

Многокритериальный синтез аксиально-симметричных магнитных систем с ферромагнитными элементами и заданной конфигурацией магнитного поля

ГАЛЬЧЕНКО В.Я., ЯКИМОВ А.Н., ОСТАПУЩЕНКО Д.Л.

Предложен метод многокритериального оптимального синтеза аксиально-симметричных магнитных систем, содержащих ферромагнитные элементы, учитывающий нелинейные магнитные характеристики материалов. Реализован комплекс мероприятий, позволяющих существенно ускорить вычислительный процесс синтеза. Метод основан на использовании гибридного алгоритма глобальной оптимизации роем частиц с эволюционным формированием состава роя в сочетании с экономической реализацией алгоритма численного решения задачи анализа.

Ключевые слова: магнитные системы, ферромагнитные элементы, конфигурация магнитного поля, стохастические алгоритмы, многокритериальный синтез

Использование источников магнитного поля с априори заданной конфигурацией широко распространено в различных отраслях науки и техники. Так, в магниторезонансных томографах, циклотронах и магнитных линзах требуются высокооднородные магнитные поля значительной интенсивности; в коэрцитиметрах пондеромоторного типа для магнитных испытаний материалов и магнитных сепараторах для обогащения руды необходимо обеспечить постоянство значения $H_{\text{grad}H}$; в функциональных магнитных датчиках линейных перемещений необходимы магнитные поля с заданной функциональной зависимостью напряженности от координаты перемещения. Значительную долю таких устройств составляют устройства с аксиально-симметричными магнитными системами (МС). При проектировании МС, содержащих ферромагнитные элементы, необходимо определить значения их конструктивных параметров, которые обеспечили бы требуемую картину распределения магнитного поля [1, 2]. В силу сложного характера зависимости между значениями искоемых параметров и топографией создаваемого поля задача их поиска обычно формулируется и решается как задача параметрического синтеза. Также к проектируемым системам предъявляется ряд дополнительных требований, связанных с минимизацией объема их ферромагнитных элементов, потребляемой мощности, ограничений на допустимые геометрические размеры и т.п., т.е. данная задача формулируется как многокритериальная. Ввиду существенного прикладного

A method for multicriterion optimal synthesis of axially symmetrical magnetic systems containing ferromagnetic elements that take into account the nonlinear magnetic characteristics of materials is proposed. A set of measures is implemented the use of which makes it possible to essentially speed up the synthesis computation process. The method is based on using a hybrid algorithm of optimization by a swarm of particles with evolutionary formation of the swarm composition in combination with efficient implementation of the algorithm for numerical solution of the analysis problem.

Key words: magnetic systems, ferromagnetic elements, magnetic field configuration, stochastic algorithms, multicriterion synthesis

значения ее решение привлекает к себе серьезное внимание исследователей.

Так, в статье [3] предложен метод численного решения задачи формирования однородного магнитного поля за счет изменения занимаемого ферромагнетиком объема, который использовался для класса МС, имеющих плоскость симметрии с выделенной компонентой. При этом расчет поля осуществлялся с использованием метода конечных элементов (FEM), при применении которого на конечные элементы разбивается не только объем, занимаемый ферромагнетиком, но и окружающее МС пространство, что значительно повышает размерность решаемой задачи. В [4] описан метод поиска оптимальной формы полюсов электромагнита, обеспечивающего однородное магнитное поле в рабочей области межполюсного пространства. Форма полюсов определялась с помощью совокупности подвижных точек, каждая из которых в процессе оптимизации имела возможность перемещаться в некотором направлении на определенное расстояние. При этом поиск формы полюсов сводился к минимизации соответствующего функционала с использованием метода Лагранжа. При применении линейной интерполяции получаемые в результате полюса имеют ломаный профиль, что существенно затрудняет их изготовление. Обеспечить достаточную степень гладкости профиля позволяет использование при описании его геометрии кривых Безье и B-сплайнов, как, например,

это было сделано в [5], где для поиска значений оптимальных конструктивных параметров применялся метод анализа чувствительности в сочетании с методом наискорейшего спуска.

В исследовании [6] для синтеза прецизионной МС циклотрона был разработан комплекс вычислительных программ, также основанных на методе конечных элементов. Однако при изменении геометрии МС приходилось заново генерировать конечно-элементную сеть, для чего требуются дополнительные временные и вычислительные затраты. В исследованиях [3–6], использовавших при синтезе FEM, учитывались зависимости намагниченности ферромагнетика от напряженности поля. В [7, 8] задача многокритериальной оптимизации параметров МС магниторезонансного томографа решалась в несколько этапов с использованием оптимизационных схем, базирующихся на крупношаговом методе поиска экстремума и методе Левенберга–Марквардта. В этих и описанных выше исследованиях применялись локальные методы поиска оптимума, что не всегда позволяет найти наилучшее из возможных решений, особенно если учесть, что возникающие при решении подобных задач целевые функции многоэкстремальны и имеют многомерный овражный характер. Также во всех перечисленных работах основное внимание исследователей было направлено на генерацию однородного поля, хотя в большинстве реальных МС необходимо обеспечивать и более сложные конфигурации магнитных полей.

Цель нашего исследования – разработка метода многокритериального оптимального синтеза акси-

ально-симметричных МС с ферромагнитными элементами и заданной конфигурацией магнитного поля, основанного на гармоничном сочетании аппарата пространственных интегральных уравнений (ПриУ), глобального алгоритма оптимизации рою частиц с эволюционным формированием состава роя, технологии On/Off, метода Ньютона-GMRES решения систем нелинейных уравнений большого порядка с ускоренными операциями матрично-векторного умножения, метода продолжения по параметру, а также учета трансляционной симметрии элементов разбиения.

Постановка задачи исследования. В статье ставится задача оптимального синтеза аксиально-симметричных МС с заданной конфигурацией магнитного поля в рабочем объеме. Обеспечение требуемого распределения магнитного поля осуществляется путем выбора конструктивных параметров, определяющих геометрию ферромагнитных элементов и катушек с током, входящих в состав МС. Относительно магнитных свойств ферромагнетика принимается предположение об их нелинейности, кусочной однородности и изотропности, при этом гистерезис не учитывается. В катушках протекает ток постоянной плотности, а при проведении расчетов учитывается неоднородный характер создаваемых ими магнитных полей. Обобщенная схема синтезируемой МС представлена на рис. 1. Контроль распределения магнитного поля в рабочем объеме Ω осуществляется на множестве произвольно располагаемых в нем контрольных точек, что допустимо в силу достаточной гладкости измене-

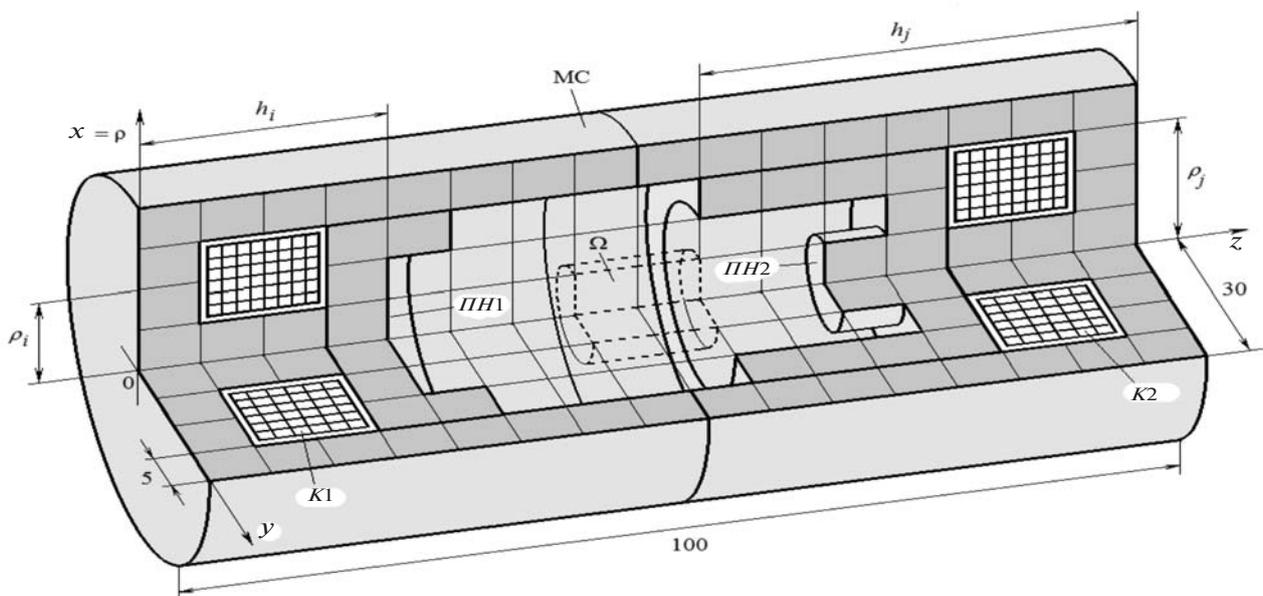


Рис. 1. Общий вид синтезируемой магнитной системы: ПН1, ПН2 – полюсные наконечники; К1, К2 – катушки; Ω – рабочий объем

ния напряженности поля от точки к точке вдали от границ раздела сред.

Реализация поставленной цели подразумевает решение следующих подзадач: построение параметризованной математической модели МС, позволяющей проводить анализ распределения намагниченности в ферромагнитных элементах и напряженности магнитного поля в контрольных точках, а также разработка ее эффективной программной реализации; выбор целевой функции, позволяющей свести решение обратной задачи обеспечения распределения поля с заданными свойствами к задаче поиска условного экстремума, при этом должна быть обеспечена возможность учета критериев, связанных, например, с материалоемкостью или ограничениями на габаритные размеры; реализация эффективного алгоритма глобальной условной оптимизации, адаптированного к решению задач многокритериальной постановке; тестирование программного обеспечения и проведение соответствующих вычислительных экспериментов по синтезу МС.

