

# Аномалии поверхностного эффекта в цилиндрических образцах, помещенных в однородное переменное поле

САНДОВСКИЙ В.А.

Экспериментальным и расчетным путем исследуются аномальные явления в образцах цилиндрической формы, помещенных в однородное переменное поле, создаваемое в соленоиде. Результаты измерения и расчетов сопоставлены на соответствующих графиках в виде годографов. Отмечены существенные расхождения между расчетными и экспериментальными графиками, которые наблюдаются во всем частотном диапазоне; степень расхождений зависит от диаметра, удельной электрической проводимости образцов, а также частоты переменного поля. Предложен способ количественной оценки степени аномальных отклонений. Для объяснения аномалий используется математическое моделирование перераспределения плотности вихревых токов в образцах.

Ключевые слова: немагнитный материал, цилиндрический образец, переменное поле, поверхностный эффект

Поверхностный эффект заключается в том, что напряженность магнитного поля и плотность вихревых токов в цилиндрических образцах из немагнитных материалов распределяются неравномерно по сечению, а смещаются к периферии в зависимости от условий эксперимента. Так, указанный эффект проявляется тем сильнее, чем больше радиус цилиндра, удельная электрическая проводимость его материала и частота переменного поля. Поверхностный эффект в цилиндрических образцах, помещенных в однородное переменное поле, описывается с помощью математической модели [1–3].

Цель статьи – изучение зависимостей аномальных несоответствий данных, рассчитанных по известным формулам [1–3] и полученных в результате экспериментальных измерений, что существенно сдерживает использование электродинамических методов для контроля и диагностики металлических материалов и изделий. Полученные нами результаты исследований позволяют определить пределы ограничений по использованию расчетных формул для решения определенных практических задач, а также наметить пути совершенствования расчетных моделей. Для этой цели были рассмотрены процессы перераспределения плотности вихревых токов в образцах с применением математического моделирования.

*Abnormal phenomena arising in cylindrical samples placed in a uniform alternating field created in a solenoid are studied by experiment and calculation. The results of measurements and calculations are compared on the appropriate graphs in the form of loci. Essential mismatches between the calculated and experimental data in the entire frequency band are pointed out. The degree of mismatch depends on the diameter, electrical conductivity of samples, and frequency of alternating field. A method for quantitatively estimating the degree of abnormal mismatches is proposed. Mathematical simulation of redistribution of eddy currents in samples is used for explaining the abnormalities.*

Key words: nonmagnetic material, cylindrical probe, alternating field, skin effect

## Структурная схема экспериментальной установки.

Исследования проводились на установке, структурная схема которой показана на рис. 1. Измерительную катушку 2 надевают на исследуемый образец 3, затем образец вместе с измерительной катушкой помещают в соленоид 1. Внутри соленоида создается однородное переменное поле. Соленоид питается от генератора 2 и через усилитель 5. Вольтметр 6 вместе с резистором 7 служит для контроля за током соленоида. Частотомер 8 измеряет частоту генератора 4. Вольтметр 9 служит для измерения амплитуды напряжения измерительной катушки 2, а фазометр 10 используется для измерения фазы сигнала этой катушки. Для большей общности результатов исследований изучается относительный сигнал измерительной катушки  $U_{\text{отн}} = U_1/U_2$ , где  $U_1$  – измеряемый вольтметром 9 сигнал катушки 2 при установке в нее образца 3;  $U_2$  – измеряемый этим же вольтметром сигнал катушки 2 при отсутствии в ней образца.

**Математическая модель для проводящего цилиндра.** Такая модель [1–3] для описания относительного сигнала измерительной катушки задается следующим выражением:

$$U_{\text{отн}} = \frac{\dot{e}}{\ddot{e}} \left( 1 + h^2 \frac{m_1^2(b,r)}{b r I_0(b r)} \right) \cdot \frac{\ddot{u}}{1 \frac{\ddot{u}}{\ddot{u}}} \quad t = \sqrt{j}; \quad j = \sqrt{-1}, \quad (1)$$

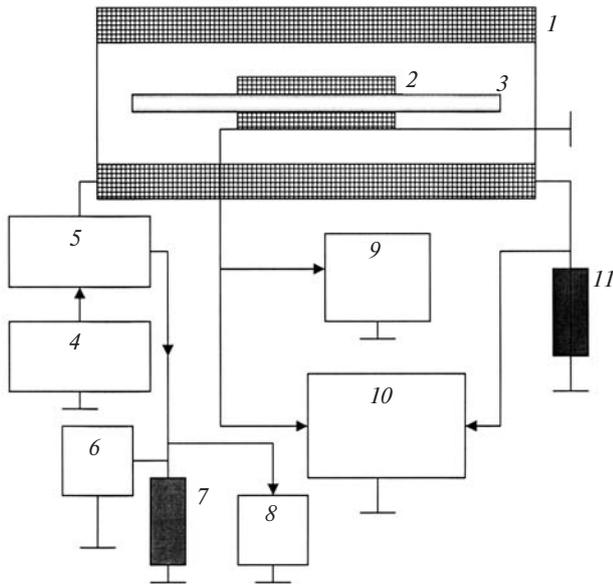


Рис. 1. Структурная схема измерительной установки

где  $U_{\text{отн}}$  – отношение амплитуд сигналов измерительной катушки в присутствии и отсутствии в ней образца;  $h = R/R_1$  ( $R$  – радиус исследуемого образца;  $R_1$  – радиус полости измерительной катушки);  $m$  – магнитная проницаемость материала; обобщенный вихрековый параметр

$$b = R\sqrt{2p/f\mu_0 s} \quad (2)$$

( $f$  – частота генератора;  $\mu_0$  – магнитная постоянная;  $s$  – удельная электрическая проводимость материала образца);  $I_0$ ,  $I_1$  – модифицированные функции Бесселя нулевого и первого порядка.

