz с координатами xx, yy конформно преобразуется в кольцевую область на плоскости w с координатами u, v , как показано на рис. 4.

Известно, что подобное конформное преобразование (рис. 4) осуществляется с помощью отображающей функции [7]:

$$w(zz) = \frac{zz - a}{1 - \bar{a}zz}, \tag{5}$$

где a – некоторая комплексная константа; \bar{a} – ее сопряженное значение.

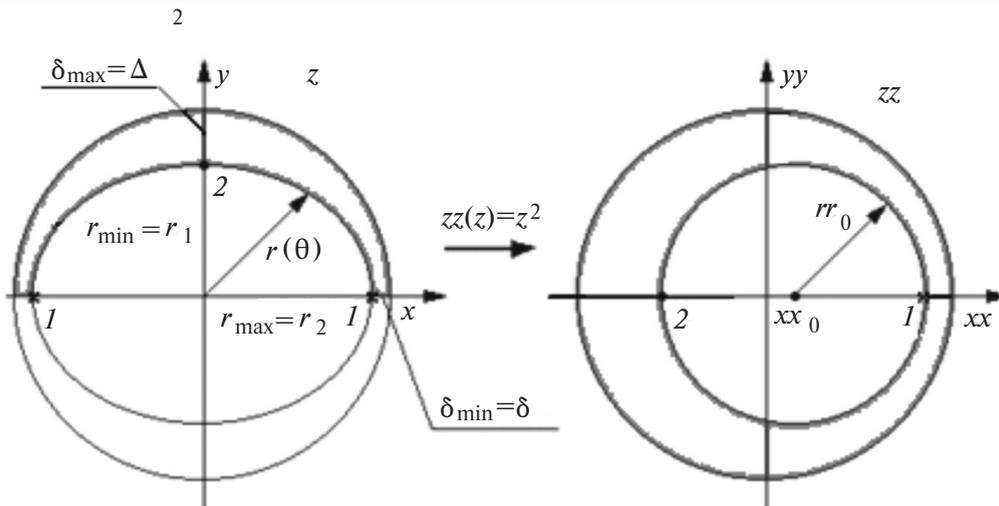


Рис. 3. Конформное преобразование половины сходной области в область между двумя эксцентрическими окружностями

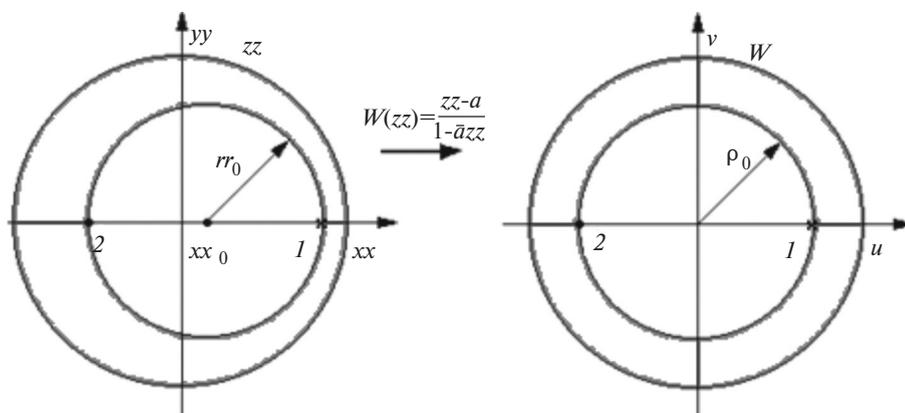


Рис. 4. Конформное преобразование области между двумя концентрическими окружностями в кольцевую область

После подстановки $zz(z) = z^2$ в уравнение (5) получаем функцию $w(z)$, отображающую исходную область на плоскости z с координатами x, y на кольцевую область на плоскости w с координатами u, v :

$$w(z) = \frac{z^2 - a}{1 - \bar{a}z^2}. \tag{6}$$

Для установления связи отображающих функций (5) и (6) с исходной областью рассматриваемого двигателя выразим константу a через параметры исходной преобразуемой области, такие как δ (минимальный воздушный зазор) и Δ (максимальный воздушный зазор). При этом радиус статора примем равным единице $\rho = 1$, а радиус ротора на преобразованной кольцевой области обозначим через ρ_0 . Тогда координаты точки 1 (рис. 3 и 4) на плоскостях z и w соответственно будут равны:

$$z = 1 - \delta; \quad w = \rho_0, \tag{7}$$

аналогично координате точки 2

$$z = j(1 - \Delta); \quad w = -\rho_0. \tag{8}$$

Подставив значения из (7) и (8) в преобразующую функцию (6) и решив систему уравнений относительно a и ρ_0 , определим:

$$a = k - \sqrt{k^2 - 1}, \tag{9}$$

где $k = \frac{1 - (1 - \Delta)^2(1 - \delta)^2}{(1 - \delta)^2 - (1 - \Delta)^2},$

$$\rho_0 = \frac{(1 - \Delta)^2 + a}{1 + \bar{a}(1 - \Delta)^2}. \tag{10}$$

Для решения уравнения Лапласа в кольцевой области естественно использовать полярную систему координат. Пусть u, v — декартовы координаты плоскости w , а ρ, α — ее полярные координаты, тогда

$$u = \rho \cos \alpha; \quad v = \rho \sin \alpha; \quad \rho = \sqrt{u^2 + v^2}; \quad \alpha = \arctg \frac{v}{u}. \tag{11}$$

Уравнение Лапласа (2) с учетом (11) после некоторых преобразований в полярных координатах примет вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi_M}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi_M}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi_M}{\partial \alpha^2} = 0. \tag{12}$$

Стандартным способом решения данного уравнения является метод разделения переменных [1]. В результате его применения после ряда преобразований получено общее решение уравнения Лапласа (12) в кольцевой области в виде следующего ряда:

$$\varphi_M(\rho, \alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(A_n \rho^n + C_n \frac{1}{\rho^n} \right) e^{in\alpha} + \varphi_{M0}, \quad (13)$$

где A_n, C_n — коэффициенты ряда, определяемые из решения с использованием граничных условий на поверхностях ротора и статора.

Используя граничное условие на поверхности ротора, а оно для конформно преобразованной кольцевой области не изменится, получаем:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(A_n \rho_0^n + C_n \frac{1}{\rho_0^n} \right) e^{in\alpha} + \varphi_{M0} = \text{const}. \quad (14)$$

Это уравнение справедливо, если коэффициенты при всех $e^{in\alpha}$ равны нулю:

$$A_n \rho_0^n + C_n \frac{1}{\rho_0^n} = 0. \quad (15)$$

Из этого условия следует, что

$$C_n = -A_n \rho_0^{2n}. \quad (16)$$

Подставив (16) в (13), получим:

$$\varphi_M(\rho, \alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \frac{1}{\rho^n} (\rho^{2n} - \rho_0^{2n}) e^{in\alpha} + \varphi_{M0}. \quad (17)$$

Второе граничное условие на поверхности статора представляет периодическую функцию, которую запишем в виде гармонического ряда Фурье [8]:

$$\varphi_M(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} + c_0. \quad (18)$$

Для конформно преобразованной кольцевой области общий вид этого граничного условия не изменится, поэтому его также можем записать в виде гармонического ряда Фурье:

$$g(\alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n e^{in\alpha} + g_0, \quad (19)$$

но выражения для коэффициентов Фурье c_n и g_n в рядах (18) и (19) будут различными.

Радиус статора был принят ранее равным единице:

$$\rho = 1. \quad (20)$$

С учетом (19) и (20) для второго граничного условия уравнение (17) запишем:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n (1 - \rho_0^{2n}) e^{in\alpha} + \varphi_{M0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n e^{in\alpha} + g_0. \quad (21)$$

Из (21) следует

$$A_n = \frac{g_n}{1 - \rho_0^{2n}}; \quad \varphi_{M0} = g_0. \quad (22)$$

Уравнение для расчета магнитного потенциала поля (13) с учетом (16) и (22) примет окончательный вид:

$$\varphi_M(\rho, \alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{g_n \rho^{2n} - \rho_0^{2n}}{\rho^n (1 - \rho_0^{2n})} e^{in\alpha} + g_0. \quad (23)$$

Для практического применения (23) необходимо найти выражение для коэффициентов Фурье g_n , связанное с параметрами рассматриваемого двигателя. Для этого сделаем следующие преобразования и рассуждения.

В нашем случае можно легко найти коэффициент Фурье c_n для разложения функции $\varphi(\theta)$ на поверхности статора в исходной области. По определению [8]

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_M(\theta) e^{-in\theta} d\theta. \quad (24)$$

Для вычисления этого интеграла удобно разбить область интегрирования на k -м зубцовом делении двигателя на два участка. На первом функция $\varphi(\theta)$ изменяется по линейному закону от потенциала φ_{k-1} до потенциала φ_k , а на втором — величина постоянная, равная φ_k , как показано на рис. 5.