Математическая и информационная модель аксиально-симметричной магнитной системы. Задача расчета распределения намагниченности в ферромагнитных элементах МС и напряженности поля в ее рабочем объеме с учетом перечисленных в постановке задачи факторов может быть решена с использованием метода ПриУ [9, 10]. Поскольку расчет проводится при вычислении значения целевой функции на каждом шаге работы оптимизационного алгоритма, на эффективность вычислительного процесса оказывают влияние как скорость расчета поля, так и необходимое для нахождения оптимального значения параметров число итераций, т.е. вычислительный процесс синтеза в целом является весьма сложной задачей и необходима его оптимизация по критериям снижения ресурсоемкости и временных затрат. Многократное решение прямой задачи магнитостатики с применением метода ПриУ позволяет организовать вычислительный процесс так, чтобы общая часть данных, участвующая в расчетах, вычислялась на предварительной стадии один раз с последующим многократным использованием. Применяемые на практике МС обладают различными видами симметрии, такими как осевая, периодическая, зеркальная, учет которых позволяет во многих случаях сделать алгоритм расчета поля менее ресурсоемким [11]. Так, учет аксиальной симметрии позволяет понизить на единицу размерность решаемой задачи, а трансляционная симметрия вдоль оси z , которую также предлагается учитывать, делает возможным использование при численном решении ПриУ матриц специального вида, что, в свою очередь, по-

ложительно сказывается на скорости вычислительного процесса.

Остановимся на особенностях математической модели и ее программной реализации более подробно. За основу расчета поля МС удобно использовать ПриУ относительно неизвестного распределения намагниченности [12]:

$$\vec{B}(Q) = \frac{\mu_0}{4\pi} \operatorname{rot}_Q \iiint_V \vec{M}(P) \times \operatorname{grad} \frac{1}{r_{PQ}} dV_P + \vec{B}^{(0)}(Q), \quad (1)$$

которое должно быть дополнено материальным уравнением вида

$$\vec{B}(Q) = \mu_0 (\vec{H}(Q) + \vec{M}(Q)), \quad (2)$$

где $\vec{r}_{PQ} = \vec{r}_Q - \vec{r}_P$ – вектор, проведенный из точки истока P в точку наблюдения Q , принадлежащие ферромагнитному телу; $\vec{B}(Q)$ – магнитная индукция в точке Q ; $\vec{B}^{(0)}(Q) = \mu_0 \vec{H}^{(0)}(Q)$ – магнитная индукция первичного поля, создаваемого токами, протекающими в катушках.

Разделив уравнение (1) на μ_0 и воспользовавшись обратной магнитной характеристикой $\vec{H}(Q) = F^{-1}(\vec{M}(Q))$, можно записать интегральное уравнение (ИУ):

$$\begin{aligned} \vec{M}(Q) + F^{-1}(\vec{M}(Q)) = \\ = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot}_Q \iiint_V \vec{M}(P) \times \operatorname{grad} \frac{1}{r_{PQ}} dV_P + \vec{H}^{(0)}(Q). \end{aligned} \quad (3)$$

Для обеспечения обратимости магнитной характеристики на всей вещественной оси ее необходимо скорректировать, как это сделано в [13], используя метод продолжения по параметру согласно схеме

$$F(\vec{H}(Q)) = \lambda F^*(\vec{H}(Q)) + \bar{\chi}(1 - \lambda)\vec{H}(Q), \quad (4)$$

где $\lambda \in [0, 1]$ – вещественный параметр, значение которого стремится к единице по мере сходимости используемого при расчете итерационного процесса; $F^*(\vec{H}(Q))$ – исходная магнитная характеристика ферромагнетика; $\bar{\chi}$ – некоторое среднее значение магнитной восприимчивости.

В силу аксиальной симметрии задачи при проведении расчетов удобно воспользоваться цилиндрической системой координат. При этом для численного решения уравнения (3) в расчетной области на плоскости $\rho O z$ вводится регулярная сеть размером $N_\rho \times N_z$, в результате чего пространственная расчетная область представляется в виде регулярного набора концентрических колец. Число N_z , как это будет показано в дальнейшем, удобно вы-

брать равным некоторой степени числа два. Предполагается, что в пределах каждого такого элемента разбиения вектор намагниченности постоянен: $M^{(\rho)} = \text{const}$, $M^{(z)} = \text{const}$, $M^{(\varphi)} = 0$. Таким образом, решение задачи расчета распределения намагниченности сводится к определению неизвестных намагниченностей элементарных объемов, которые удобно представить в виде прямоугольного массива размером $N_\rho \times N_z$:

$$M = \begin{bmatrix} \bar{M}_{N_\rho-1,0} & \bar{M}_{N_\rho-1,1} & \dots & \bar{M}_{N_\rho-1,N_z-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{M}_{1,0} & \bar{M}_{1,1} & \dots & \bar{M}_{1,N_z-1} \\ \bar{M}_{0,0} & \bar{M}_{0,1} & \dots & \bar{M}_{0,N_z-1} \end{bmatrix}$$

ассоциируя их таким образом с соответствующими элементами разбиения.

Выполнив преобразования, учитывающие аксиальную симметрию и допущения о кусочно-постоянном распределении намагниченности, для ИУ (3) можно записать дискретный аналог в виде системы нелинейных уравнений относительно элементов массива M :

$$F^{-1}(\bar{M}_{i_1,j_1}) + \bar{M}_{i_1,j_1} = \sum_{i_2=0}^{N_\rho-1} \sum_{j_2=1}^{N_z-1} (\bar{\Theta}_{i_1,i_2,j_2-j_1} M_{i_2,j_2}^{(\rho)} + \bar{\Xi}_{i_1,i_2,j_2-j_1} M_{i_2,j_2}^{(z)}) + \bar{H}_{i_1,j_1}^{(0)}, \quad (5)$$

где $\bar{H}_{i_1,j_1}^{(0)}$ – значения напряженности внешнего поля в центральных точках продольных сечений элементов разбиения Q_{i_1,j_1} , $i_1=0, N_\rho-1$, $j_1=0, N_z-1$, которые также удобно задавать в виде массива

$$H^{(0)} = \begin{bmatrix} \bar{H}_{N_\rho-1,0}^{(0)} & \bar{H}_{N_\rho-1,1}^{(0)} & \dots & \bar{H}_{N_\rho-1,N_z-1}^{(0)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{H}_{1,0}^{(0)} & \bar{H}_{1,1}^{(0)} & \dots & \bar{H}_{1,N_z-1}^{(0)} \\ \bar{H}_{0,0}^{(0)} & \bar{H}_{0,1}^{(0)} & \dots & \bar{H}_{0,N_z-1}^{(0)} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Векторы $\bar{\Theta}_{i_1,i_2,j_2-j_1}$ и $\bar{\Xi}_{i_1,i_2,j_2-j_1}$ представляют собой напряженности полей, создаваемых единичными намагниченностями элементов разбиения (i_1, i_2) , направленными вдоль осей ρ и z соответственно, в точках Q_{i_1,j_1} . В силу регулярности используемого разбиения и того факта, что ядро ИУ (3) зависит от разности аргументов, векторы $\bar{\Theta}_{i_1,i_2,j_2-j_1}$ и $\bar{\Xi}_{i_1,i_2,j_2-j_1}$ зависят от разности индек-

сов $j_2 - j_1$, определяющей взаимное расположение элементов разбиения вдоль оси z , т.е. имеет место трансляционная симметрия. Таким образом, достаточно рассчитать и хранить в памяти компьютера величины вида:

$$\begin{aligned} \bar{\Theta}_{i_1,i_2,j_2} &= \frac{1}{4\pi} \iint_{S_{i_2,j_2}^{(3)}} \frac{\bar{e}_\varphi \times \bar{r}_{PQ_{i_1,0}}}{r_{PQ_{i_1,0}}^3} dS_P - \\ &- \frac{1}{4\pi} \iint_{S_{i_2,j_2}^{(1)}} \frac{\bar{e}_\varphi \times \bar{r}_{PQ_{i_1,0}}}{r_{PQ_{i_1,0}}^3} dS_P; \\ \bar{\Xi}_{i_1,i_2,j_2} &= \frac{1}{4\pi} \iint_{S_{i_2,j_2}^{(4)}} \frac{\bar{e}_\varphi \times \bar{r}_{PQ_{i_1,0}}}{r_{PQ_{i_1,0}}^3} dS_P - \\ &- \frac{1}{4\pi} \iint_{S_{i_2,j_2}^{(2)}} \frac{\bar{e}_\varphi \times \bar{r}_{PQ_{i_1,0}}}{r_{PQ_{i_1,0}}^3} dS_P, \end{aligned} \quad (7)$$

иными словами, возможно проводить расчет коэффициентов влияния лишь для точек вида $Q_{i_1,0}$, расположенных в первом вертикальном ряду элементов разбиения сети, что позволяет значительно экономить оперативную память компьютера.

Используя формальную аналогию между полями, создаваемыми кольцеобразными ферромагнитными элементами при $M^{(\rho)} = \text{const}$, $M^{(z)} = \text{const}$, $M^{(\varphi)} = 0$, и полями, создаваемыми располагаемыми на их поверхностях слоями токов $\delta_1 - \delta_4$ (см. рис. 2), вычисление поверхностных интегралов в выражениях (7) можно свести к однократному интегрированию выражений:

$$\begin{aligned} h_\rho(Q) &= \frac{1}{2\pi} \left[E(k) \frac{\rho_P^2 + \rho_Q^2 + (z_Q - z_P)^2}{(\rho_P + \rho_Q)^2 + (z_Q - z_P)^2} - K(k) \right] \times \\ &\times \frac{z_Q - z_P}{\rho_Q \sqrt{(\rho_P + \rho_Q)^2 + (z_Q - z_P)^2}}; \\ h_z(Q) &= \frac{1}{2\pi} \left[E(k) \frac{\rho_P^2 - \rho_Q^2 - (z_Q - z_P)^2}{(\rho_P + \rho_Q)^2 + (z_Q - z_P)^2} + K(k) \right] \times \\ &\times \frac{1}{\sqrt{(\rho_P + \rho_Q)^2 + (z_Q - z_P)^2}}; \\ k &= \sqrt{\frac{4\rho_P \rho_Q}{(\rho_P + \rho_Q)^2 + (z_Q - z_P)^2}}, \end{aligned} \quad (8)$$

описывающих напряженность магнитного поля, создаваемого контуром с током, по образующим элементов разбиения $l_1 - l_4$.

