

# Приближенный метод расчета максимальной температуры нагрева металлического проводника импульсным током

БАРАНОВ М.И., НОСЕНКО М.А.

*Используя термин переходное электрическое сопротивление металлического проводника, изложен аналитический метод приближенного расчета в неустановившемся режиме максимальной температуры адиабатического нагрева изотропного материала проводника произвольного поперечного сечения импульсным электрическим током с заданными амплитудно-временными параметрами. Данный метод в условиях отсутствия теплообмена между проводником и окружающей средой и его горячими и холодными слоями учитывает проявление в поперечном сечении проводника нестационарного линейного поверхностного эффекта. Метод позволяет оценивать тепловое состояние поверхностей проводника для различных соотношений толщины термического или электрического скин-слоев в нем и его поперечных размеров. Рекомендовано при выборе кратковременно нагреваемого объема проводника пользоваться толщиной электрического скин-слоя и обусловленным ею поперечным сечением проводника.*

**Ключевые слова:** *металлический проводник, импульсный электрический ток, переходное электрическое сопротивление, температура нагрева*

В электротехнике и электроэнергетике [1], радиотехнике [2], технике и электрофизике высоких напряжений [3], технике сильных импульсных электрических (магнитных) полей и больших импульсных токов [4, 5], а также в силовой электронике и импульсной энергетике [6] при создании общепромышленных электроэнергетических и исследовательских электроустановок электротехнологического и научного назначения широкое применение нашли металлические проводники разнообразной конструкции (как с изоляцией, так и без нее) и различного поперечного сечения, по которым в аварийном (случаи КЗ и пробоя изоляции) или штатном режимах работы кратковременно протекают импульсные токи с различными амплитудно-временными параметрами (АВП). Одной из основных задач классического электротеплотехнического подхода при расчете неустановившейся текущей или максимальной температуры джоулевого нагрева  $\theta_{\text{пр}}(t)$  по поперечному сечению как неоднородного, так и однородного материала указанных проводников импульсными токами с известными АВП является нахождение нестационарного распределения плотности электрического тока

*An analytical method for approximately determining the maximal temperature to which the isotropic material of a metal conductor with an arbitrary cross section is heated by an impulse electric current with specified amplitude-and-timing parameters under unsteady operating conditions is described using the term “transient electrical impedance of a metal conductor”. The proposed method takes into account the unsteady linear skin effect under the conditions when there is no heat transfer between the conductor and its surrounding medium, as well as between its hot and cold layers. The use of the method makes it possible to estimate the thermal state of conductor surfaces for different ratios between the thicknesses of thermal or electrical skin layers in it and its transverse dimensions. It is recommended to use the thickness of the electrical skin layer and the conductor’s cross section stemming from this thickness in selecting the conductor’s volume subjected to short-term heating.*

**Key words:** *metal conductor, impulse electric current, transient electrical impedance, heating temperature*

$\delta_{\text{пр}}(t)$  по их сечениям и далее удельной мощности тепловых потерь в их материале [5, 7, 8]. Аналитическое или численное решение подобных полевых прямых задач электродинамики, особенно для массивных проводников сложной конфигурации (например, плоской коллекторной ошиновки различной формы, цилиндрических коаксиальных и одиночных токопроводов [8–10]), работающих в условиях резкого проявления в них нестационарного поверхностного эффекта (ПЭ), на практике часто встречает серьезные физико-математические затруднения.

Пренебрежение импульсным характером воздействия тока проводимости на нестационарный нагрев данных проводников приводит в переходном режиме, особенно на начальных участках тока, к значительным погрешностям при определении их максимальной температуры [8, 11, 12]. В [13, 14] при анализе переходных электромагнитных процессов в электрических цепях с массивными металлическими токопроводами и импульсными токами различных АВП в теорию электричества было введено новое понятие переходного электрического сопротивления  $Z_{\text{пр}}(t)$  металлического проводника.

Величина  $Z_{\text{пр}}(t)$  учитывает особенности распределения в неустановившемся режиме импульсного электрического тока по поперечному сечению проводника. А раз так, то величина  $Z_{\text{пр}}(t)$  определенным образом может быть использована при нахождении в переходном режиме максимальной температуры нагрева  $\theta_{\text{пр}}(t)$  материала проводника с произвольными размерами его поперечного сечения при протекании по нему импульсного тока с заданными АВП. Поэтому в вышеуказанных областях слабо- и сильноточной техники актуальными остаются электро- и теплофизические задачи, направленные на облегчение усилий пользователя при выполнении им расчетов, связанных с определением в неустановившемся режиме как текущей, так и максимальной температуры нагрева металлических проводников различной геометрической формы и поперечных сечений при протекании по ним импульсных токов с произвольными АВП.