Согласно обозначениям (рис. 5) периодическая функция $\varphi_M(\theta)$ на 1-м и 2-м участках k -го зубцового деления соответственно имеет вид:

$$\varphi_M(\theta) = \varphi_{k-1} + \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\alpha_k - \beta_{k-1}} (\theta - \beta_{k-1}); \quad (25)$$

$$\varphi_M(\theta) = \varphi_k,$$

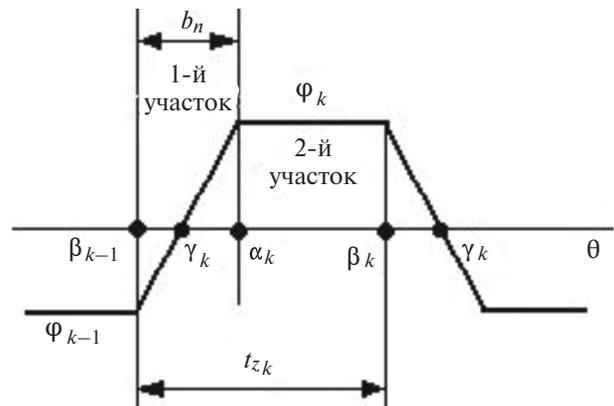


Рис. 5. Разбиение области интегрирования на два участка

где k – номер паза(зубца) или зубцового деления статора; φ_k, φ_{k-1} – потенциалы k -го и $k-1$ -го зубцов статора; θ – угол по поверхности статора; β_k, β_{k-1} – обозначения угла θ в конечных точках прямолинейных участков φ_k и φ_{k-1} ; α_k – обозначение угла θ в начале участка φ_k .

Интеграл (24) сначала определяется для этих двух участков, затем полученные выражения суммируются по всем k зубцовым делениям на периоде 2π . Введем дополнительные обозначения:

$$b_n = \alpha_k - \beta_{k-1}; \quad \alpha_k = \gamma_k + \frac{b_n}{2}; \quad \beta_{k-1} = \gamma_k - \frac{b_n}{2}, \quad (26)$$

где b_n – ширина паза статора; γ_k – координата оси k -го паза статора.

После ряда математических преобразований с учетом (25) и (26) была получена формула для коэффициента c_n ряда Фурье разложения функции $\varphi_M(\theta)$, представляющей граничное условие на поверхности статора в исходной области воздушного зазора:

$$c_n = \frac{i}{\pi n^2} \sum_k \frac{\varphi_{k-1} - \varphi_k}{b_n} e^{in\gamma_k} \sin\left(n \frac{b_n}{2}\right). \quad (27)$$

Коэффициент g_n ряда Фурье из разложения функции $g(\alpha)$ в конформно преобразованной области можно получить после преобразований из формулы (27). Действительно, при конформном отображении исходной области воздушного зазора на кольцевую потенциалы φ_{k-1} и φ_k не изменятся. Преобразуются только геометрические размеры ширины паза b_n и координаты центров пазов γ_k . Рассмотрим эти преобразования.

Согласно рис. 3 половина единичной окружности статора на плоскости z отображается на полную единичную окружность на плоскости zz , а функция $\varphi_M(\theta)$ на полупериоде π исходной окружности будет справедлива для всей преобразованной окружности (на периоде 2π преобразованной окружности) (рис. 6). Обозначим ее $\varphi_M(\theta\theta)$, где $\theta\theta$ – угол по единичной поверхности статора на плоскости zz .

Если при этом на комплексной плоскости z исходной области координаты центров пазов на единичной окружности статора представить как $\gamma_k \rightarrow z_k = e^{j\gamma_k} = e^{j\left(\gamma_k + \frac{b_n}{2}\right)}$, то на преобразованной окружности статора плоскости zz эти координаты примут вид $\gamma\gamma_k \rightarrow zz_k = e^{j2\gamma_k} = e^{j2\left(\gamma_k + \frac{b_n}{2}\right)}$, а ширина паза статора удвоится: $bb_n = 2b_n$.

Согласно рис. 4 единичная окружность статора плоскости zz преобразуется в единичную же окружность кольцевой области плоскости w , а функция $\varphi_M(\theta\theta)$ – в некую функцию $g(\alpha)$, которая показана на рис. 7. Аргументы α и $\theta\theta$ связаны между собой через отображающую функцию (5).