Величины $\bar{\Theta}_{i_1, i_2, j_2}$ и $\bar{\Xi}_{i_1, i_2, j_2}$ удобно объединить в один трехмерный массив **A**, состоящий из мат-

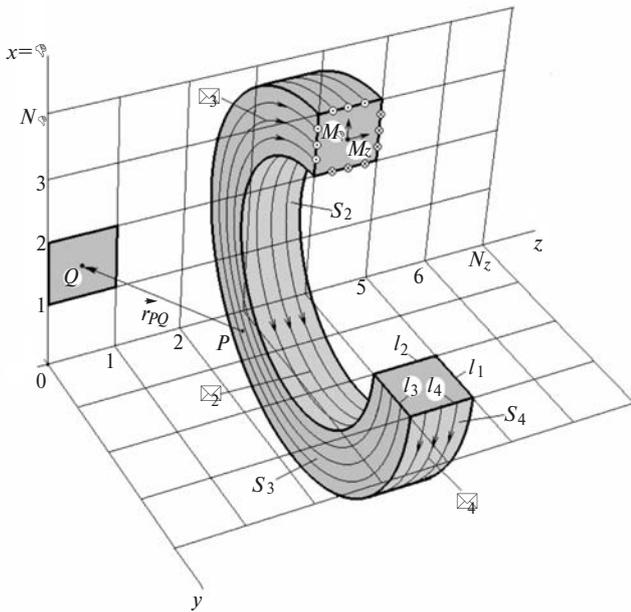


Рис. 2. Кольцевой элемент разбиения

ричных блоков размером 2x2 вида

$$A_{i_1, i_2, j_2} = \begin{pmatrix} \Theta_{i_1, i_2, j_2}^{(\rho)} & \Xi_{i_1, i_2, j_2}^{(\rho)} \\ \Theta_{i_1, i_2, j_2}^{(z)} & \Xi_{i_1, i_2, j_2}^{(z)} \end{pmatrix} \quad (9)$$

элементы которых с использованием выражений (8) можно рассчитать по формулам

$$A_{i_1, i_2, j_2} = \begin{pmatrix} \Theta_{i_1, i_2, j_2}^{(\rho)} & \Xi_{i_1, i_2, j_2}^{(\rho)} \\ \Theta_{i_1, i_2, j_2}^{(z)} & \Xi_{i_1, i_2, j_2}^{(z)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_3^{(\rho)} - I_1^{(\rho)} & I_4^{(\rho)} - I_2^{(\rho)} \\ I_3^{(z)} - I_1^{(z)} & I_4^{(z)} - I_2^{(z)} \end{pmatrix} \quad (10)$$

где $I_k^{(\rho)} = \int_{l_k} h_\rho dl_\rho$; $I_k^{(z)} = \int_{l_k} h_z dl_z$.

Интегралы $I_k^{(\rho)}$ и $I_k^{(z)}$ вычисляются вдоль образующих поверхностей, ограничивающих элемент разбиения (i_2, j_2) , при этом точка наблюдения пробегает положения $Q_{i_1, 0}$, $i_1 = 0, N_\rho - 1$. Для найденных таким образом коэффициентов выполняются соотношения

$$\begin{pmatrix} \Theta_{i_1, i_2, -j_2}^{(\rho)} & \Xi_{i_1, i_2, -j_2}^{(\rho)} \\ \Theta_{i_1, i_2, -j_2}^{(z)} & \Xi_{i_1, i_2, -j_2}^{(z)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta_{i_1, i_2, j_2}^{(\rho)} & -\Xi_{i_1, i_2, j_2}^{(\rho)} \\ -\Theta_{i_1, i_2, j_2}^{(z)} & \Xi_{i_1, i_2, j_2}^{(z)} \end{pmatrix} \quad (11)$$

позволяющие проводить вычисления при отрицательных значениях j_2 .

Следовательно,

$$\begin{aligned} \bar{\Theta}_{i_1, i_2, j_2 - j_1} M_{i_2, j_2}^{(\rho)} + \bar{\Xi}_{i_1, i_2, j_2 - j_1} M_{i_2, j_2}^{(z)} &= \\ &= A_{i_1, i_2, j_2 - j_1} \bar{M}_{i_2, j_2} \end{aligned} \quad (12)$$

и система уравнений (5) записывается как

$$\begin{aligned} F^{-1}(\bar{M}_{i_1, j_1}) + \bar{M}_{i_1, j_1} &= \\ = \sum_{i_2=0}^{N_\rho-1} \sum_{j_2=1}^{N_z-1} (A_{i_1, i_2, j_2 - j_1} \bar{M}_{i_2, j_2} + \bar{H}_{0i_1, j_1}) \end{aligned} \quad (13)$$

Следует обратить внимание на то, что присутствующее здесь выражение

$$\sum_{i_2=0}^{N_\rho-1} \sum_{j_2=1}^{N_z-1} A_{i_1, i_2, j_2 - j_1} \bar{M}_{i_2, j_2} \quad (14)$$

по индексам i_1 и i_2 формально соответствует умножению на матрицу, а по индексам j_1 и j_2 – линейной свертке. Результат действия на массив **M** по данной схеме обозначим $A \cdot M_j$.

Вводя в рассмотрение нелинейный оператор $M = F(H)$, ставящий в соответствие значениям напряженности поля каждого из элементов разбиения соответствующие значения их намагниченностей и действующий по схеме

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{M}_{N_\rho-1, 0} & \bar{M}_{N_\rho-1, 1} & \dots & \bar{M}_{N_\rho-1, N_z-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{M}_{1, 0} & \bar{M}_{1, 1} & \dots & \bar{M}_{1, N_z-1} \\ \bar{M}_{0, 0} & \bar{M}_{0, 1} & \dots & \bar{M}_{0, N_z-1} \end{bmatrix} &= \\ = \begin{bmatrix} F(\bar{H}_{N_\rho-1, 0}) & F(\bar{H}_{N_\rho-1, 1}) & \dots & F(\bar{H}_{N_\rho-1, N_z-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F(\bar{H}_{1, 0}) & F(\bar{H}_{1, 1}) & \dots & F(\bar{H}_{1, N_z-1}) \\ F(\bar{H}_{0, 0}) & F(\bar{H}_{0, 1}) & \dots & F(\bar{H}_{0, N_z-1}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

а также обозначая $H = F^{-1}(M)$ оператор, в котором используется обратная магнитная характеристика

$$\begin{bmatrix} \bar{H}_{N_\rho-1, 0} & \bar{H}_{N_\rho-1, 1} & \dots & \bar{H}_{N_\rho-1, N_z-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{H}_{1, 0} & \bar{H}_{1, 1} & \dots & \bar{H}_{1, N_z-1} \\ \bar{H}_{0, 0} & \bar{H}_{0, 1} & \dots & \bar{H}_{0, N_z-1} \end{bmatrix} =$$

«ЭЛЕКТРИЧЕСТВО» № 4/2012 Многокритериальный синтез аксиально-симметричных магнитных систем

$$= \begin{bmatrix} F^{-1}(\vec{M}_{1,0}) & F^{-1}(\vec{M}_{1,1}) & \dots & F^{-1}(\vec{M}_{1,N_z-1}) \\ F^{-1}(\vec{M}_{0,0}) & F^{-1}(\vec{M}_{0,1}) & \dots & F^{-1}(\vec{M}_{0,N_z-1}) \end{bmatrix} \quad (16)$$

уравнение (5) можно переписать в виде:

$$\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{M}) + \mathbf{M} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{M} + \mathbf{H}^{(0)} \quad (17)$$

или

$$\mathbf{R}(\mathbf{M}) = \mathbf{0}, \quad (18)$$

где $\mathbf{R}(\mathbf{M}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{M} + \mathbf{H}^{(0)} - \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{M}) - \mathbf{M}$.

Уравнение (18) решается методом Ньютона-GMRES, в котором используется матрица Якоби нелинейного оператора $\mathbf{R}(\mathbf{M})$, имеющая вид

$$\mathbf{W} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{M}} = \mathbf{A} - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{M}) - \mathbf{E}, \quad (19)$$

где \mathbf{J} – матрица Якоби нелинейного оператора $\mathbf{M} = \mathbf{F}(\mathbf{H})$, которая в силу специального вида этого оператора также может быть представлена в виде массива:

$$\mathbf{J}(\mathbf{H}) = \begin{bmatrix} J(\vec{H}_{N_p-1,0}) & J(\vec{H}_{N_p-1,1}) & \dots & J(\vec{H}_{N_p-1,N_z-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ J(\vec{H}_{1,0}) & J(\vec{H}_{1,1}) & \dots & J(\vec{H}_{1,N_z-1}) \\ J(\vec{H}_{0,0}) & J(\vec{H}_{0,1}) & \dots & J(\vec{H}_{0,N_z-1}) \end{bmatrix} \quad (20)$$

Воспользовавшись теоремой о дифференцировании обратной функции, матрицу Якоби оператора $\mathbf{H} = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{M})$ представим в виде массива:

$$\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{M}) = \begin{bmatrix} J^{-1}(F^{-1}(\vec{M}_{N_p-1,0})) \\ \dots \\ J^{-1}(F^{-1}(\vec{M}_{1,0})) \\ J^{-1}(F^{-1}(\vec{M}_{0,0})) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} J^{-1}(F^{-1}(\vec{M}_{N_p-1,1})) & \dots & J^{-1}(F^{-1}(\vec{M}_{N_p-1,N_z-1})) \\ \dots & \dots & \dots \\ J^{-1}(F^{-1}(\vec{M}_{1,0})) & \dots & J^{-1}(F^{-1}(\vec{M}_{1,N_z-1})) \\ J^{-1}(F^{-1}(\vec{M}_{0,1})) & \dots & J^{-1}(F^{-1}(\vec{M}_{0,N_z-1})) \end{bmatrix} \quad (21)$$

В данных выражениях под J понимается матрица Якоби отображения $\vec{M} = F(\vec{H})$, имеющая размеры 2×2 . В предположении однородности и изотропности нелинейных магнитных характеристик

зависимость $\vec{M} = F(\vec{H})$ имеет вид $\vec{M} = \chi(H)\vec{H}$, где $H = \sqrt{H_\rho^2 + H_z^2}$, и, следовательно, если зависимость для $\chi(H)$ задана аналитически, то при вычислении J можно воспользоваться выражением вида

$$J(\vec{H}) = \frac{\partial \vec{M}}{\partial \vec{H}} = \frac{\partial(\chi(H)\vec{H})}{\partial \vec{H}} = \begin{bmatrix} \frac{H_\rho^2}{H} \frac{d\chi}{dH} + \chi(H) & \frac{H_\rho H_z}{H} \frac{d\chi}{dH} \\ \frac{H_z H_\rho}{H} \frac{d\chi}{dH} & \frac{H_z^2}{H} \frac{d\chi}{dH} + \chi(H) \end{bmatrix} \quad (22)$$