**Образцы для исследования.** Для исследования были подготовлены цилиндрические образцы длиной 180 мм различных диаметров из разных немагнитных материалов. Ниже указаны диаметры и значения электрической проводимости образцов, измеренные мостовым методом на постоянном токе (обозначено: Л – латунь, Д – дюралюминий, М – медь, А – алюминий, Б – бронза):

**Результаты эксперимента.** Эти результаты в виде годографов, полученных экспериментальным путем

$D$ , мм	8	8	8	10	10	10	10	10	12	12	12	15	15	15
Материал	Л	Л	Д	М	Д	А	Б	Л	А	М	Л	Б	А	Б
$s$ , МСм/м	13,2	15,3	13,4	53,1	15,6	34,2	14,3	13,8	33,6	61,8	13,4	66,2	36,2	5,1

и рассчитанных по модели (1)–(2), показаны на рис. 2–6.

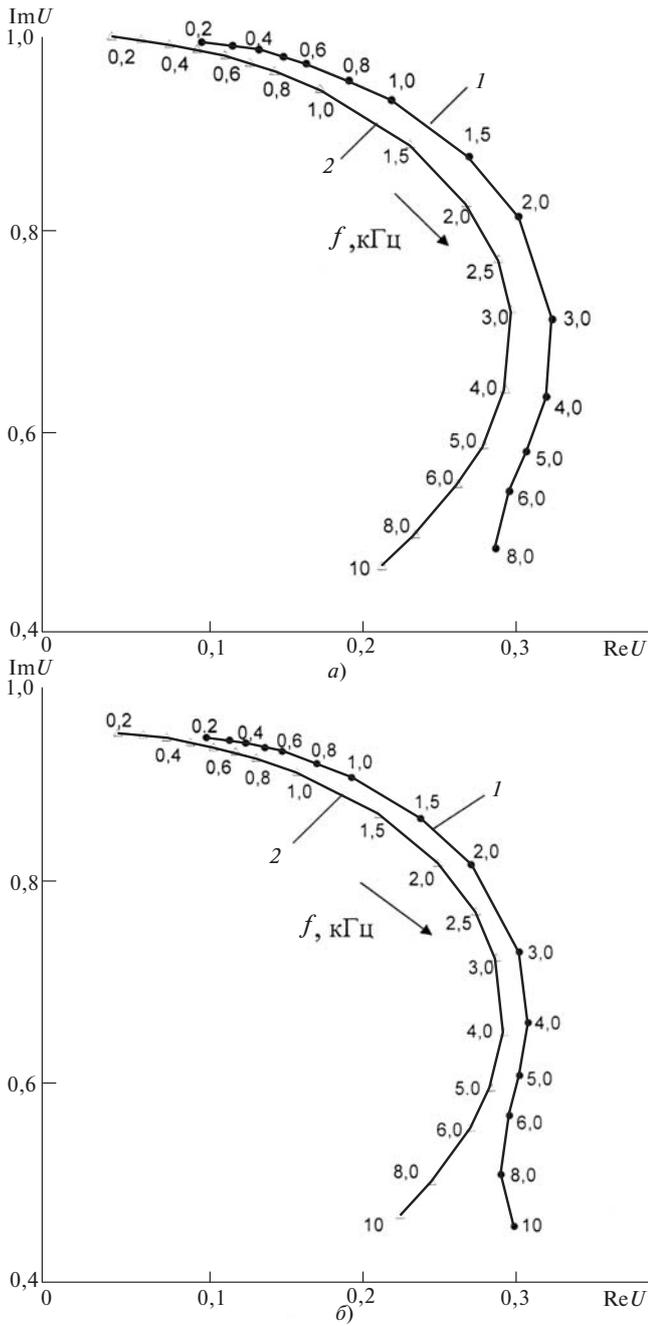
На рис. 2,а показаны годографы для цилиндрического образца диаметром 8 мм из латуни с удельной электрической проводимостью  $s = 15,3$  МСм/м. Цифрой 1 отмечен экспериментальный годограф, а

цифрой 2 – расчетный. Для простоты изложения индекс  $u$  символа  $U_{\text{отн}}$  опущен, т.е.  $U = U_{\text{отн}}$ . Вдоль линий отложены значения частоты в килогерцах. Видно, что экспериментальный годограф немного сдвинут вправо, т.е. расчетная модель воспроизводит экспериментально полученный результат с некоторым отклонением. Если бы это отклонение было одинаковым для различных образцов, то можно было ввести некоторую универсальную коррекцию математической модели. Однако, как будет показано далее, степень расхождения зависит как от диаметра и удельной электрической проводимости, так и от частоты переменного поля. На рис. 2,б приведены аналогичные зависимости для образца диаметром 8 мм из дюралюминия с удельной электрической проводимостью  $s = 13,4$  МСм/м. Из сравнения графиков видно небольшое изменение удельной электрической проводимости по сравнению с предыдущим опытом. На рис. 2,б теоретический и экспериментальный годографы совпадают в большей степени, чем на рис. 2,а.

На рис. 3,а,б и 4,а,б показаны экспериментальные 1 и расчетные 2 годографы для образцов диаметром 10 мм: на рис. 3,а для образца из дюралюминия с удельной электрической проводимостью  $s = 15,6$  МСм/м, на рис. 3,б – для образца из бронзы с  $s = 14,3$  МСм/м. На рис. 4,а,б – из технической меди с  $s = 53,1$  МСм/м и из алюминия с  $s = 34,2$  МСм/м. В отличие от предыдущих на этих рисунках теоретический и экспериментальный годографы расположены ближе друг к другу и даже пересекаются.