**Постановка задачи нагрева металлического проводника импульсным током.** Рассмотрим размещенный в воздушном пространстве при нормальных атмосферных условиях (давление воздуха составляет  $1,013 \cdot 10^5$  Па, а его температура  $\theta_0 = 0^\circ\text{C}$  [15]) немагнитный изотропный прямолинейный металлический проводник без изоляции длиной  $l_{\text{пр}}$  с произвольной формой одинакового вдоль длины поперечного сечения  $S_{\text{пр}}$  различного значения. Примем, что по данному неподвижному проводнику полным объемом  $V_{\text{пр}}$  в продольном направлении протекает импульсный ток проводимости  $i_{\text{пр}}(t)$  произвольных АВП, временная функция которого удовлетворяет условию аналитичности Дирихле [16] и начальному условию вида  $i_{\text{пр}}(0) = 0$ . Считаем, что достигаемая в рассматриваемом проводнике за счет джоулева нагрева максимальная температура  $\theta_{\text{пр}}(t)$  такова, что ее влиянием на электро- и теплофизические характеристики его материала и пространственно-временное распределение в нем плотности тока  $\delta_{\text{пр}}(t)$  в рассматриваемом здесь приближении можно пренебречь [4, 5].

Полагаем, что кратковременный нагрев материала проводника импульсным электрическим током  $i_{\text{пр}}(t)$  происходит в адиабатическом режиме, при котором теплоотдачу в окружающую воздушную среду и влияние теплопроводности материала проводника на импульсный нагрев его наружных и внутренних слоев можно не учитывать. Требуется с учетом принятых допущений и использования понятия переходного электрического сопротивления  $Z_{\text{пр}}(t)$  металлического проводника получить приближенное аналитическое решение электротепловой задачи для неустановившегося температурного поля в материале исследуемого проводника, нагреваемого в условиях проявления в нем нестационар-

ного линейного ПЭ импульсным электрическим током  $i_{\text{пр}}(t)$  с заданными АВП и максимальной температурой  $\theta_{\text{пр}}(t)$  его проводящих поверхностей.

**Основные расчетные соотношения предлагаемого электротеплотехнического подхода.** *Переходное электрическое сопротивление металлического проводника.* В соответствии с [13, 14] и известными положениями теории линейных электрических цепей из области теоретической электротехники [1] понятие переходного электрического сопротивления  $Z_{\text{пр}}(t)$  металлического проводника определяется следующим соотношением:

$$Z_{\text{пр}}(t) = \frac{U_{\text{пр}}^1(t)}{I_i(t)}, \quad (1)$$

где  $U_{\text{пр}}^1(t)$  – падение электрического напряжения на металлическом проводнике, испытывающем между его противоположными краями воздействие единичного ступенчатого импульса (ЕСИ) аксиального тока вида  $I_i(t)$  (единичной функции Хевисайда) [16, 17].

Заметим, что для указанного ЕСИ аксиального тока выполняются следующие классические краевые условия [1, 16]:

$$I_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{для } -\infty < t < 0, \\ 1 & \text{для } 0 \leq t < \infty. \end{cases} \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что переходное электрическое сопротивление  $Z_{\text{пр}}(t)$  металлического проводника численно равно падению импульсного электрического напряжения на нем при воздействии на рассматриваемый проводник ЕСИ аксиального тока  $I_i(t)$ . Приведем ниже аналитические соотношения для расчетного определения значения  $Z_{\text{пр}}(t)$  применительно к основным каноническим геометрическим конфигурациям металлических проводников, используемым в указанных выше областях слабо- и сильноточной импульсной техники.

Плоские прямоугольные проводники двухпроводной системы. Поперечное сечение данной двухпроводной системы плоских проводников, содержащей две идентичные изолированные и параллельно размещенные на расстоянии  $d_{\text{ш}}$  друг от друга прямую 1 и обратную 2 токопроводящие шины прямоугольного поперечного сечения  $S_{\text{пр}}$ , имеющие толщину  $h_{\text{ш}}$ , ширину  $b_{\text{ш}}$  и длину  $l_{\text{пр}}$  с равными и противоположно направленными импульсными продольными токами  $i_{\text{пр}}(t)$  произвольных АВП, приведено на рис. 1,а. Точками и крестиками на рис. 1,а показаны направления и зоны протекания прямого и обратного одинаковых импульсных токов  $i_{\text{пр}}(t)$  в плоских проводниках прямоугольного поперечного сечения. В [13, 14] было показано, что в соответствии с (1) выражение для