В классической схеме метода Ньютона при решении уравнения $\mathbf{R}(\mathbf{M}) = \mathbf{0}$ на каждом шаге итерационного процесса вычисляется матрица Якоби \mathbf{W} и решается система линейных уравнений $\mathbf{W} \cdot \Delta \mathbf{M}_n = \mathbf{R}(\mathbf{M}_n)$, после чего осуществляется корректировка текущего решения по схеме $\mathbf{M}_n = \mathbf{M}_{n-1} - \Delta \mathbf{M}_n$. В методе Ньютона-GMRES $\Delta \mathbf{M}_n$ вычисляется в результате применения метода обобщенных минимальных невязок GMRES, при использовании которого наиболее ресурсоемким является этап построения подпространства Крылова [14]:

$$\mathbf{K}_m(\mathbf{R}(\mathbf{M}_{n-1}), \mathbf{W}) = \text{span}\{\mathbf{R}(\mathbf{M}_{n-1}), \mathbf{W}\mathbf{R}(\mathbf{M}_{n-1}), \mathbf{W}^2\mathbf{R}(\mathbf{M}_{n-1}), \dots, \mathbf{W}^{m-1}\mathbf{R}(\mathbf{M}_{n-1})\}, \quad (23)$$

поскольку при этом необходимо осуществлять многократное умножение на \mathbf{W} . Ускорение этой операции может быть выполнено с использованием ряда алгебраических преобразований и последующего применения быстрого преобразования Фурье (БПФ) [15], для чего линейная свертка в выражении (14) должна быть преобразована в циклическую. Для этого элементы массива \mathbf{A} представляются в виде суммы элементов массивов \mathbf{B} и \mathbf{C} :

$$A_{i_1, i_2, -j_2} = B_{i_1, i_2, -j_2} + C_{i_1, i_2, -j_2}, \quad (24)$$

элементы которых, в свою очередь, при $j_2 \neq 0$ вычисляются по формулам:

$$B_{i_1, i_2, j_2} = \frac{A_{i_1, i_2, -j_2} + A_{i_1, i_2, N_z - j_2}}{2}; \quad (25)$$

$$C_{i_1, i_2, j_2} = \frac{A_{i_1, i_2, -j_2} - A_{i_1, i_2, N_z - j_2}}{2};$$

$$B_{i_1, i_2, 0} = A_{i_1, i_2, 0}, \quad C_{i_1, i_2, 0} = 0 \quad \text{при } j_0 = 0. \quad (26)$$

В результате этого выражение (14) приводится к виду

$$\begin{aligned} & \sum_{i_2=0}^{N_{\rho}-1} \sum_{j_2=1}^{N_z-1} A_{i_1, i_2, j_2-j_1} \bar{M}_{i_2, j_2} = \\ & = \sum_{i_2=0}^{N_{\rho}-1} \sum_{j_2=1}^{N_z-1} B_{i_1, i_2, j_2-j_1} \bar{M}_{i_2, j_2} + \\ & + \sum_{i_2=0}^{N_{\rho}-1} \sum_{j_2=1}^{N_z-1} C_{i_1, i_2, j_2-j_1} \bar{M}_{i_2, j_2}. \end{aligned} \quad (27)$$

В свою очередь, массив **C** преобразуется в массив **C'** по схеме

$$C'_{i_1, i_2, j_2} = \sigma^{-j_2} C_{i_1, i_2, j_2}, \quad (28)$$

где $\sigma = e^{i \frac{\pi}{N_z}}$, $i^2 = -1$.

При вычислении с использованием этих выражений учитывается правило знаков (11). К полученным таким образом массивам применяется алгоритм БПФ по индексу j_2 при всевозможных фиксированных значениях индексов i_1 и i_2 . В результате этого формируются массивы $\hat{\mathbf{B}}$ и $\hat{\mathbf{C}}$ со структурой, аналогичной исходным массивам. Для выполнения операции $\mathbf{A} \cdot \mathbf{M}$ необходимо с использованием алгоритма БПФ получить Фурье-образ массива \mathbf{M} по индексу j_2 , который обозначим $\hat{\mathbf{M}}$, а также аналогичный Фурье-образ массива \mathbf{M}' , элементы которого вычисляются по формуле

$$M'_{i_2, j_2} = \sigma^{-j_2} M_{i_2, j_2}, \quad (29)$$

который обозначим $\hat{\mathbf{M}}$.

С использованием теоремы о свертке Фурье-образ результата операции $\mathbf{H} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{M}$ может быть получен по формуле

$$\hat{H}_{i_1, j_1} = \sum_{i_2=0}^{N_{\rho}-1} \hat{B}_{i_1, i_2, j_1} \hat{M}_{i_2, j_1} + \sigma^{j_1} \sum_{i_2=0}^{N_{\rho}-1} \hat{C}'_{i_1, i_2, j_1} \hat{M}'_{i_2, j_1}, \quad (30)$$

а, следовательно, окончательный результат для \mathbf{H} может быть получен из $\hat{\mathbf{H}}$ в результате применения операции обратного БПФ по индексу j_1 . Таким образом, от двукратного суммирования в формулах (5), (13), (14) удалось перейти к однократному, что с учетом оценки трудоемкости для алгоритма БПФ позволило понизить трудоемкость выполнения операции $\mathbf{A} \cdot \mathbf{M}$ с $\sim N_{\rho}^2 N_z^2$ до $\sim N_{\rho}^2 N_z \log_2 N_z$, что дает существенный выигрыш во времени при больших значениях N_z .

На основании набора значений параметров, характеризующих синтезируемую МС, формируется битовый образ, определяющий геометрическую

конфигурацию входящих в ее состав ферромагнитных элементов

$$\mathbf{Bit} = \begin{bmatrix} b_{N_{\rho}-1,0} & b_{N_{\rho}-1,1} & \dots & b_{N_{\rho}-1,N_z-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{1,0} & b_{1,1} & \dots & b_{1,N_z-1} \\ b_{0,0} & b_{0,1} & \dots & b_{0,N_z-1} \end{bmatrix}, \quad (31)$$

$b_{i_1, j_1} \in \{0,1\}$.

При этом форма ферромагнитных частей МС определяется включением или не включением в их состав элементов разбиения в соответствии с технологией On/Off, как это показано на рис. 1. При построении битового образа используется набор геометрических примитивов, в соответствии с которыми осуществляется его заполнение. При этом форма ферромагнитных элементов формируется в результате объединения некоторой совокупности примитивов, реализуя тем самым требуемую геометрию МС, соответствующую значениям ее конструктивных параметров. Битовый образ ферромагнитных элементов является основной составляющей входной информации для расчета поля и обеспечивает связь между алгоритмом расчета поля и оптимизационным алгоритмом. Значением b_{i_1, j_1} определяется включение слагаемых в выражениях (5), (13) и (14), при этом, если $b_{i_1, j_1} = 0$, то соответствующее значение \bar{M}_{i_1, j_1} также считается равным

нулю, что позволяет игнорировать не вошедшие в состав ферромагнитных деталей элементы разбиений. То же правило соблюдается и при выполнении всех поэлементных арифметических операций с участвующими в расчетах прямоугольными массивами. Битовые образы всех рассматриваемых вариантов МС, возникающие в результате применения алгоритма глобальной оптимизации, относятся к одной и той же регулярной сети, что позволяет при решении системы нелинейных уравнений использовать общий заранее определенный массив \mathbf{A} .

Алгоритм глобальной оптимизации. В задачах параметрического синтеза МС в качестве искомым выступает набор значений конструктивных параметров $\mathbf{x} = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\} \in \mathbf{S} \subset \mathbb{R}^n$, характеризующих геометрию ферромагнитных элементов и катушек с током, а также плотности токов в них. При этом структура системы считается заданной и формируется на предварительной стадии проектирования, число параметров n принимается неизменным. Пространство поиска \mathbf{S} определяется системой ограничений на значения конструктивных параметров, обусловленных выбранной структурой МС. Опыт проведения расчетов показал, что возникающие в задачах синтеза целевые функции

имеют достаточно сложную топографию, являются многоэкстремальными, зачастую имеют многомерный овражный характер и зоны типа плато. Поиск глобального экстремума таких целевых функций детерминированными методами затруднен, и перспективным является использование стохастических алгоритмов, не накладывающих существенных ограничений на вид целевой функции и не требующих вычисления производных. Для решения поставленной задачи авторами разработан гибридный алгоритм, сочетающий в себе элементы двух популярных стохастических алгоритмов – алгоритма оптимизации роем частиц PSO и генетического алгоритма GA [16]. Оба этих подхода относятся к классу бионических мультиагентных методов и предполагают введение в пространстве поиска некоторого набора точек $\mathbf{X}=\{\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(m-1)}\} \subset \mathbf{S}$, положение которых изменяется согласно некоторой стохастической стратегии в зависимости от соответствующих значений целевой функции. В методе PSO [17] с точками (частицами роя) $\mathbf{x}^{(j)}$ ассоциируются их скорости $\mathbf{v}^{(j)}$, множество которых обозначается $\mathbf{V}=\{\mathbf{v}^{(0)}, \mathbf{v}^{(1)}, \dots, \mathbf{v}^{(m-1)}\}$. На каждой итерации алгоритма PSO обновление скоростей происходит по формуле

$$\mathbf{v}^{(j)} = \omega \mathbf{v}^{(j)} + c_1 r_1 (\mathbf{x}_L^{(j)} - \mathbf{x}^{(j)}) + c_2 r_2 (\mathbf{x}_G^{(j)} - \mathbf{x}^{(j)}), \quad (32)$$

где ω – инерционный коэффициент; c_1 – коэффициент, характеризующий индивидуальное поведение частицы; $\mathbf{x}_L^{(j)}$ – лучшее решение, найденное j -й частицей на всей ее траектории движения; c_2 – коэффициент, характеризующий коллективное поведение частицы; $\mathbf{x}_G^{(j)}$ – лучшее решение, найденное частицами, соседними по отношению к j -й, соседство частиц определяется в соответствии с некоторым бинарным отношением на множестве \mathbf{X} , которое может быть задано, например, с использованием бинарной матрицы, изменяющейся по определенным правилам; $r_1, r_2 \in [0,1]$ – случайные числа с равномерным законом распределения. Новое положение частиц определяется в соответствии с формулой

$$\mathbf{x}'^{(j)} = \mathbf{x}^{(j)} + \mathbf{v}'^{(j)}. \quad (33)$$

Таким образом, частицы роя обмениваются информацией о топографии целевой функции и, реализуя парадигму роевого интеллекта, исследуют пространство поиска, перемещаясь и концентрируясь в его наиболее перспективной области, содержащей глобальный экстремум.