Следовательно, можно определить координаты центров пазов статора $w\gamma_k$ на единичной окружности плоскости w :

$$w\gamma_k \rightarrow w(zz_k),$$

где $zz_k = e^{j\theta\theta} = e^{j2\left(\gamma_k + \frac{b_n}{2}\right)}$, а ширину k -го паза статора на единичной окружности плоскости w при-

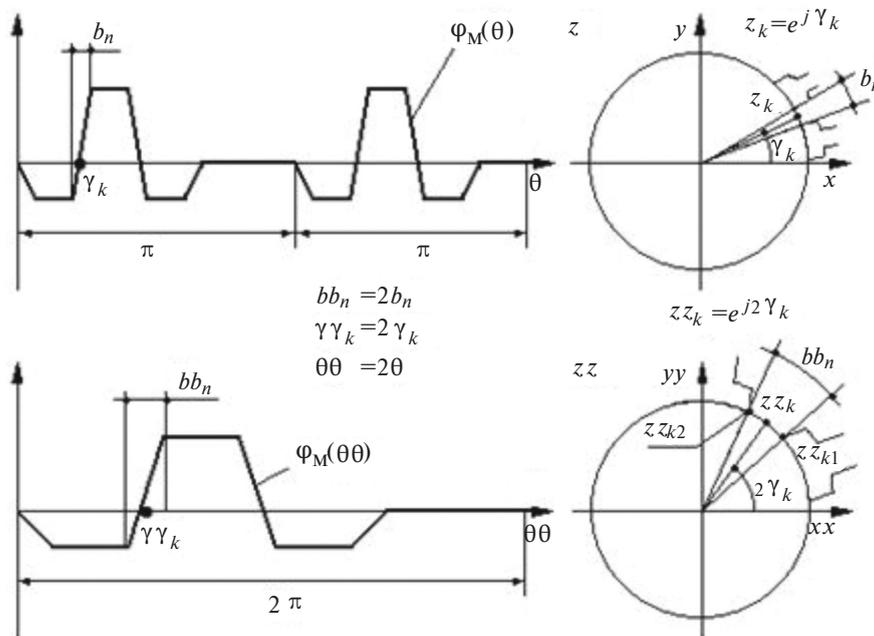


Рис. 6. Конформное преобразование функции потенциала на поверхности статора из исходной области в область между двумя эксцентрическими окружностями

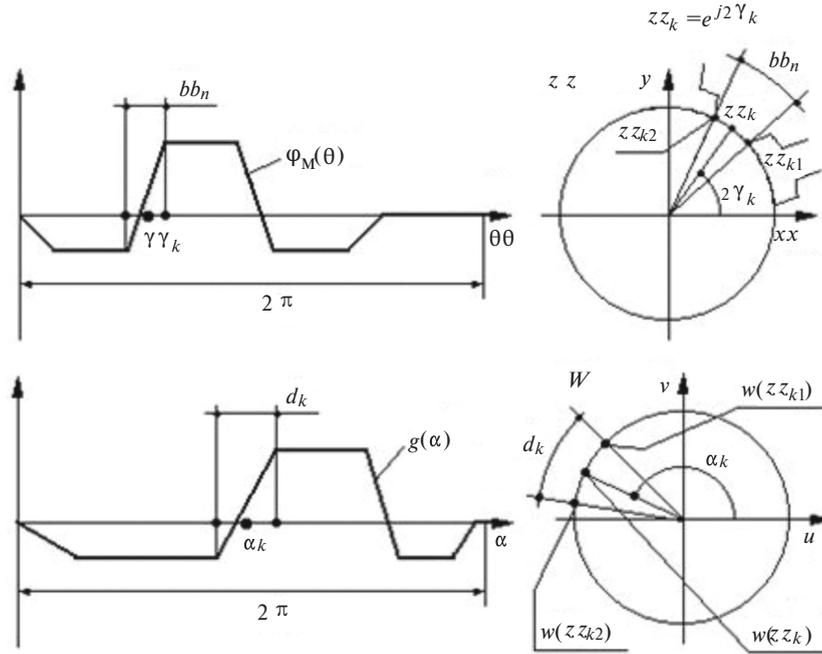


Рис. 7. Конформное преобразование функции потенциала на поверхности статора из области между двумя эксцентрическими окружностями в кольцевую область

ближенно можно найти по дифференциалу функции $w(zz)$:

$$d_k = |wp(zz_k)2b_n|, \tag{28}$$

где $|wp(zz)| = \left| \frac{1-a\bar{a}}{(1-\bar{a}zz)^2} \right|$ — модуль производной функции $w(zz)$.