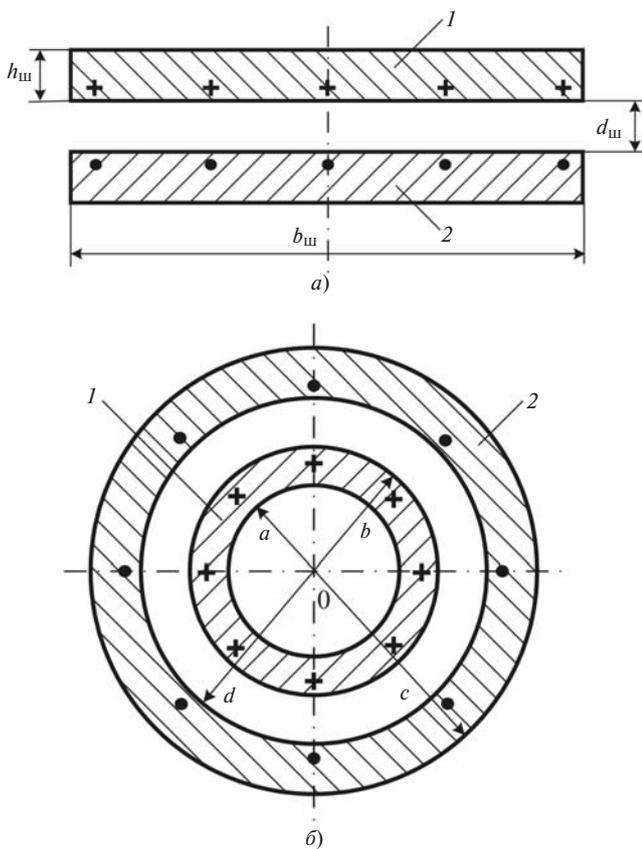


Рис. 1. Поперечные сечения двухпроводных конструкций проводников: *a* – плоских прямоугольных (1, 2 – прямой и обратный токопроводы) и *b* – коаксиальных круглых цилиндрических (1, 2 – внутренний и наружный токопроводы)

переходного электрического сопротивления  $Z_{1пр}(t)$  каждого плоского прямоугольного проводника рассматриваемой двухпроводной системы имеет следующий вид:

$$Z_{1пр}(t) = \frac{l_{пр}}{h_{ш} b_{ш} \gamma_1} \times \left[ 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cos(\pi k) \exp\left(-\frac{\pi^2 k^2 t}{\mu_0 \gamma_1 h_{ш}^2}\right) \right], \quad (3)$$

где  $\gamma_1$  – удельная электропроводность материала плоского прямоугольного проводника;  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м – магнитная постоянная [15];  $k=1, 2, 3, \dots, \infty$  – целочисленный ряд.

Из (3) видно, что в установившемся электромагнитном режиме ( $t \rightarrow \infty$ ) значение  $Z_{1пр}(t)$  для каждой из токопроводящих шин согласно (3) становится равным значению активного сопротивления плоского прямоугольного проводника постоянному аксиальному току проводимости.

Цилиндрические коаксиальные проводники двухпроводной системы. На рис. 1, б приведено поперечное сечение двухпроводной коаксиальной конструкции круглых цилиндриче-

ских проводников длиной  $l_{пр}$ , состоящей из изолированных друг от друга трубчатых внутреннего 1 и наружного 2 прямолинейных проводников с соответствующими внутренними  $a$  и  $d$ , а также внешними  $b$  и  $c$  радиусами. Как и на рис. 1, а, точками и крестиками на рис. 1, б показаны направления и места встречного протекания в указанных коаксиальных проводниках двухпроводной системы идентичных импульсных аксиальных токов  $i_{пр}(t)$  произвольных АВП. С учетом результатов исследований [13, 14] для переходного электрического сопротивления  $Z_{2пр}(t)$  сплошного круглого уединенного или внутреннего цилиндрического проводника исследуемой коаксиальной системы (при  $a=0$ ) можно записать следующее расчетное соотношение:

$$Z_{2пр}(t) = \frac{l_{пр}}{\pi b^2 \gamma_2} \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{y_k^2 t}{\mu_0 \gamma_2 b^2}\right) \right], \quad (4)$$

где  $\gamma_2$  – удельная электропроводность материала сплошного внутреннего цилиндрического проводника;  $y_k$  – корни уравнения вида  $J_1(y)=0$  [16];  $J_1(y)$  – функция Бесселя первого рода первого порядка [18].