В алгоритме GA множество \mathbf{X} рассматривается как популяция, в которой выделяется подмножество \mathbf{X}_{MP} , называемое родительским пулом. На каждом этапе работы генетического алгоритма происходит упорядочение элементов из \mathbf{X} таким образом, что в множестве \mathbf{X}_{MP} оказываются лучшие с точки зрения значения целевой функции его представители. Остальные элементы замещаются элементами, полученными из представителей множества \mathbf{X}_{MP} посредством применения стохастических операторов скрещивания и мутаций, поддерживающих определенный баланс наследственности и изменчивости. Путем многократного повторения описанной последовательности действий организуется эволюционный поиск оптимального решения.

В предложенном авторами гибридном варианте оптимизационного алгоритма в множестве точек \mathbf{X} выделяются два подмножества

$$\mathbf{X}_{MP} \subset \mathbf{X}_{PSO} \subset \mathbf{X}. \quad (34)$$

К частицам роя, принадлежащим множеству \mathbf{X}_{PSO} , определенное число раз применяются правила обновления скоростей и положений (32), (33), после чего проводится упорядочение точек множества \mathbf{X} таким образом, чтобы частицы с меньшим значением целевой функции оказались в подмножестве \mathbf{X}_{PSO} , остальные элементы из \mathbf{X} замещаются результатами применения генетических операторов к элементам подмножества \mathbf{X}_{MP} . При этом также эволюционирует и топология связей между частицами. Процесс повторяется достаточное для нахождения приемлемого решения число раз.

Подробное описание гибридного алгоритма, оценка его эффективности и верификация на многоэкстремальных и овражных функциях приведены в [16]. Там же показано, что число вычислений целевой функции при использовании гибридного алгоритма, необходимое для достижения приемлемого результата, имеет меньшее по сравнению с использованием каждого из алгоритмов PSO и GA в отдельности значение, что является особенно важным в задачах оптимального параметрического синтеза МС. Кроме того, эффективность гибридного алгоритма продемонстрирована при синтезе МС с постоянной намагниченностью ферромагнетика $\bar{M} = \text{const}$ и учете линейной зависимости намагниченности от напряженности поля [18–20].

Выбор целевой функции. При проектировании МС к конструкции предъявляется ряд требований, что обуславливает необходимость решения задачи поиска оптимальных значений ее конструктивных параметров в виде задачи многокритериальной оптимизации. При этом с каждым из предъявляемых требований должна быть ассоциирована некоторая

целевая функция, минимизация или максимизация которой позволяет обеспечить необходимые свойства проектируемой МС. Наиболее строгими являются требования, предъявляемые к распределению поля в рабочем объеме МС. Поскольку контроль распределения поля осуществляется на множестве контрольных точек $\{\Omega_k\}_{k=0}^{K-1} = \{\rho_k, z_k\}_{k=0}^{K-1}$, расположенных в рабочем объеме, то проверка его соответствия некоторой функциональной зависимости по каждой из компонент может быть осуществлена согласно критериям:

$$\begin{aligned} \varphi_H^{(\rho)}(\mathbf{x}) &= \sum_{k=0}^{K-1} \left| H^{(\rho)}(\mathbf{x}, \rho_k, z_k) - H_{\text{req}}^{(\rho)}(\rho_k, z_k) \right|^p \rightarrow \min; \\ \varphi_H^{(z)}(\mathbf{x}) &= \sum_{k=0}^{K-1} \left| H^{(z)}(\mathbf{x}, \rho_k, z_k) - H_{\text{req}}^{(z)}(\rho_k, z_k) \right|^p \rightarrow \min, \end{aligned} \quad (35)$$

где $H^{(\rho)}(\mathbf{x}, \rho_k, z_k)$ и $H^{(z)}(\mathbf{x}, \rho_k, z_k)$ – значения напряженности магнитного поля, полученные на основании численного расчета и зависящие от набора значений конструктивных параметров \mathbf{x} ; $H_{\text{req}}^{(\rho)}(\rho_k, z_k)$ и $H_{\text{req}}^{(z)}(\rho_k, z_k)$ – требуемое распределение напряженности поля в рабочем объеме, заданное аналитически либо таблично и выбор которого осуществляется индивидуально для каждого конкретного случая в зависимости от функционального назначения проектируемой МС; p – вещественный положительный показатель степени.

В случае реализации заданного распределения поля по обеим составляющим удобно воспользоваться объединенным критерием $\varphi_H(\mathbf{x}) = \varphi_H^{(\rho)}(\mathbf{x}) + \varphi_H^{(z)}(\mathbf{x})$. При этом необходимым условием физической реализуемости требуемого закона распределения напряженности поля \vec{H}_{req} в рабочем объеме, не содержащем ферромагнетиков или проводников с током, является выполнение для него фундаментальных соотношений $\text{rot} \vec{H}_{\text{req}}$ и $\text{div} \vec{H}_{\text{req}}$. Однако указание достаточных условий существования или единственности решения обратной задачи создания поля требуемой конфигурации ввиду значительной сложности является затруднительным и в подавляющем большинстве случаев задача нахождения значений конструктивных параметров, при которых в рабочем объеме МС реализуется \vec{H}_{req} , относится к некорректно поставленным. Поэтому при проектировании МС осуществляется поиск псевдорешения.

В функциональные зависимости $H_{\text{req}}^{(\rho)}(\rho, z)$ и $H_{\text{req}}^{(z)}(\rho, z)$ могут быть введены параметры, значения которых определяются на основании результатов

численного расчета напряженности поля в рабочем объеме. Например, в случае необходимости обеспечения для аксиальной составляющей напряженности поля в цилиндрическом рабочем объеме линейного закона изменения вдоль оси z на основании численного анализа проводится оценка градиента согласно выражению

$$g = \frac{H_2 - H_1}{z_2 - z_1}, \quad (36)$$

где H_2 и H_1 – значения аксиальных составляющих напряженности поля в центральных точках торцевых поверхностей рабочего объема, определяемые численно; z_1 и z_2 – соответствующие значения координаты вдоль оси z .

Тогда для линейного распределения напряженности поля можно записать выражение

$$\begin{aligned} H_{\text{req}}^{(z)}(\rho, z) &= g(z - z_1) + H_1 = \\ &= \frac{H_2 - H_1}{z_2 - z_1}(z - z_1) + H_1, \quad z \in [z_1, z_2], \end{aligned} \quad (37)$$

и в случае, когда необходимо обеспечить максимальное значение градиента напряженности поля, вводится дополнительный критерий

$$\varphi_g(\mathbf{x}) = |g| = \left| \frac{H_2 - H_1}{z_2 - z_1} \right| \rightarrow \max. \quad (38)$$

Во многих устройствах, в которых используется пондеромоторное действие магнитного поля, требуется обеспечить в рабочем объеме постоянство величины $H^{(z)} \frac{\partial}{\partial z} H^{(z)}$ и условия $\frac{\partial}{\partial \rho} H^{(z)} = 0$. В этом случае теоретическое распределение напряженности поля описывается зависимостью

$$H_{\text{req}}^{(z)}(\rho, z) = \sqrt{Az + B}, \quad (39)$$

где $A = \frac{H_2^2 - H_1^2}{z_2 - z_1}$ и $B = \frac{H_1^2 z_2 - H_2^2 z_1}{z_2 - z_1}$ – параметры

H_1 , H_2 и z_1 , z_2 (они определяются так же, как и в предыдущем случае); при этом величина $H^{(z)} \frac{\partial}{\partial z} H^{(z)} = \frac{A}{2}$ может выступать в качестве оптимизируемого критерия.

Также возможным является введение критериев, связанных с максимизацией значения напряженности магнитного поля в отдельных контрольных точках рабочего объема, например в его центре:

$$\varphi_c(\mathbf{x}) = \left| H_c^{(\rho)} \right| \rightarrow \max. \quad (40)$$

Для снижения материалоемкости существенное значение имеет минимизация объема, занимаемого ферромагнитными элементами МС, в соответствии с критерием

$$\varphi_V(\mathbf{x}) = \frac{V - V_{\min}}{V_{\max} - V_{\min}} \rightarrow \min, \quad (41)$$

где V – текущий объем, занимаемый ферромагнитными частями магнитной системы; V_{\min} и V_{\max} – его возможные минимальное и максимальное значения соответственно.

Решение задачи векторной оптимизации осуществляется путем скаляризации ее целевой функции в результате агрегирования отдельных критериев [21, 22], например,

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{\varphi_H^\alpha(\mathbf{x})\varphi_V^\beta(\mathbf{x})}{\varphi_g^\gamma(\mathbf{x})\varphi_c^\delta(\mathbf{x})} \rightarrow \min, \quad (42)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – показатели степени, определяющие приоритет частных критериев, значения которых выбираются в соответствии с условиями решаемой задачи. Таким образом, аналогично может быть построена целевая функция с необходимым числом частных критериев.

Верификация программного обеспечения. Проверка корректности результатов анализа поля, полученных с использованием разработанного программного обеспечения, проводилась для случая расчета поля как в объеме ферромагнетика, так и в окружающем его пространстве путем сопоставления результатов численного моделирования с аналитическими и эмпирическими зависимостями. Расчет поля в объеме ферромагнитного тела проводился на примере намагничивания цилиндрического образца однородным магнитным полем напряженностью $H_0 = 1$ кА/м, направленным вдоль его оси (см. рис. 3, а). Образец имел диаметр $d = 5$ мм и длину $2l = 100$ мм. При численном моделировании объем тела разбивался на кольцевые элементы с шагом дискретизации 0,5 мм по осям r и z . Для тела данной формы известна полуэмпирическая формула Розенблата [23], позволяющая рассчитать его центральный коэффициент размагничивания

$$N_{\text{ц}} = \frac{d^2}{4l^2} \left(\ln \frac{2,4l}{d} - 1 \right) \quad (43)$$

Формула получена в предположении, что материал стержня обладает бесконечно большой магнитной проницаемостью ($\mu \rightarrow \infty$) и отношение длины к диаметру образца $2l/d \gg 1$. Погрешность расчета центрального коэффициента размагничивания по данной зависимости не превышает 3–4 %. Тогда напряженность магнитного поля в центре цилинд-

рического образца может быть вычислена по формуле

$$H_{\text{ц}} = \frac{H_0}{1 + \chi N_{\text{ц}}}, \quad (44)$$

где $\chi = \mu - 1$ – магнитная восприимчивость материала образца.