На рис. 5,а,б приведены также экспериментальные 1 и расчетные 2 годографы для образцов диаметром 12 мм: на рис. 5,а для образца из алюминия с  $s = 33,6$  МСм/м, а на рис. 5,б – для образца из меди с  $s = 61,8$  МСм/м. Увеличение диаметра приводит к увеличению значения обобщенного вихрекового параметра и позволяет продемонстрировать пересечение экспериментального и расчетного годографов в двух точках, не прибегая к расширению частотного диапазона. Обращает на себя внимание резкий изгиб экспериментального годографа вправо после пересечения расчетного годографа во второй точке.

На рис. 6,а,б показаны экспериментальные 1 и расчетные 2 годографы для образцов диаметром 15 мм: на рис. 6,а для образца из бронзы с  $s = 66,2$  МСм/м, на рис. 6,б – для образца из алюминия с  $s = 36,2$  МСм/м. Здесь также имеются две точки пересечения и, кроме того, видно увеличение различий экспериментальных и соответствующих расчетных годографов в области больших значений  $ReU$ , а также близкое

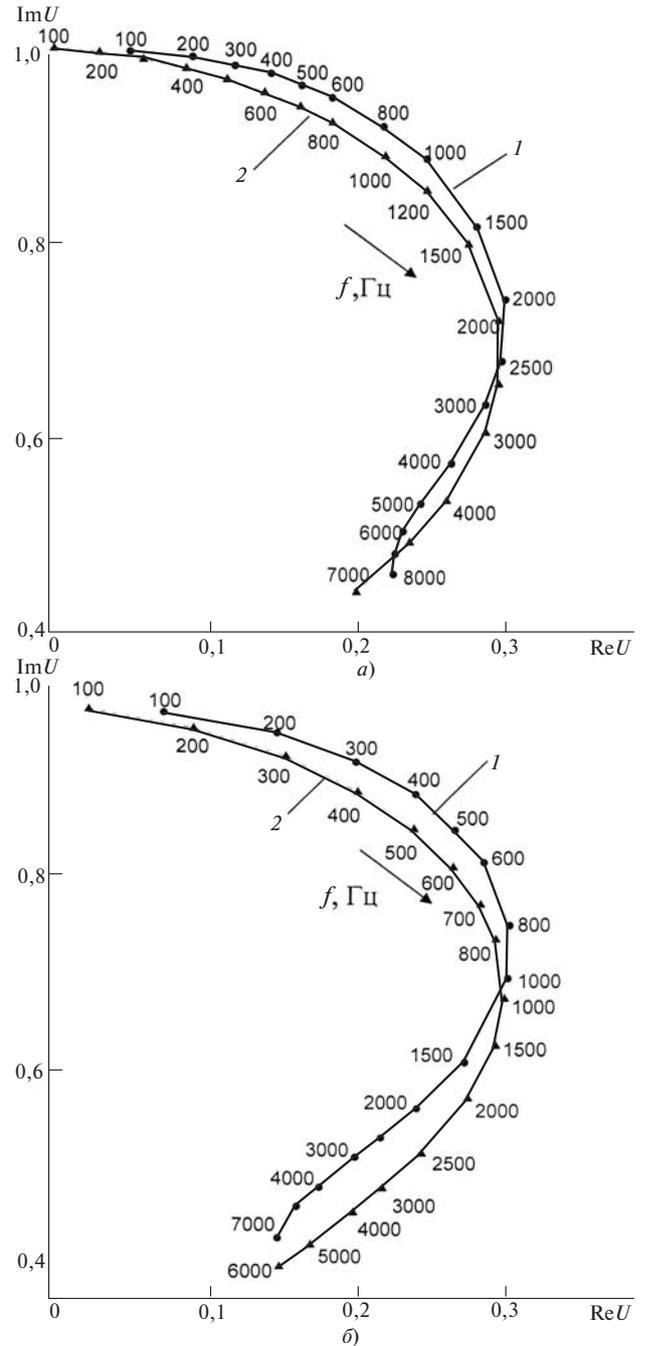


**Рис. 2.** Экспериментальные 1 и расчетные 2 годографы для образцов диаметром 8 мм: а – из латуни,  $s = 15,3$  МСм/м; б – из дюралюминия,  $s = 13,4$  МСм/м

совпадение линий годографов в области между точками пересечений.

Отличие рассчитанных годографов от измеренных экспериментально может показаться не очень большим, однако это всего лишь зрительное восприятие. Поэтому далее предлагается метод количественной оценки степени аномальных расхождений в зависимости от частоты, диаметра и удельной электрической проводимости материала образцов.