Из (4) следует, что в предельном случае при  $t \rightarrow \infty$  (установившийся электромагнитный режим)  $\lim_{t \rightarrow \infty} Z_{2пр}(t) = l_{пр} / \pi b^2 \gamma_2$ , т.е. переходное электри-

ческое сопротивление  $Z_{2пр}(t)$  указанного цилиндрического проводника при  $t \rightarrow \infty$  становится равным активному сопротивлению сплошного цилиндрического токопровода постоянному аксиальному электрическому току.

Что касается трубчатого внутреннего круглого цилиндрического проводника рассматриваемой коаксиальной двухпроводной системы токопроводов, то для него переходное электрическое сопротивление  $Z_{3пр}(t)$  при  $\gamma_3 = \gamma_2$  имеет следующий аналитический вид [13, 14]:

$$Z_{3пр}(t) = \frac{\alpha^2 l_{пр}}{\pi b^2 (\alpha^2 - 1) \gamma_2} \times \left[ 1 + S_1^{-1}(\alpha) \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{\alpha^2 \lambda_k^2 t}{\mu_0 \gamma_2 b^2}\right) \frac{L_k}{P_k} \right], \quad (5)$$

где  $\alpha = b/a$ ;  $S_1(\alpha) = \alpha / (\alpha^2 - 1)$ ;

$L_k = J_1(\lambda_k) N_0(\alpha \lambda_k) - J_0(\alpha \lambda_k) N_1(\lambda_k)$ ;  
 $P_k = J_0(\lambda_k) N_1(\alpha \lambda_k) - J_1(\alpha \lambda_k) N_0(\lambda_k) + \alpha L_k$ ;  $\lambda_k$  – корни уравнения вида  $J_1(\lambda) N_1(\alpha \lambda) - J_1(\alpha \lambda) N_1(\lambda) = 0$  [19];  $J_0, N_0, N_1$  – соответственно функции Бесселя первого рода нулевого порядка, второго рода нулевого и первого порядков [18].

Из (4) и (5) явствует, что при  $\alpha \rightarrow \infty$  (случай сплошного внутреннего цилиндрического провод-

ника)  $\lim_{t \rightarrow \infty} Z_{3\text{пр}}(t) = Z_{2\text{пр}}(t)$ , а для предельного перехода при  $t \rightarrow \infty$  (случай установившегося электромагнитного режима) переходное электрическое сопротивление  $Z_{3\text{пр}}(t)$  становится равным активному сопротивлению внутреннего трубчатого цилиндрического проводника постоянному аксиальному электрическому току.

Для переходного электрического сопротивления  $Z_{4\text{пр}}(t)$  трубчатого наружного круглого цилиндрического проводника указанной коаксиальной двухпроводной системы токопроводов будет справедливо следующее расчетное выражение [13, 14]:

$$Z_{4\text{пр}}(t) = \frac{l_{\text{пр}}}{\pi d^2 (\beta^2 - 1) \gamma_4} \times \left[ 1 + S_2^{-1}(\beta) \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{x_k^2 t}{\mu_0 \gamma_4 d^2}\right) \frac{M_k}{T_k} \right], \quad (6)$$

где  $\gamma_4$  – удельная электропроводность материала трубчатого наружного цилиндрического проводника;

$$\beta = c / d; \quad S_2(\beta) = 1 / (1 - \beta^2);$$

$M_k = J_0(x_k) N_1(\beta x_k) - J_1(\beta x_k) N_0(x_k);$   
 $T_k = \beta [J_1(x_k) N_0(\beta x_k) - J_0(\beta x_k) N_1(x_k)] + M_k;$   $x_k$  – корни уравнения вида  $J_1(x) N_1(\beta x) - J_1(\beta x) N_1(x) = 0$  [19].

Аналогично (5) переходное электрическое сопротивление  $Z_{4\text{пр}}(t)$  согласно (6) в установившемся электромагнитном режиме (в предельном случае при  $t \rightarrow \infty$ ) равно значению активного сопротивления трубчатого наружного круглого цилиндрического токопровода двухпроводной коаксиальной системы постоянному аксиальному электрическому току.