Распределение напряженности поля вдоль его оси описывается приближенной зависимостью

$$H_z = H_{\text{ц}} \left(1 - C \left(\frac{z}{l} - 1 \right)^2 \right) \quad (45)$$

где постоянная величина $C = 0,8$, а значение координаты $z \in [0, 2l]$.

Численный эксперимент с учетом линейной зависимости магнитных характеристик показал, что при $\chi = 1000$ рассчитанное значение напряженности поля в центре стержня отличается от полученного по формуле (44) на 2,8%. Дальнейшее увеличение

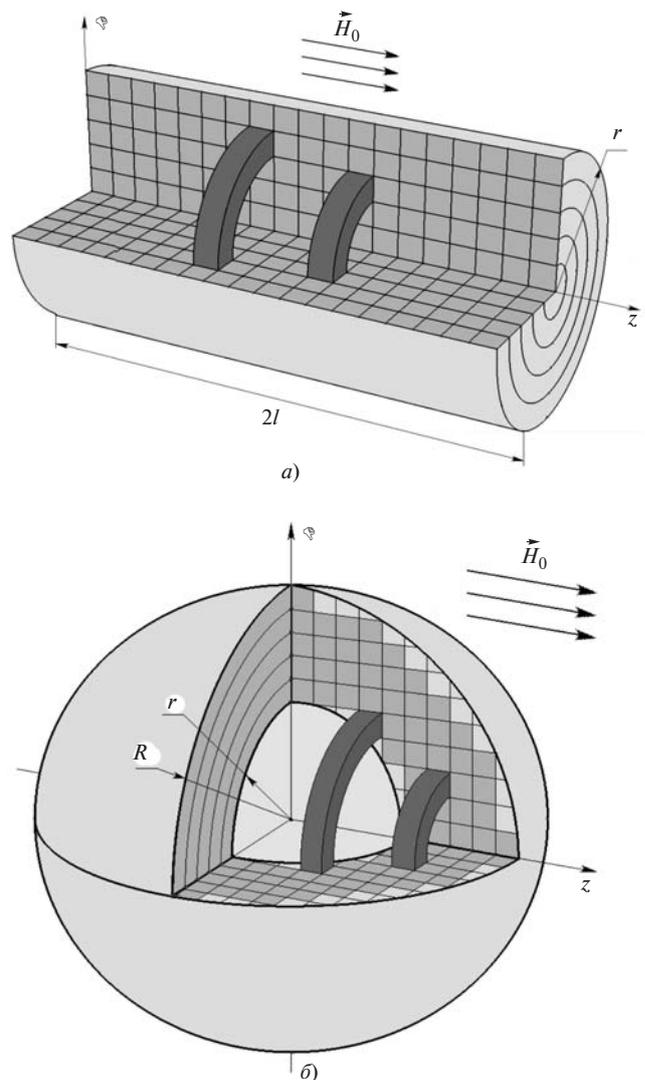


Рис. 3. Геометрические модели анализируемых объектов: а – цилиндрический образец; б – сферический экран

значения магнитной восприимчивости до $\chi=10000$ приводит к погрешности, не превосходящей 0,9%. Результаты численного и аналитического расчетов распределения напряженности магнитного поля вдоль оси образца представлены на рис. 4.

При моделировании также проводилась оценка машинного времени, затрачиваемого на расчет распределения намагниченности в ферромагнитном образце при использовании ускоренных матрично-векторных операций для различных значений

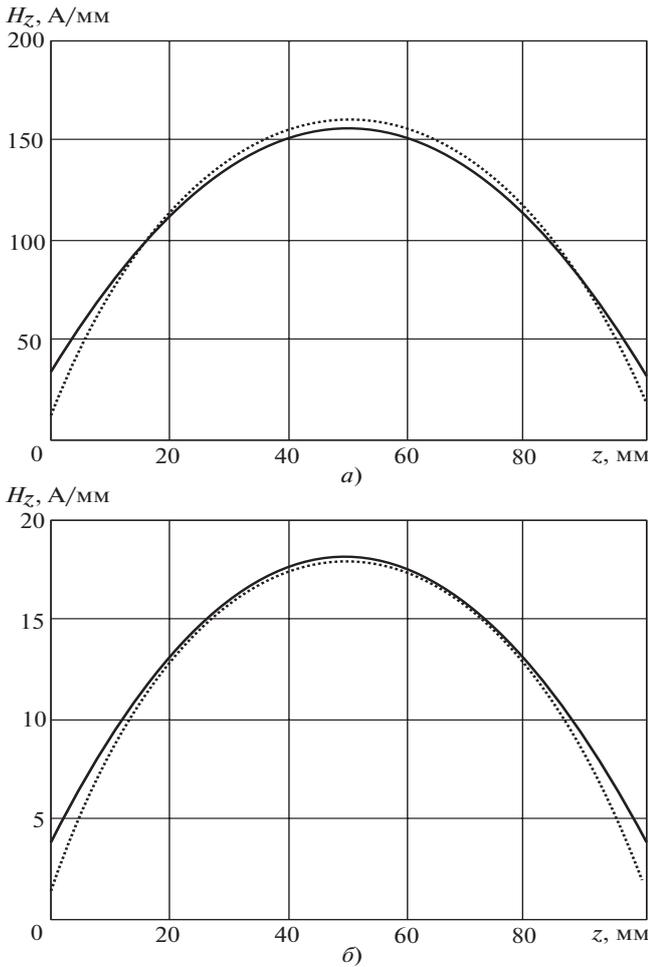


Рис. 4. Распределение напряженности магнитного поля вдоль оси образца: а – $\chi=1000$; б – 10000; — — аналитический; — численные расчеты

шага дискретизации. Результаты оценки времени проиллюстрированы на рис. 5, из которого видно, что применение ускоренного умножения матрицы на вектор с использованием БПФ снижает время, затрачиваемое на решение системы линейных уравнений. Выигрыш времени счета становится особенно заметным при уменьшении шага дискретизации.

Для случая расчета поля вне объема, заполненного ферромагнетиком, верификация осуществлялась на модельном примере, где в качестве объекта использовался сферический экран, помещенный в

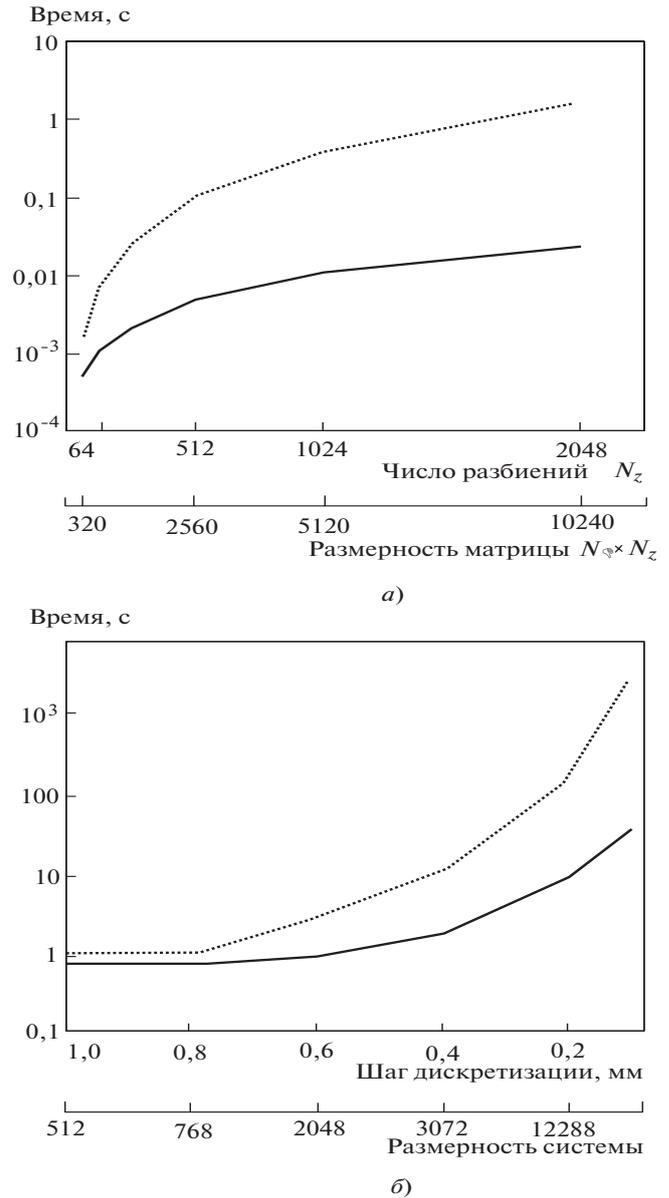


Рис. 5. Оценка машинного времени выполнения матрично-векторных операций: а – матрично-векторное умножение; б – время решения СЛАУ; обычное (.....); ускоренное (—)

однородное магнитное поле \vec{H}_0 (см. рис. 3,б). При этом поле внутри полости экрана в линейном случае, как известно [24], является однородным и имеет напряженность, которую можно вычислить по формуле

$$\vec{H} = \frac{\vec{H}_0}{1 + \frac{2}{\chi} \left(1 - \frac{r^3}{R^3} \right) \left(\frac{1}{\chi} + \chi - 1 \right)}, \quad (46)$$

где R – радиус экрана, r – радиус полости.

Внешний радиус экрана принимался равным $R=100$ мм, внутренний $r=75$ мм. Напряженность внешнего магнитного поля составляла $H_0=1$ кА/м. Стенки экрана разбивались с шагом 0,5 мм на 27 494 кольцевых элемента. Расчет поля проводил-

ся в центре экрана, а также в ряде контрольных точек, расположенных в полости экрана на расстоянии $0,5R$ от его центра. При данных значениях параметров максимальное расхождение численного и аналитического решений при $\chi=100$ составило 5,1%. При более мелком разбиении с шагом 0,33 мм, содержащем 61862 элемента и позволяющем более точно описать геометрию экрана, расхождение с аналитическим решением не превышало 3,4%. Погрешность однородности поля в полости экрана для численного примера не превышала 1,1%.