Таким образом, принимая во внимание вышеизложенное, можно получить формулу для g_n следующим образом. В формуле (27) для c_n заменим $e^{j\gamma_k} \rightarrow w(zz_k)$; $b_n \rightarrow d_k$, в результате получим формулу для коэффициента Фурье g_n , который входит в (23) для потенциала магнитного поля:

$$g_n = \frac{i}{\pi n^2} \sum_k \frac{\varphi_{k-1} - \varphi_k}{d_k} \sin\left(n \frac{d_k}{2}\right) w(zz_k)^{-n}. \tag{29}$$

При этом надо помнить, что число зубцов делений k в (29) для g_n в два раза меньше, чем в (27) для коэффициента c_n .

По известному значению потенциала магнитного поля (23) можно найти его напряженность и индукцию. Запишем $\text{grad}\varphi_M$ в полярных координатах:

$$\text{grad}\varphi_M = e_\rho^\rho \frac{\partial \varphi_M}{\partial \rho} + e_\alpha^\rho \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi_M}{\partial \alpha}, \tag{30}$$

определим радиальную и азимутальную компоненты поля, которые согласно (30) равны:

$$H_\rho = -\frac{\partial \varphi_M}{\partial \rho}; \quad H_\alpha = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi_M}{\partial \alpha}. \tag{31}$$

Продифференцируем (23) сначала по радиусу ρ и получим радиальную компоненту поля:

$$H_\rho = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{ng_n}{\rho^{n+1}} \frac{\rho^{2n} + \rho_0^{2n}}{1 - \rho_0^{2n}} e^{in\alpha}, \tag{32}$$

затем по углу α и найдем азимутальную компоненту поля:

$$H_\alpha = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{ing_n}{\rho^{n+1}} \frac{\rho^{2n} - \rho_0^{2n}}{1 - \rho_0^{2n}} e^{in\alpha}. \tag{33}$$

Выражения для составляющих индукции магнитного поля:

$$B_\rho = \mu_0 H_\rho; \quad B_\alpha = \mu_0 H_\alpha. \tag{34}$$

Модули векторов напряженности и индукции магнитного поля соответственно равны:

$$|H| = \sqrt{H_\rho^2 + H_\alpha^2}; \quad |B| = \sqrt{B_\rho^2 + B_\alpha^2}, \tag{35}$$

где $H_\rho, H_\alpha, B_\rho, B_\alpha$ определяются по (32), (33), (34).

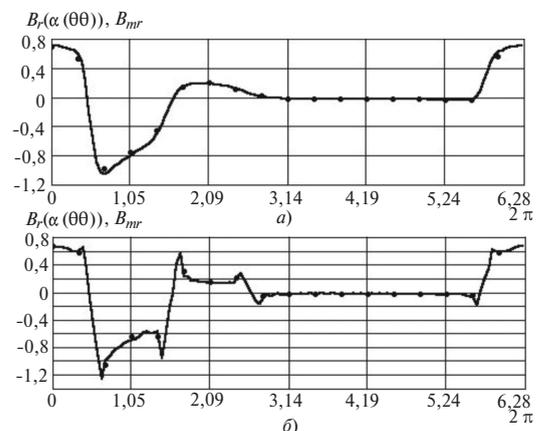


Рис. 8. Кривые поля на поверхностях ротора (а) и статора (б): — — $B_r(\alpha(\theta\theta))$; — $B_{mr}(\theta\theta)$

На рис. 8 построены кривые поля $B_r(\alpha(\theta\theta))$ (аналитический расчет) и $B_{mr}(\theta\theta)$ (численный расчет) на поверхностях ротора и статора.

Видим хорошее совпадение результатов аналитического и численного способов расчета. Точки, в которых проводилось сравнение, выделены жирным шрифтом.

Полученные выражения для определения магнитного поля можно использовать при расчёте индуктивных параметров и электромагнитного момента электрической машины.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гринберг Г.А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.: Изд. АН СССР, 1948, 727с.
2. Александров М.Н. Исследование магнитных полей в междужелезном пространстве электрических машин методом конформных отображений. Харьков, Харьковское высшее командное инженерное училище, 1967, 332 с.
3. Шевченко А.Ф., Шевченко Л.Г. Новый электродвигатель с переменным магнитным сопротивлением воздушного зазора (SR-двигатель) для высокоскоростных электроприводов. — Электротехника, 2000, № 11, с. 20—23.
4. Коник Б.Х. Учет зубчатого статора и ротора в электрических машинах. — Изв. вузов. Электромеханика, 1973, №7, с. 835—847.