*Расчет максимальной температуры нагрева металлического проводника импульсным током.* Данный расчет построим на определении максимальной величины тепловой энергии  $W_{\text{пр}}$ , выделяющейся в металлическом проводнике на произвольном временном отрезке  $[0, t_0]$  в условиях проявления в его поперечном сечении нестационарного ПЭ при продольном протекании по его однородному материалу импульсного электрического тока  $i_{\text{пр}}(t)$  с заданными АВП. Величина  $t_0$  на временном отрезке  $[0, t_0]$  будет соответствовать длительности электротеплового процесса, в течение которого осуществляется импульсный джоулев нагрев материала исследуемого проводника. С этой целью на основе интеграла Дюамеля [1, 16] первоначально запишем выражение, определяющее максимальную величину импульсного электрического напряжения  $U_{\text{пр}}(t)$  на металлическом проводнике с переходным электрическим сопротивлением  $Z_{\text{пр}}(t)$  и аксиаль-

ным импульсным электрическим током  $i_{\text{пр}}(t)$ , в следующем виде:

$$U_{\text{пр}}(t) = i_{\text{пр}}(0) Z_{\text{пр}}(t) + \int_0^t Z_{\text{пр}}(t - \tau) \frac{di_{\text{пр}}(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (7)$$

Учитывая, что для воздействующего на металлический проводник импульсного тока выполняется начальное условие  $i_{\text{пр}}(0) = 0$ , с учетом (7) для выделяющейся в неустановившемся режиме на временном отрезке  $[0, t_0]$  в материале рассматриваемого проводника максимальной величины тепловой энергии  $W_{\text{пр}}(t)$  получаем:

$$W_{\text{пр}}(t) = \int_0^{t_0} i_{\text{пр}}(t) \left[ \int_0^t Z_{\text{пр}}(t - \tau) \frac{di_{\text{пр}}(\tau)}{d\tau} d\tau \right] dt. \quad (8)$$

Зная при известных значениях импульсного тока  $i_{\text{пр}}(t)$  и переходного электрического сопротивления  $Z_{\text{пр}}(t)$  проводника по (8) максимальное значение выделяемой в нем на временном отрезке  $[0, t_0]$  тепловой энергии  $W_{\text{пр}}(t)$ , при принятых допущениях для максимальной температуры  $\theta_{\text{пр}}(t)$  кратковременного нагрева в воздухе рассматриваемого металлического проводника с некоторым объемом  $V_{\text{пр}}^*$  его материала, через который протекает соответствующим образом пространственно распределенный в нем в нестационарном электромагнитном режиме импульсный ток  $i_{\text{пр}}(t)$ , на его поверхности с наибольшей плотностью тока находим:

$$\theta_{\text{пр}}(t) = (c_0 V_{\text{пр}}^*)^{-1} \times \int_0^{t_0} i_{\text{пр}}(t) \left[ \int_0^t Z_{\text{пр}}(t - \tau) \frac{di_{\text{пр}}(\tau)}{d\tau} d\tau \right] dt + \theta_0, \quad (9)$$

где  $c_0$  – удельная теплоемкость, отнесенная к единице объема материала проводника [5, 14].

При практическом применении формулы (9) необходимо помнить, что, с одной стороны, для массивного проводника с импульсным током  $i_{\text{пр}}(t)$  в переходном режиме определенная часть температурного поля проводника локализуется в зоне его поверхностного термического скин-слоя толщиной  $\Delta T$ , которая может быть значительно меньше поперечных размеров проводника. Для импульсного затухающего (незатухающего) гармонического тока  $i_{\text{пр}}(t)$  толщина данного скин-слоя может быть найдена из следующего приближенного соотношения [5, 8]:  $\Delta T = (2\lambda_0 / c_0 \omega)^{1/2}$ , где  $\lambda_0$  – коэффициент теплопроводности материала проводника [15];  $\omega$  – круговая частота электрического тока в проводнике. С другой стороны, в металлическом проводнике с удельной электропроводностью  $\gamma_0$  его материала импульсный ток  $i_{\text{пр}}(t)$  главным образом протекает

по толщине  $\Delta_3$  электрического скин-слоя, приближенно определяемой классическим соотношением  $\Delta_3 = (2 / \omega \mu_0 \gamma_0)^{1/2}$  [1, 5]. В этой связи  $\Delta_T$  и  $\Delta_3$  будут определять размеры кратковременно нагреваемых импульсным током  $i_{\text{пр}}(t)$  участков поперечного сечения  $S_{\text{пр}}$  массивного проводника длиной  $l_{\text{пр}}$  и соответственно значение объема  $V_{\text{пр}}^*$  из (9) его материала, в которых может происходить основной процесс импульсного джоулева тепловыделения.