**Метод количественной оценки.** Рассматриваемый метод заключается в том, чтобы определить значе-



**Рис. 3.** Экспериментальные 1 и расчетные 2 годографы для образцов диаметром 10 мм: а – из дюралюминия,  $s = 15,6$  МСм/м; б – из бронзы,  $s = 14,3$  МСм/м

ния удельной электрической проводимости материала образца, при которых рассчитанные по формулам (1), (2) зависимости соответствовали бы экспериментально полученным годографам. С этой целью составляется система уравнений:

$$\begin{aligned} (\text{Re}U_{\text{отн}})_э &= (\text{Re}U_{\text{отн}})_р; \\ (\text{Im}U_{\text{отн}})_э &= (\text{Im}U_{\text{отн}})_р, \end{aligned} \quad (3)$$

которая решается относительно входящих в эти уравнения неизвестных значений с использованием процедуры минимизации функционала по методу деформируемого многогранника Нелдера–Мида

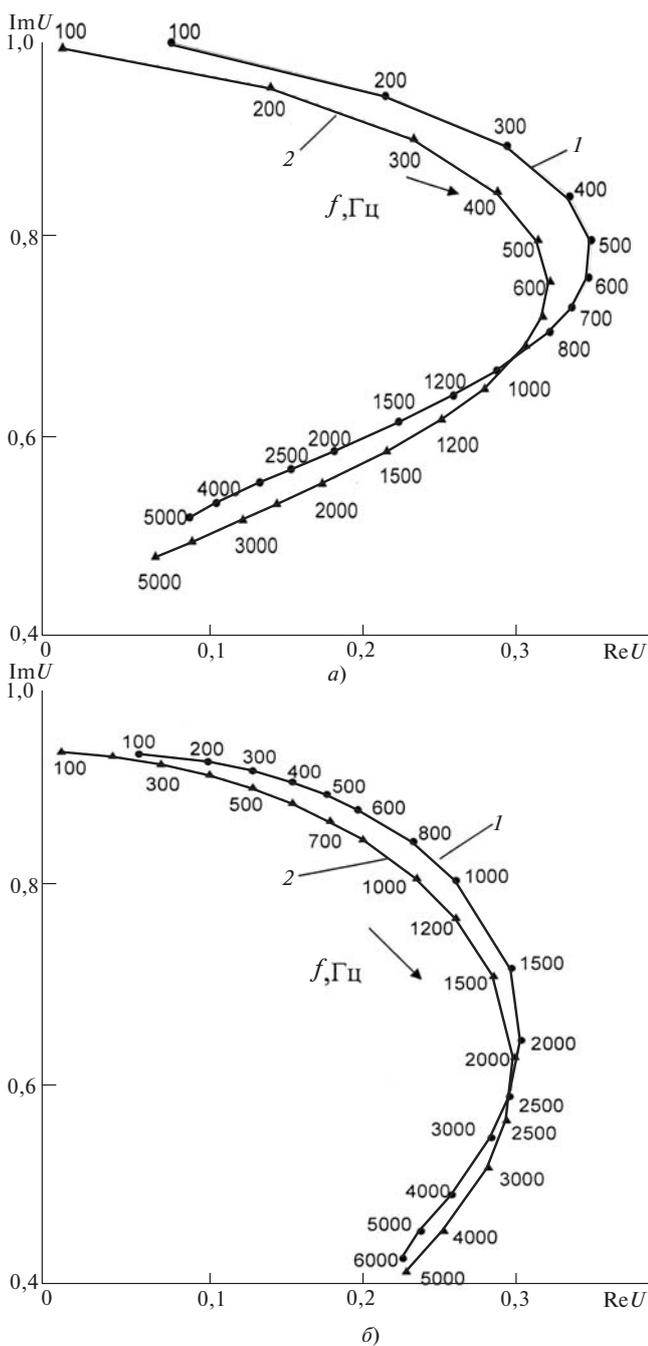


Рис. 4. Экспериментальные 1 и расчетные 2 годографы для образцов диаметром 10 мм: а – из технической меди,  $s = 53,1$  МСм/м; б – из алюминия  $s = 34,2$  МСм/м