Таким образом, результаты верификации подтверждают адекватность разработанных математической и информационной моделей.

Примеры оптимального синтеза МС. В качестве первого модельного примера использования разработанного метода рассмотрим синтез аксиально-симметричной МС, предназначенной для создания в рабочем объеме магнитного поля с постоянным значением аксиальной составляющей градиента напряженности $\text{grad}H_z = \text{const}$. Во всех рассматриваемых модельных примерах полюсные наконечники представлялись совокупностью из трех полюсных ферромагнитных элементов, варьированием радиусов ρ и высот h которых обеспечивалось априори заданное распределение напряженности поля. Рабочий объем Ω имел форму цилиндра диаметром $d=10$ мм и длиной $2l=10$ мм, контрольные точки в котором располагались регулярно с шагом 1 мм по обеим координатным осям. Общая длина МС составляла $L=100$ мм, внешний радиус $R=30$ мм, а толщина стенки $D=5$ мм. Размеры и расположение катушек при проведении синтеза оставались неизменными, их длина выбиралась равной $L_c=15$ мм, внутренний и внешний радиусы составляли $R_1=10$ мм и $R_2=20$ мм соответственно; плотность тока в катушках была 2 А/мм². При расчете напряженности магнитного поля учитывалась нелинейная магнитная характеристика ферромагнетика, задаваемая соотношением (4), в котором начальное значение $\lambda=0,95$, $\bar{\chi}=100$. Зависимость $F(H)$ описывалась аналитически уравнением [25]:

$$F^*(H) = \chi_H \frac{H_{cs}^2 H}{H^2 + H_{cs}^2} + \frac{M_s}{\pi} \frac{H^2}{H^2 + \alpha H_{cs}^2} \times \left(\arctg \frac{H_{cs} + H}{H_0} - \arctg \frac{H_{cs} - H}{H_0} \right) \quad (48)$$

где $\alpha = \frac{M_s \arctg \frac{2H_{cs}}{H_0}}{\pi \left(M_c - \frac{\chi_H H_{cs}}{2} \right)} - 1$; $H_0 = \frac{H_{cs}}{\text{tg} \frac{\pi M_{rs}}{2M_s}}$, со следующими значениями параметров, зависящими от ма-

териала ферромагнетика: $H_{cs} = 760$ А/м, $M_s = 1,72 \times 10^6$ А/м, $M_{rs} = 0,97 \times 10^6$ А/м, $M_c = 0,48 \times 10^6$ А/м, $\chi_H = 89$.

Для аппроксимации ферромагнитных элементов в расчетной области $R \times L$ вводилась регулярная сеть с шагом 1 мм по осям ρ и z . При этом общее число элементов разбиения системы составляло порядка трех тысяч. На значения параметров полюсных элементов накладывались следующие ограничения:

$$\begin{aligned} h_{\min} &\leq h_i \leq h_{\max}, \quad i = \overline{1,6}; \\ 0 &\leq \rho_1 \leq \rho_2 \leq \rho_3 \leq R_{\max}; \\ 0 &\leq \rho_4 \leq \rho_5 \leq \rho_6 \leq R_{\max}, \end{aligned} \quad (49)$$

где $h_{\min} = 25$ мм, $h_{\max} = 42$ мм, $R_{\max} = 20$ мм.

В качестве целевой функции, позволяющей оценить постоянство градиента напряженности магнитного поля в рабочем объеме системы, использовалась функция, задаваемая соотношением (42). При этом весовые коэффициенты выбирались равными $\alpha = \gamma = \delta = 1$, $\beta = 0,5$; показатель степени в выражении (35) принимался равным $p=2$, при этом требуемое линейное распределение аксиальной составляющей напряженности магнитного поля вдоль оси МС задавалось соотношением (37). В результате синтеза оптимальных значений параметров МС, обеспечивающих требуемое распределение поля в ее рабочем объеме ($\text{grad}H_z = \text{const}$), было получено:

для левого полюсного наконечника:

$$h_1 = 28 \text{ мм}, \rho_1 = 2 \text{ мм}; h_2 = 30 \text{ мм}, \rho_2 = 16 \text{ мм};$$

$$h_3 = 42 \text{ мм}, \rho_3 = 18 \text{ мм};$$

для правого полюсного наконечника:

$$h_4 = 40 \text{ мм}, \rho_4 = 12 \text{ мм}; h_5 = 33 \text{ мм}, \rho_5 = 17 \text{ мм};$$

$$h_6 = 36 \text{ мм}; \rho_6 = 18 \text{ мм}.$$

При этом относительная погрешность воспроизведения заданного распределения магнитного поля не превышала $\epsilon = 0,34\%$, а само значение градиента напряженности поля составляло $\text{grad}H_z = 407$ А/м/мм. Графики распределения магнитного поля, а также погрешности синтеза поля в рабочем объеме показаны на рис. 6. Внешний вид синтезированных полюсных наконечников проиллюстрирован на рис. 7,а.

В качестве второго примера синтеза рассмотрим задачу поиска оптимальных значений параметров полюсных наконечников МС, обеспечивающих постоянство в рабочем объеме значения $H_z \text{grad}H_z$. Решение искалось при тех же ограничениях, магнитной характеристике ферромагнетика и геометрии МС, как и в первом примере. Требуемое распределение поля задавалось соотношением (39). В результате синтеза численные решения для этого примера были следующие:

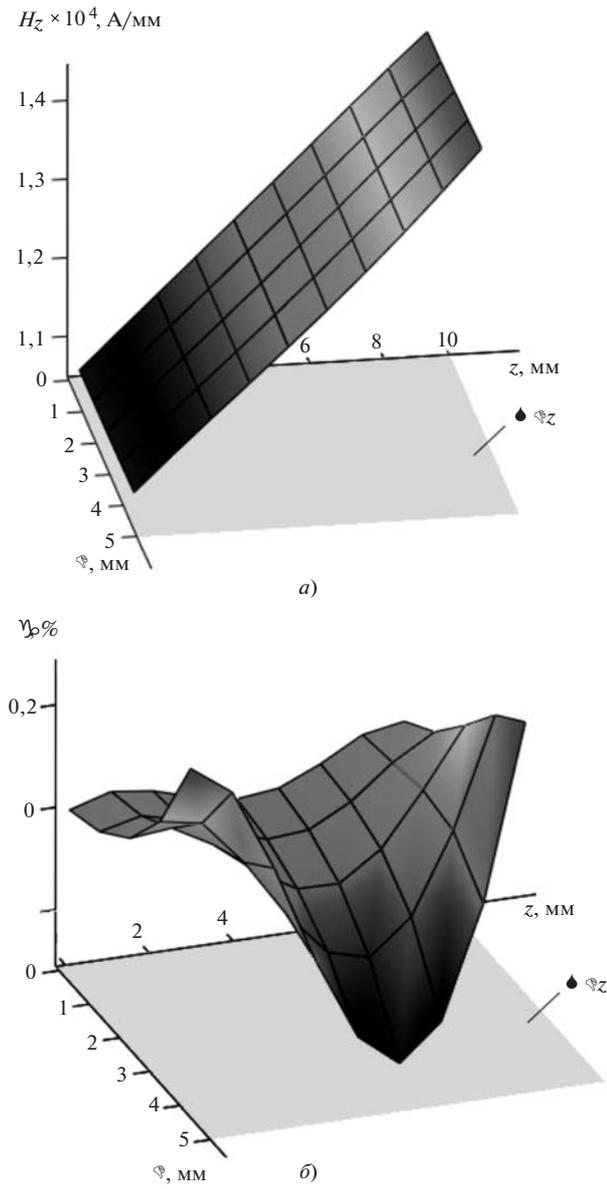


Рис. 6. Результаты синтеза напряженности поля с постоянным градиентом: *a* – синтезированное распределение поля и *б* – погрешность синтеза

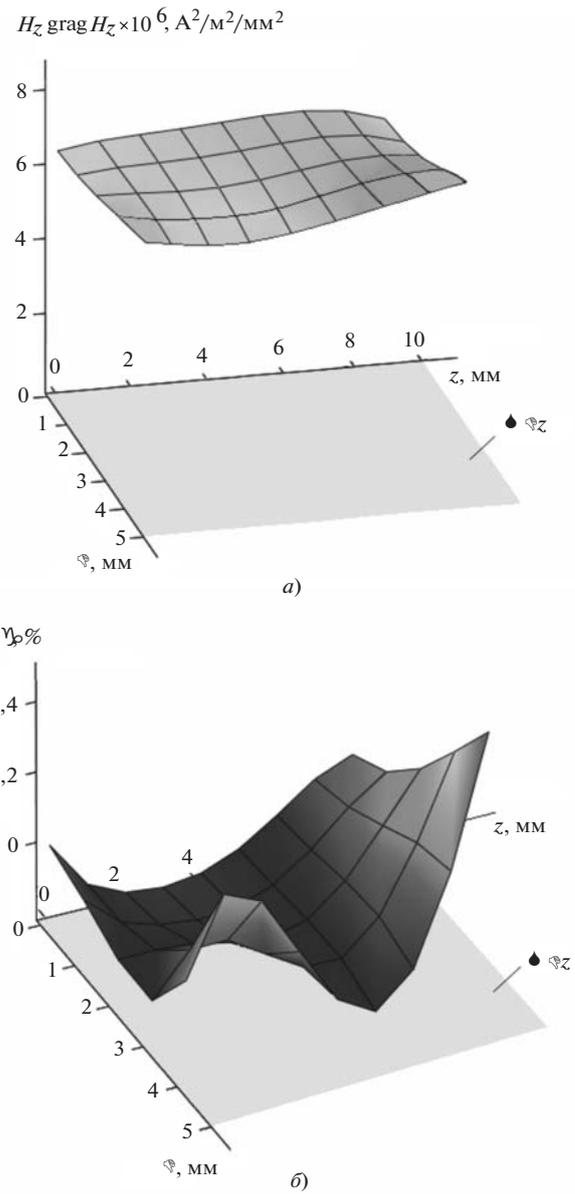


Рис. 8. Результаты синтеза распределения $H_z grad H_z$ в рабочем объеме (*a*) и погрешность синтеза (*б*)