На практике для инженера при оценке теплового действия на проводник импульсного тока  $i_{\text{пр}}(t)$  важно знать те расчетные выражения, которые следует использовать в (9) при нахождении величины кратковременно нагреваемого объема  $V_{\text{пр}}^*$  проводника. При этом ему приходится находить в нем поперечные сечения импульсного тепловыделения, определяемые как толщиной термического скин-слоя  $\Delta_T$ , так и толщиной электрического скин-слоя  $\Delta_3$  и его полным сечением  $S_{\text{пр}}$ . Постараемся ниже дать однозначные рекомендации по выбору в рассматриваемом случае и при предлагаемом для него расчете температуры  $\theta_{\text{пр}}(t)$  величины нагреваемого объема  $V_{\text{пр}}^*$  проводника. Из (9) следует, что для определения максимальной температуры  $\theta_{\text{пр}}(t)$  нагрева металлического проводника с заданными электро- и теплофизическими характеристиками его материала и параметрами его геометрии (величинами  $c_0, \lambda_0, \gamma_0, \Delta_T, \Delta_3, l_{\text{пр}}, S_{\text{пр}}$  и  $V_{\text{пр}}^*$ ) и известными АВП воздействующего на него импульсного тока  $i_{\text{пр}}(t)$  необходимо иметь лишь соответствующие расчетные формулы для переходного электрического сопротивления  $Z_{\text{пр}}(t)$  этого проводника. В этой связи приведенные выше формулы (3)–(6) для величины  $Z_{\text{пр}}(t)$  применительно к плоским и цилиндрическим проводникам оказываются необходимыми для приближенной расчетной оценки по (9) значений  $\theta_{\text{пр}}(t)$  в токоведущих частях с плоской и кабельной двухпроводной ошиновкой ряда мощных электрофизических установок с импульсными токами различных АВП [4, 5, 10, 14].

**Пример расчета максимальной температуры нагрева круглого цилиндрического проводника импульсным аксиальным синусоидальным током.** Рассмотрим ниже простейший случай, характеризующийся воздействием на немагнитный изотропный сплошной круглый прямолинейный без изоляции цилиндрический проводник длиной  $l_{\text{пр}}$  и наружным радиусом  $b$  импульсного аксиального незатухающего гармонического тока  $i_{\text{пр}}(t)$ , изменяющегося во времени  $t$  по синусоидальному закону с круговой частотой  $\omega$  [1, 8]:

$$i_{\text{пр}}(t) = I_m \sin(\omega t), \quad (10)$$

где  $I_m$  – амплитуда импульсного электрического тока в проводнике.

Проведем с учетом (10) на основе (9) расчетную оценку значений температуры  $\theta_{\text{пр}}(t)$  рассматриваемого проводника для двух вариантов определения величины его кратковременно нагреваемого импульсным синусоидальным током объемом  $V_{\text{пр}}^*$ : а) для тонкого проводника ( $\Delta_T \geq b$  и  $\Delta_3 \geq b$ ) с нагреваемым сплошным цилиндрическим объемом, равным  $\pi b^2 l_{\text{пр}}$ ; б) для массивного проводника ( $\Delta_T \ll b$  и  $\Delta_3 \ll b$ ) с нагреваемым трубчатый цилиндрическим объемом, равным  $\pi b^2 [1 - (1 - \Delta_T / b)^2] V_{\text{пр}}$  или  $\pi b^2 [1 - (1 - \Delta_3 / b)^2] V_{\text{пр}}$ . Для первого варианта расчета искомой температуры  $\theta_{\text{пр}}(t)$  после подстановки (4) и (10) в (9) и выполнения элементарных преобразований для максимальной температуры нагрева материала немагнитного тонкого (в электромагнитном смысле) круглого сплошного цилиндрического проводника с импульсным аксиальным синусоидальным током вида (10) в безразмерном виде получаем:

$$\theta_{\text{пр1}}^*(t^*) = 8\omega^* \int_0^{t_0^*} \sin(\omega^* t^*) \times \left[ \int_0^{t^*} \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \exp[-y_k^2 (t^* - \tau^*)] \right] \cos(\omega^* \tau^*) d\tau^* \right] dt^* + \theta_0^*, \quad (11)$$

где  $\theta_{\text{пр1}}^*(t^*) = \theta_{\text{пр1}}(t^*) / \theta_b$ ;  $\theta_0^* = \theta_0 / \theta_b$ ;  $\theta_b = \mu_0 I_m^2 / (8\pi^2 c_0 b^2)$  – базисная температура;  $t^* = t / t_b$ ;  $t_0^* = t_0 / t_b$ ;  $\tau^* = \tau / t_b$ ;  $\omega^* = \omega t_b$ ;  $t_b = \mu_0 \gamma_2 b^2$  – базисное время.