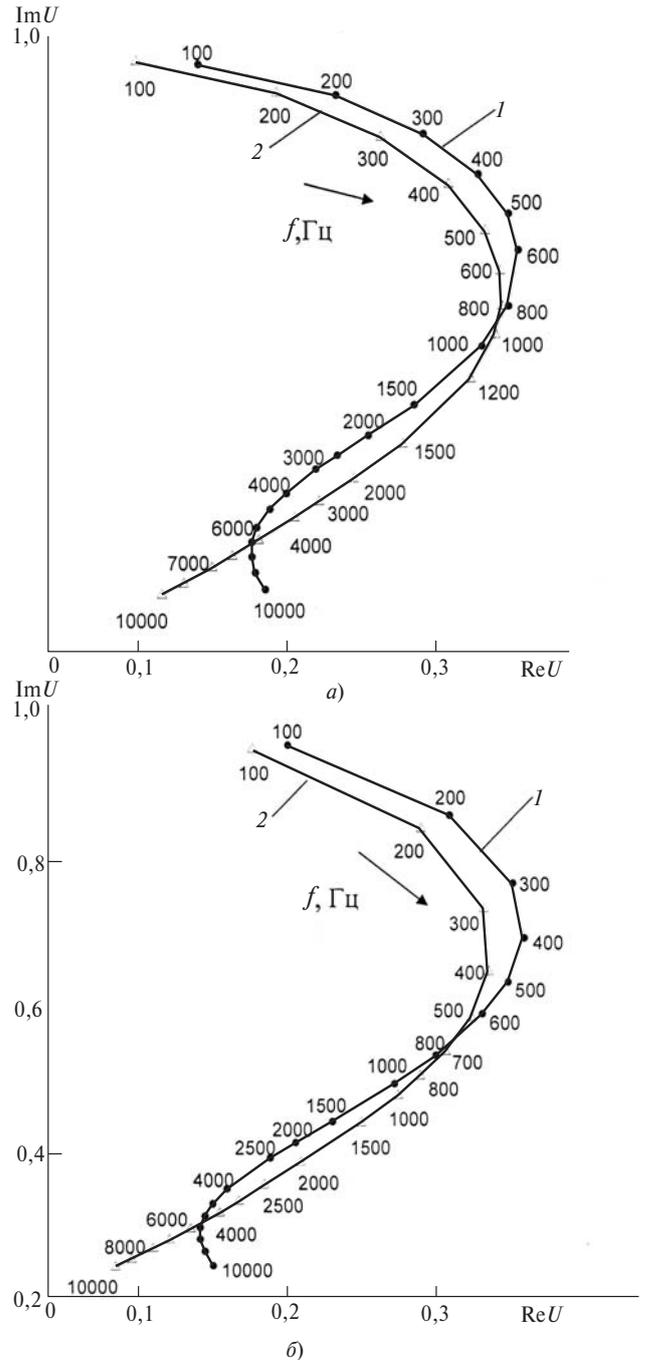


Рис. 5. Экспериментальные 1 и расчетные 2 годографы для образцов диаметром 12 мм: а – из алюминия,  $s = 33,6$  МСм/м; б – из меди,  $s = 61,8$  МСм/м

[4, 5]. В результате определяются значения вещественной  $S_1$  и мнимой  $S_2$  составляющих удельной электрической проводимости материала исследуемого образца, которые условно назовем кажущимися, потому что они не соответствуют реальному значению удельной электрической проводимости  $s$ , измеренному мостовым методом.

В таблице представлены значения  $s$  и результаты расчетов значений  $S_1$  и  $S_2$  во всем рассматриваемом частотном диапазоне для трех случаев – годографов, представленных на рис. 2,а; на рис. 6,а и

б. Рассчитаны также и приводятся в таблице значения

$$S_3 = \sqrt{S_1^2 + S_2^2}, \tag{4}$$

т.е. модуля, определенного из системы уравнений значения кажущейся удельной электрической проводимости. С целью определения степени неравномерности аномальных отклонений в пределах всего рассматриваемого частотного диапазона приводится и значение коэффициента  $K = S_3 / s$ . Это позво-

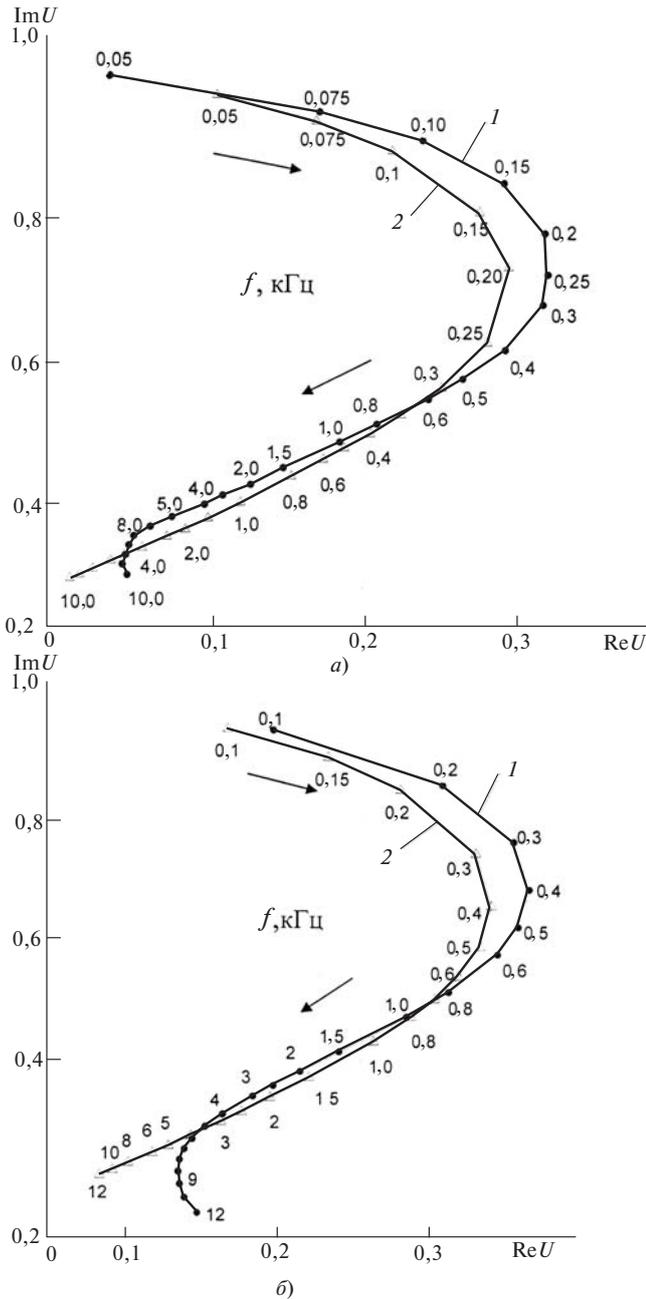


Рис. 6. Экспериментальные 1 и расчетные 2 годографы для образцов диаметром 15 мм: а – из бронзы,  $s = 66,2 \text{ МСм/м}$ ; б – из алюминия,  $s = 36,2 \text{ МСм/м}$

ляет выделить диапазон частот, в котором коэффициент  $K$  принимает наименьшие значения или его значение близко к единице. Однако и в этом случае математическое описание реально происходящих процессов в образце не является вполне корректным, поскольку содержит мнимую составляющую  $S_2$  в отличие от вещественного значения удельной электрической проводимости  $s$ , измеренной массовым методом. Мнимая составляющая  $S_2$  становится практически пренебрежимо малой в области пересечения расчетного и экспериментального годографов (см. рис. 6, а и б).