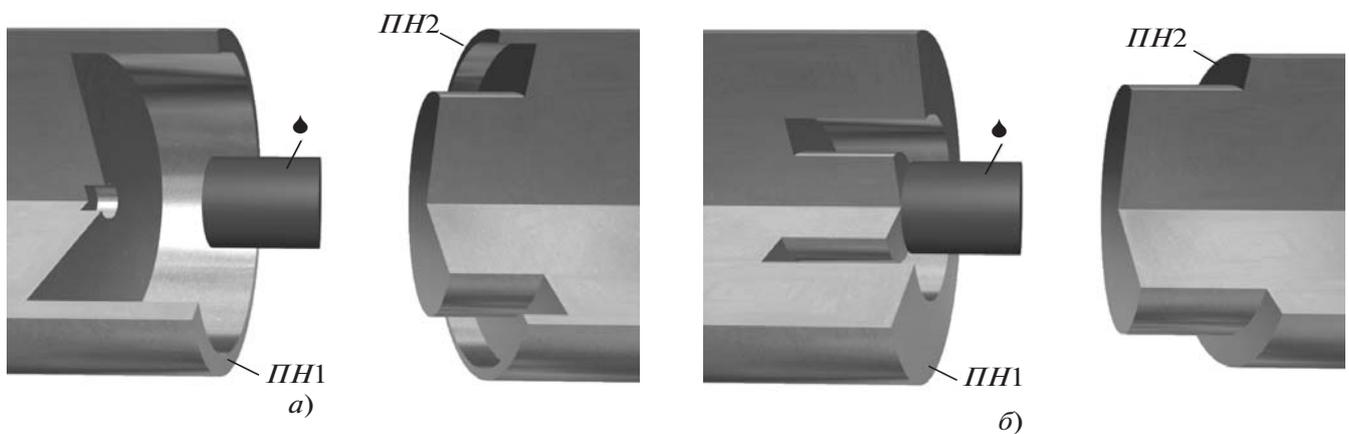


Рис. 7. 3D-CAD модели синтезированных полюсных наконечников: *a* – первый пример; *б* – второй пример

для левого полюсного наконечника: $h_1=39$ мм, $\rho_1=6$ мм; $h_2=30$ мм, $\rho_2=10$ мм; $h_3=42$ мм, $\rho_3=18$ мм;

для правого полюсного наконечника: $h_4=25$ мм, $\rho_4=0$ мм; $h_5=41$ мм, $\rho_5=13$ мм; $h_6=32$ мм, $\rho_6=16$ мм.

Полученные значения параметров полюсных наконечников обеспечивают в рабочем объеме постоянство значения $H_z \text{grad} H_z = 6 \cdot 10^6 \text{ A}^2/\text{м}^2/\text{мм}$ с погрешностью не более $\varepsilon=0,57\%$. Отметим, что у одного из полюсных элементов правого полюсного наконечника радиус $\rho_4=0$, т.е. для обеспечения требуемого распределения поля достаточно использовать два цилиндрических выступа. Распределение значения $H_z \text{grad} H_z$ и относительной погрешности воспроизведения поля в рабочем объеме МС, а также внешний вид полюсных наконечников проиллюстрированы на рис. 7,б и 8. Отклонение радиальной составляющей напряженности магнитного поля от нуля в этом и предыдущем примере не превышало 10%.

Приведенные примеры показывают высокую эффективность разработанного метода синтеза и реализующего его программного обеспечения, которые позволяют обеспечивать как однородное распределение поля, так и распределения более сложного вида.

Выводы. 1. Разработан эффективный метод многокритериального оптимального параметрического синтеза аксиально-симметричных магнитных систем с ферромагнитными элементами, позволяющий обеспечить заданную конфигурацию магнитного поля в рабочем объеме проектируемого устройства.

2. Гармоничное сочетание в рамках метода аппарата пространственных интегральных уравнений, глобального алгоритма оптимизации рою частиц с эволюционным формированием состава роя, технологии On/Off, метода Ньютона-GMRES решения систем нелинейных уравнений большого порядка с ускоренными операциями матрично-векторного умножения, метода продолжения по параметру, а также учет трансляционной симметрии позволили организовать процесс синтеза с минимальными требованиями к вычислительным ресурсам.

3. Применение разработанного метода позволило обеспечить требуемое распределение напряженности магнитного поля в рабочем объеме магнитной системы с погрешностью, не превосходящей $\varepsilon=0,34\%$ для случая поля, изменяющегося по линейному закону, и $\varepsilon=0,57\%$ для случая распределения поля с постоянным значением $H \text{grad} H$.

1. Карасик В.Р. Физика и техника сильных магнитных полей. — М.: Наука, 1964.

2. Чечерников В.И. Магнитные измерения. — М.: Изд-во МГУ, 1969.

3. Жидков Е.И., Рыльцов В.В., Юлдашев О.И., Юлдашева М.Б. Численное решение задачи формирования однородного магнитного поля за счет изменения занимаемого ферромагнетиком объема для некоторых магнитных систем экспериментальной физики. — Вестник РУДН. Физика, 2004, № 12.

4. Korovkin N.V., Chechurin V.L., Hayakawa M. Inverse Problems in Electric Circuits and Electromagnetics. — New York: Springer Science+Business Media LLC, 2007.

5. Ryu J.S., Yao Y., Koh C.S., Shin Y.J. 3-D optimal shape design of pole piece in permanent magnet MPI using parameterized nonlinear design sensitivity analysis. — IEEE Trans. Magn., 2006, vol. 42, No 4.

6. Богданов П.В., Кухтин В.П., Ламзин Е.А., и др. Особенности конструирования магнитных систем ряда современных компактных изохронных циклотронов с использованием методов математического моделирования. — Журнал технической физики, 2010, т. 80, № 9.

7. Курбатов П.А., Кузнецова Е.А., Кулаев Ю.В. Проектирование систем с постоянными магнитами открытого типа для магниторезонансных томографов. — Электричество, 2007, №7.

8. Дергачев П.А. Синтез оптимальных структур источников магнитного поля электротехнических устройств: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. — М.: МЭИ (ТУ), 2010.

9. Тозони О.В., Маергойз И.Д. Расчет трехмерных электромагнитных полей. — Киев: Техника, 1974.

10. Маергойз И.Д. Итерационные методы расчета статических полей в неоднородных, анизотропных и нелинейных средах. — Киев: Наукова думка, 1979.

11. Курбатов П.А., Аринчин С.А. Численный расчет электромагнитных полей. — М.: Энергоатомиздат, 1984.

12. Гальченко В.Я., Остапушенко Д.Л. Численный анализ пространственной конфигурации магнитных полей объектов сложной геометрической формы с учетом нелинейных характеристик веществ. — Информационные технологии, 2008, №8.

13. Гальченко В.Я., Остапушенко Д.Л., Воробьев М.А. Компьютерный анализ конфигурации магнитных полей подповерхностных дефектов сплошности конечных размеров и произвольной формы в объектах контроля ограниченной протяженности методом пространственных интегральных уравнений. — Дефектоскопия, 2009, № 5.

14. Saad Y. Iterative methods for sparse linear systems. — Philadelphia: PWS Publishing Company, 2003.

15. Huckle T. Circulant and skewcirculant matrices for solving toeplitz matrix problems. — SIAM J. Matrix Anal. Appl., 1992, vol. 13, № 3.

16. Гальченко В.Я., Якимов А.Н., Остапушенко Д.Л. Поиск глобального оптимума функций с использованием гибрида мультиагентной роевой оптимизации с эволюционным формированием состава популяции. — Информационные технологии, 2010, № 10.

17. Kennedy J., Eberhart R. Particle swarm optimization. — Proc. of the IEEE Intern. Conf. on Neural Networks, Perth (Australia). — IEEE Service Center, Piscataway, NJ, 1995 5(3).

18. Гальченко В.Я., Якимов А.Н., Остапушенко Д.Л. Параметрический синтез формы аксиально-симметричных полюсов электромагнита для создания однородного магнитного поля. — Электротехника і електромеханіка. 2010, № 2: http://www.nbu.gov.ua/portal/natural/eie/2010_2/10.pdf

19. Гальченко В.Я., Якимов А.Н. Оптимальное конструирование электромагнитов с коническими полюсами для генерации высокооднородного магнитного поля. — Электронное моделирование. 2010, т. 32, №6: <http://www.nbu.gov.ua/portal/natural/em/texts.html>.

20. Гальченко В.Я., Якимов А.Н., Остапушенко Д.Л. Использование метода граничных интегральных уравне-

ний в оптимальном 3-D проектировании осесимметричных электромагнитов с выбором формы полюсных наконечников. – Електротехніка і електромеханіка. 2010, № 6: <http://www.nbuiv.gov.ua/portal/natural/eie/texts.html>.

21. **Батищев Д.И., Шапошников Д.Е.** Многокритериальный выбор с учетом индивидуальных предпочтений. – Нижний Новгород: ИПФ РАН, 1994.

22. **Воронін А.М. Зіатдінов Ю.К., Козлов О.І., Чабанюк В.С.** Векторна оптимізація динамічних систем. – Техніка, 1999.

23. **Афанасьев Ю.В.** Феррозондовые приборы. – Л.: Энергоатомиздат, 1986.

24. **Нейман Л.Р., Демирчян К.С.** Теоретические основы электротехники. – М.: Энергия, 1967, т. 2.

25. **Мельгуй М.А.** Формулы для описания нелинейных и гистерезисных свойств ферромагнетиков. – Дефектоскопия, 1987, №11.

[12.04.11]

Авторы: Гальченко Владимир Яковлевич окончил в 1982 г. Ворошиловградский машиностроительный институт. В 1999 г. защитил докторскую диссертацию по специальности «Приборы и методы контроля» в Харьковском государственном политехническом университете. Профессор, заведующий кафедрой «Медицинская и биологическая физика, медицинская информатика, биостатистика» ГУ «Луганский государственный медицинский университет» (ЛГМУ).

Якимов Александр Николаевич окончил в 2004 г. Восточноукраинский национальный университет им. В. Даля и в 2010 г. Луганский национальный университет им. Т. Шевченко. Преподаватель кафедры «Медицинская и биологическая физика, медицинская информатика, биостатистика» ГУ ЛГМУ.

Остапущенко Дмитрий Леонидович окончил в 2005 г. Восточноукраинский национальный университет им. В. Даля. В 2010 г. защитил кандидатскую диссертацию по специальности «Приборы и методы контроля и определения состава веществ» в Национальном техническом университете «Харьковский политехнический институт». Старший преподаватель кафедры «Медицинская и биологическая физика, медицинская информатика, биостатистика» ГУ ЛГМУ.