5. Иванов-Смоленский А.В. Метод проводимостей зубцовых контуров. — Электричество, 1976, № 9, с. 18—28.

6. Иванов-Смоленский А.В., Абрамкин Ю.В., Власов А.И., Кузнецов В.А. Универсальный метод расчета электромагнитных процессов в электрических машинах. М.: Энергоатомиздат, 1986, 216 с.

7. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965, 716 с.

8. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. М.: Наука, 1986, 608 с.

[20.03.2018]

Авторы: Шевченко Александр Фёдорович окончил Новосибирский электротехнический институт в 1971 г. Докторскую диссертацию «Электромеханические преобразователи энергии с модулированным магнитным потоком» защитил в 1999 г. Заведующий кафедрой электромеханики Новосибирского государственного технического университета (НГТУ).

Шевченко Людмила Григорьевна окончила Новосибирский электротехнический институт в 1973 г. Кандидатскую диссертацию «Исследование двигателей с модулированным магнитным потоком и гладким гармоническим ротором» защитила в 2001 г. Доцент кафедры электромеханики НГТУ.

Elektrichestvo, 2018, No. 11, pp. 38–44

DOI:10.24160/0013-5380-2018-11-38-44

Using the Conformal Mapping Method for Calculating the Magnetic Field in the Air Gap of a Synchronous Motor with Modulated Magnetic Flux

SHEVCHENKO Aleksander F. (Novosibirsk State Technical University — NSTU, Novosibirsk, Russia) — Head of the Department, Dr. Sci. (Eng.)

SHEVCHENKO Lyudmila G. (NSTU, Novosibirsk, Russia) — Associate Professor, Cand. Sci. (Eng.)

The magnetic field in the air gap of a motor with modulated magnetic flux and smooth harmonic rotor is analytically calculated. In sodoing, the air gap's initial intricate area was transformed using the conformal mapping method into a simpler annular area. The Laplace equation for the annul ararea was solved using the variable separation method in a polar system of coordinates. Asolution in the formofa series isobtained for the magnetic field potential in the air gap. The unknown coefficients of the series were determined taking into account the boundary conditions at the rotor and stator surfaces. The magnetic field calculation results obtained using the analytical and numerical methods are compared with each other. The results obtained from analytical calculation allowoneto analyzeth eeffect of different factors and air gap geometry on the magnetic field and electrical machine output characteristics.

Key words: synchronou smotor, smoothhar monicrotor, calculation, magnetic field, conformal mapping method, magnetic field potential, Laplace equation

REFERENCES

1. Grinberg G.A. *Izbrannye voprosy matematicheskoi teorii elektricheskikh i magnitnykh yavlenii* (Selected issues of the mathematical theory of electrical and magnetic phenomena). Moscow, Publ. of the USSR Academy of Sciences, 1948, 727 p.
2. Aleksandrov M.N. *Issledovaniye magnitnykh polei v mezhduzheleznom prostranstve elektricheskikh mashin metodom konformnykh otobrazhenii* (Investigation of magnetic fields in the intergrown space of electric machines by the method of conformal mappings). Khar'kov, Khar'kov Higher Command Engineering School, 1967, 332 c.
3. Shevchenko A.F., Shevchenko L.G. *Elektrotehnika — in Russ. (Power Engineering)*, 2011, No. 11, pp. 20—23.
4. Konik B.Kh. *Izv. vuzov. Elektromekhanika — in Russ. (News of higher educational institutions. Electromechanics)*, 1973, No. 7, pp. 835—847.

5. Ivanov-Smilenskii A.V. *Elektrichestvo — in Russ. (Electricity)*, 1976, No. 9, pp. 18—28.

6. Ivanov-Smolenskii A.V., Abramkin Yu.V., Vlasov A.I., Kuznetsov V.A. *Universal'nyi metod rascheta elektromagnitnykh protsessov v elektricheskikh mashinakh* (A universal method for calculating electromagnetic processes in electric machines). Moscow, Energoatomizdat, 1986, 216 p.

7. Lavrent'yev M.A., Shabat B.V. *Metody teorii funktsii kompleksnogo peremennogo* (Methods of the theory of functions of a complex variable). Moscow, Nauka, 1965, 716 p.

8. Bronshtein I.N., Semendyayev K.A. *Spravoshnik po matematike* (Handbook of mathematics). Moscow, Nauka, 1986, 608 p.

[20.03.2018]