Вещественная часть  $S_1$ , определенная из системы уравнений (3), также существенно изменяется

во всем рассматриваемом частотном диапазоне. Критерием в данном случае может служить коэффициент  $K_1 = S_{1\text{max}} / S_{1\text{min}}$ , показывающий отношение наибольшего значения  $S_1$  к его наименьшему значению в пределах рассматриваемого частотного диапазона. Так, в случаях, относящихся к рис. 2, а, коэффициент  $K_1 = 6,48$ , к рис. 6, а –  $K_1 = 1,71$  и к рис. 6, б –  $K_1 = 4,67$ .

С увеличением частоты развитие поверхностного эффекта приводит к существенному искажению формы экспериментального годографа, что отмечается непосредственно из приведенных рисунков, тогда как математическое описание годографов совершенно не воспроизводит данный, реально существующий эффект. Рассмотренные аномальные явления неразрывно связаны с соответствующим распределением плотности вихревых токов.

**Расчет плотности вихревых токов в цилиндре.**

Плотность вихревых токов в проводящем цилиндре, помещенном в однородное переменное поле, определяется формулой [1–3]:

$$J = \frac{bH_s}{R} x, \tag{5}$$

где  $H_s$  – напряженность магнитного поля внутри соленоида;  $x$  – комплексная функция для выражения плотности токов в цилиндре, определяемая как

$$x = \sqrt{j} \frac{I_1(\sqrt{j}br/R)}{I_0(\sqrt{j}b)}, \tag{6}$$

здесь  $\gamma$  – полярная координата в цилиндрической системе координат.

Поскольку плотность вихревых токов изменяется в зависимости от  $\gamma$  по модулю, одновременно изменяется и их фаза. Фазовый угол при этом определяется выражением

$$g = \frac{180}{\rho} \arctg \frac{\text{Im}x}{\text{Re}x}. \tag{7}$$

На рис. 7, а показана зависимость модуля функции  $x$  от относительного значения полярной координаты  $\gamma/R$ . Графики рассчитаны для образца из бронзы диаметром 12 мм с  $s = 66,8 \text{ МСм/м}$  на частотах  $f$ , равных 500, 1000, 2000, 4000 и 7000 Гц. Надо представлять себе, что на поверхности образца плотность вихревых токов максимальна и убывает по направлению к оси цилиндра. Видно, что с увеличением частоты неравномерность распределения вихревых токов быстро возрастает, поверхностный эффект проявляется все сильнее. На рис. 7, б показано изменение фазового угла  $g$  в зависимости от полярной координаты. Видно, что фаза плотности вихревых токов также непрерывно меняется от периферии к оси цилиндра и тем быстрее, чем выше частота поля в соленоиде или чем сильнее проявляется поверхностный эффект.

Частота $f$ , Гц	Расчетная количественная оценка для годографов на рисунках											
	2,б				6,а				6,б			
	$s = 15,3$ МСм/м				$s = 66,2$ МСм/м				$s = 36,2$ МСм/м			
	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$K$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$K$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$K$
100	40,2	3,62	40,4	2,64	62,0	4,74	62,1	0,94	41,5	2,58	41,6	1,15
200	36,7	3,57	36,9	2,41	56,4	4,63	56,6	0,85	37,2	3,75	37,4	1,03
400	24,0	3,03	24,2	1,58	51,0	2,62	51,1	0,77	33,2	2,58	33,3	0,92
600	19,8	2,28	20,0	1,30	48,7	0,60	48,7	0,74	31,3	1,54	31,4	0,87
800	17,3	1,61	17,4	1,14	45,3	-1,07	45,3	0,68	29,8	0,39	29,8	0,82
1000	16,4	1,61	16,5	1,08	44,9	-2,11	45,0	0,68	29,3	-0,17	29,3	0,81
2000	14,0	0,98	14,1	0,92	39,6	-3,82	39,8	0,60	26,4	-1,79	26,5	0,73
3000	14,8	1,08	14,8	0,97	37,8	-4,82	38,1	0,57	24,6	-1,59	24,7	0,68
4000	12,8	0,68	12,8	0,84	36,3	-7,14	37,0	0,65	24,9	-2,20	25,1	0,69
5000	12,5	0,84	12,6	0,68	36,2	-7,62	36,9	0,55	24,3	-0,58	24,3	0,67
6000	12,1	1,24	12,2	0,80	37,8	-7,50	38,6	0,57	25,1	0,84	25,0	0,69
8000	11,4	1,97	11,6	0,76	41,4	0,63	41,3	0,62	24,6	6,71	25,5	0,70
10000	9,81	3,89	10,6	0,69	41,2	1,51	44,6	0,63	22,5	1,65	27,9	0,77
12000	3,84	6,21	7,3	0,48	—	—	—	—	8,9	2,67	28,1	0,78

Приведенный пример расчета плотности вихревых токов для бронзового образца выявляет сложный характер их распределения в зависимости от частоты, удельной электрической проводимости материала и расстояния от поверхности. Очевидно, влияние некоторого перераспределения плотности вихревых токов на формирование экспериментального годографа приводит к отклонениям его от соответствующего расчетного. С целью изучения такого влияния было использовано математическое моделирование.

**Моделирование изменений распределения плотности вихревых токов в цилиндре.** С этой целью используется метод введения цилиндрической полости. При увеличении диаметра полости поток наведенных в образце токов смещается к периферии. Если представить себе образец, имеющий внутреннюю цилиндрическую полость, то его можно рассматривать как трубу, и формула для расчета сигнала измерительной катушки существенно усложняется [2, 3]. При этом вводится новый параметр

$$z = d/R, \quad (8)$$

где  $d$  — толщина стенки трубы.