Для второго варианта расчета максимальной температуры  $\theta_{\text{пр}}(t)$  нагрева проводника с учетом влияния на нее конечных толщины  $\Delta_T$  и  $\Delta_3$  его скин-слоев аналогично (11) для указанной температуры нагрева в неустановившихся электромагнитном и электротепловом режимах немагнитного массивного круглого сплошного цилиндрического проводника импульсным аксиальным синусоидальным током  $i_{\text{пр}}(t)$  по (10) в безразмерном виде соответственно запишем:

$$\theta_{\text{пр2}}^*(t^*) = \frac{8\omega^*}{1 - (1 - \Delta_T)^2} \int_0^{t_0^*} \sin(\omega^* t^*) \times$$

$$\times \left[ \int_0^{t^*} \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \exp[-y_k^2 (t^* - \tau^*)] \right] \cos(\omega^* \tau^*) d\tau^* \right] dt^* + \theta_0^*, \quad (12)$$

$$\theta_{\text{пр3}}^*(t^*) = \frac{8\omega^*}{[1 - (1 - \Delta_9^*)^2]} \int_0^{t_0^*} \sin(\omega^* t^*) \times \left[ \int_0^{t^*} \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \exp[-y_k^2 (t^* - \tau^*)] \right] \cos(\omega^* \tau^*) d\tau^* \right] dt^* + \theta_0^*, \quad (13)$$

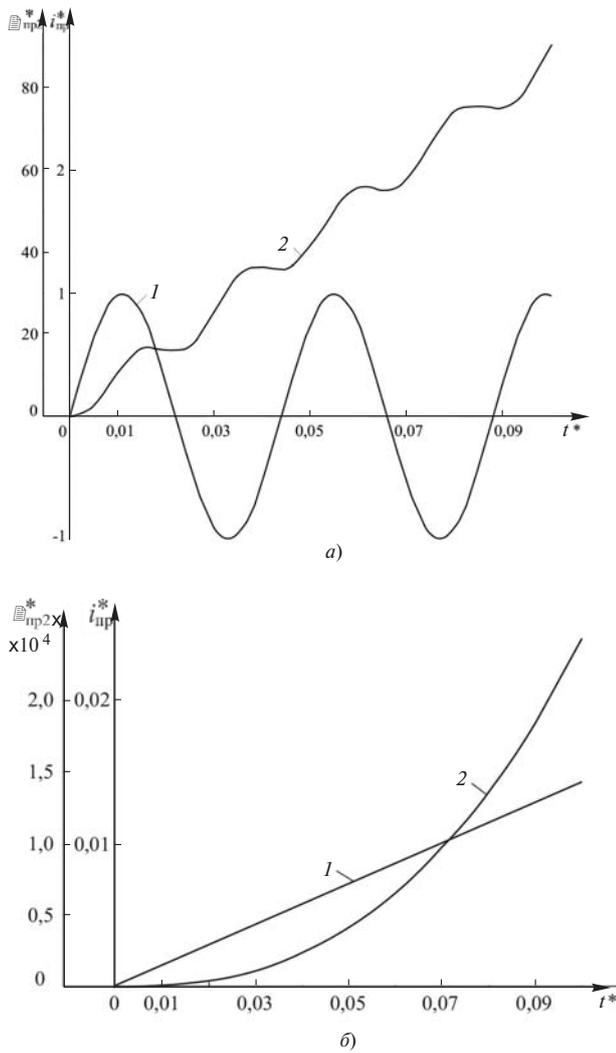
где  $\theta_{\text{пр2}}^*(t^*) = \theta_{\text{пр2}}(t^*) / \theta_b$ ;  $\theta_{\text{пр3}}^*(t^*) = \theta_{\text{пр3}}(t^*) / \theta_b$ ;  
 $\Delta_T^* = \Delta_T / b$ ;  $\Delta_9^* = \Delta_9 / b$ .