На рис. 8,а показаны рассчитанные таким образом верхние части годографов для медной трубы диаметром 12 мм с  $s = 61,8$  МСм/м при изменении относительной толщины стенки  $z$ . Видно, что по мере увеличения этого параметра начальные участки годографов в частотном диапазоне от 100 до

200 Гц сдвигаются вправо и книзу. Именно таким же образом сдвигаются рассмотренные выше экспериментальные годографы по отношению к расчетным в их верхней части. Это означает, что отклонение верхней части экспериментальных годографов сплошного цилиндра от расчетных годографов происходит благодаря некоторому смещению вихревого потока вглубь образца.

Из приведенных рисунков видно, что в средней части годографов они могут пересекаться или не пересекаться. В первом случае экспериментальный годограф полностью находится справа от расчетного. Во втором случае вверх от первой точки пересечения экспериментальный годограф смещается вправо относительно расчетного, а ниже — влево. Для объяснения этих отклонений рассмотрим годографы того же самого полого цилиндра в их средней части (см. рис. 8,б). Видно, что увеличением относительной толщины стенки трубы мы моделируем смещение экспериментального годографа влево (уменьшение скин-эффекта), а уменьшением этого параметра — смещение экспериментального годографа вправо (усиление поверхностного эффекта).

Наибольшее отклонение экспериментальных годографов от соответствующих расчетных происходит в их нижней части, когда экспериментальные годографы начинают резко изменять форму. На рис. 8,в показаны нижние части расчетных годографов все для того же полого цилиндра. Пересекающаяся линия — часть экспериментального

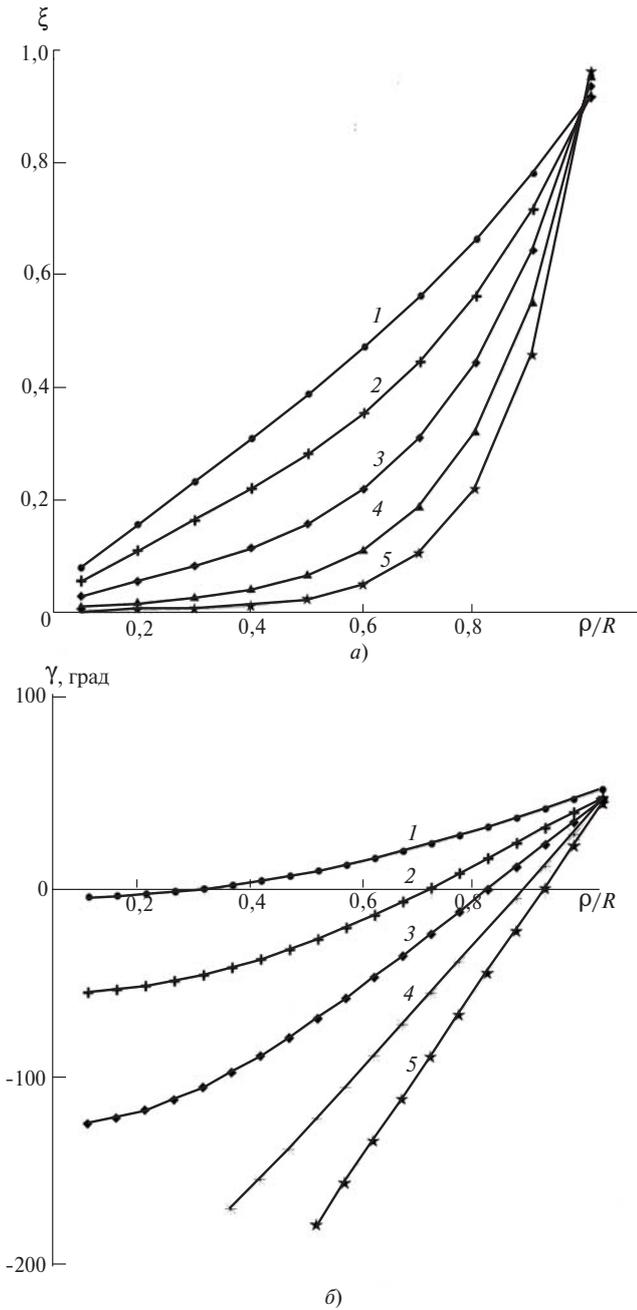


Рис. 7. Зависимость от нормированной полярной координаты: а – модуля плотности вихревых токов и б – фазового угла

годографа цилиндра. Видно, что экспериментальный годограф пересекает линии расчетных годографов, и с увеличением частоты рабочая точка переходит на линии, соответствующие все более тонкой стенке полого цилиндра. Этим моделируется смещение вихревого потока в сплошном цилиндре ближе к его поверхности. Следовательно, резкое изменение формы экспериментального годографа в нижней его части обусловлено аномальным усилением поверхностного эффекта.

**Выводы.** На основании исследований, выполненных с использованием цилиндрических образцов различных диаметров с различной удельной электрической проводимостью, показано, что рас-

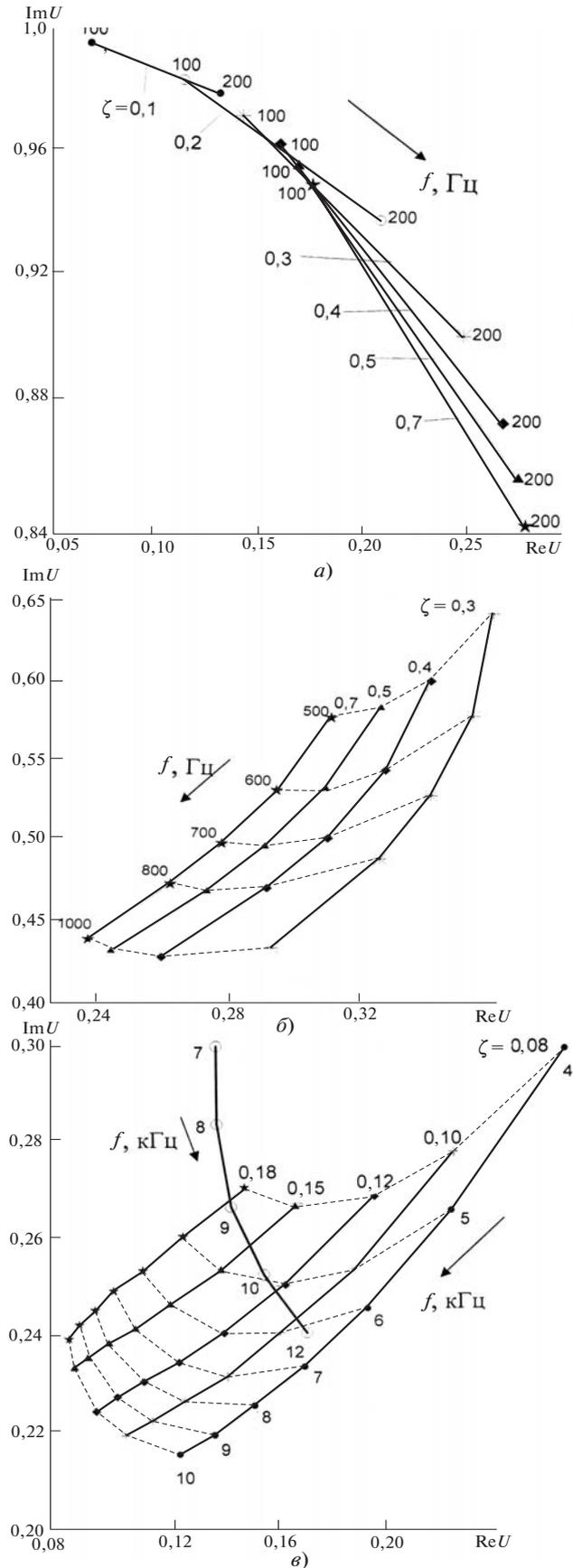


Рис. 8. Моделирование перемещений годографа для медного образца диаметром 12 мм путем изменений распределения плотности вихревых токов вдоль полярной координаты: а – для верхней части годографа; б – средней части; е – нижней части

четная математическая модель не является вполне адекватной. Визуальная оценка степени несоответствия заключается в сопоставлении экспериментально измеренных и рассчитанных по соответствующей модели годографов. Приведена методика и рассчитаны значения удельной электрической проводимости, которые получены на математической модели.

Количественная оценка неадекватности расчетной модели выполнена на основании сопоставления рассчитанных значений удельной электрической проводимости и измеренных мостовым методом непосредственно на каждом из экспериментальных образцов.

Экспериментально показано, что в аномальных явлениях существуют и закономерности. Так, расчетный и экспериментальный годографы для образцов малых диаметров не пересекаются; при увеличении диаметра — пересекаются в одной точке; с дальнейшим увеличением диаметра — пересекаются в двух точках.

Аномалии зависят от диаметра образцов, удельной электрической проводимости их материала и от частоты переменного поля.

Исследования показывают, что аномалии проявляются на всем протяжении экспериментальных годографов, но наиболее сильно в их нижней части, т.е. в области сильного поверхностного эффек-

та. При этом можно наблюдать характерное искривление экспериментального годографа.

Результаты исследований позволили выделить отдельные участки частотного диапазона, в которых результаты расчетов по математической модели в наибольшей степени совпадают с результатами измерений.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Нейиан Л.Р., Калантаров П.Л.** Теоретические основы электротехники, ч. 3. — М.: ГЭИ, 1959.
2. **Родигин Н.М.** Индукционный нагрев стальных изделий. — Москва; Свердловск: Металлургиздат, 1950.
3. **Дякин В.В., Сандовский В.А.** Задачи электродинамики в неразрушающем контроле. — Екатеринбург: Изд. УрО РАН, 2007.
4. **Левит М.Г.** Программное обеспечение для решения задач численного анализа на СМ ЭВМ. — Кишинев: Штиинца, 1991.
5. **Плис А.И., Сливина Н.А.** Лабораторный практикум по высшей математике. — М.: Высшая школа, 1994.

[09.02.11]

*Автор: Сандовский Владимир Аронович окончил радиотехнический факультет Уральского политехнического института в 1962 г. В 1990 г. защитил докторскую диссертацию «Решение задач электродинамики в вихретоковом контроле и развитие электромагнитных методов определения механических свойств изделий». Ведущий научный сотрудник Института физики металлов УрО РАН.*

\* \* \*

#### **Зарубежная подписка**

на журнал «Электричество»  
оформляется через фирмы-партнеры ЗАО «МК-Периодика» или непосредственно  
в ЗАО «МК-Периодика» по адресу:

Россия, 111524 Москва, Электродная ул., 10, стр. 3

ЗАО «МК-Периодика»;

тел. (495) 672-70-12; факс (495) 306-37-57

E-mail: [info@periodicals.ru](mailto:info@periodicals.ru)

Internet: <http://www.periodicals.ru>

To effect subscription it is necessary to address to one of the partners of JSC «МК-Periodica» in your country or to JSC «МК-Periodica» directly.

Address: Russia, 111524 Moscow; 10, str.3, Elektrodная ul.

JSC «МК-Periodica»

Tel.: (495) 672-70-12; fax (495) 306-37-57

E-mail: [info@periodicals.ru](mailto:info@periodicals.ru)

Internet: <http://www.periodicals.org>