Из (11)–(13) следует, что при  $\Delta_T^* = 1$  или  $\Delta_9^* = 1$  соотношения (12) и (13) для круглого проводника переходят в (11), и в этом случае импульсное тепловыделение будет происходить по его всему поперечному сечению  $S_{\text{пр}}$ . Отметим, что расчетные формулы (11)–(13) соответствуют электротеплотехническому подходу, характеризующемуся в отличие от известных результатов расчета максимальной температуры  $\theta_{\text{пр}}(t)$  нагрева наружной металлической поверхности массивного немагнитного однородного проводника по формуле (10.85) из [4] (также при постоянстве удельной электропроводности  $\gamma_0$  материала проводника и отсутствии теплообмена между проводником и воздушной средой и его горячими и холодными слоями) неустановившимся характером температуры джоулевого нагрева исследуемого тонкого ( $\Delta_T^* \geq 1$  и  $\Delta_9^* \geq 1$ ) или массивного ( $\Delta_T^* \ll 1$  и  $\Delta_9^* \ll 1$ ) проводника и учетом влияния на нее степени проявления в проводнике нестационарного линейного ПЭ. Из (12) и (13) видно, что при одинаковых значениях  $b$ ,  $\gamma_0 = \gamma_2$ ,  $c_0$ ,  $\lambda_0$  и  $I_m$ , но разных  $\omega^*$  (для разной степени проявления переходного ПЭ в проводнике) и характерного для массивных металлических проводников соотношения  $\Delta_T^* \ll 1$  или  $\Delta_9^* \ll 1$ , с увеличением круговой частоты  $\omega$  импульсного синусоидального тока  $i_{\text{пр}}(t)$  согласно (10) и соответственно с уменьшением толщины термического  $\Delta_T$  или электрического  $\Delta_9$  скин-слоев проводника по сравнению с тонким цилиндрическим проводником, максимальная температура нагрева которого  $\theta_{\text{пр1}}(t^*)$  описывается расчетным соотношением (11), в рассматриваемом приближении следует ожидать значительного возрастания значений максимальных температур

$\theta_{\text{пр2}}(t^*)$  и  $\theta_{\text{пр3}}(t^*)$  нестационарного нагрева наружной металлической поверхности массивного круглого цилиндрического проводника.

Проведенный с помощью выражений (11)–(13) и ПЭВМ численный эксперимент показал, что при числе членов в их рядах, равном  $k=100$ , погрешность расчета  $\theta_{\text{пр1}}^*(t^*)$ ,  $\theta_{\text{пр2}}^*(t^*)$  и  $\theta_{\text{пр3}}^*(t^*)$  существенно меньше 1%. При  $k=10$  данная погрешность для принятого закона изменения импульсного тока  $i_{\text{пр}}(t)$  и использования в силовых электрических цепях массивных металлических проводников составляет около 5%. На рис. 2,а приведена графическая зависимость (кривая 2), иллюстрирующая в неустановившемся режиме согласно (12) изменение во времени  $t^*$  безразмерной максимальной температуры  $\theta_{\text{пр2}}^*(t^*)$  для наружной поверхности массивного сплошного круглого медного провода, эквивалентного круглой медной жиле крупногабаритного радиочастотного кабеля марки РК 75-33-15 [5,20] ( $\gamma_2 = 5,81 \cdot 10^7$  См/м;  $c_0 = 3,92 \cdot 10^6$  Дж/(м<sup>3</sup>·°C);  $\lambda_0 = 400$  Дж/(м·с·°C);  $b = 2,5 \cdot 10^3$  м;  $t_b = 456,31 \cdot 10^{-6}$  с;  $\Delta_T^* = 0,01$ ;  $k=100$ ), по которому в соответствии с (10) и кривой 1 протекает безразмерный высокочастотный импульсный аксиальный синусоидальный ток  $i_{\text{пр}}^*(t^*) = i_{\text{пр}}(t^*) / I_m$  частотой 50 кГц ( $I_m = 100 \cdot 10^3$  А;  $\omega = 314 \cdot 10^3$  с<sup>-1</sup>;  $\omega^* = 143,3$ ;  $\theta_b = 6,496$  °C). На рис. 2,б представлена временная зависимость максимальной температуры  $\theta_{\text{пр2}}^*(t^*)$  для той же медной жилы (кривая 2), испытывающей воздействие низкочастотного импульсного синусоидального тока  $i_{\text{пр}}^*$  частотой 50 Гц аналогичной амплитуды ( $I_m = 100 \cdot 10^3$  А;  $\omega = 314$  с<sup>-1</sup>;  $\omega^* = 0,1433$ ;  $\theta_b = 6,496$  °C;  $t_b = 456,31 \cdot 10^{-6}$  с;  $\Delta_T^* = 0,322$ ;  $k=100$ ).

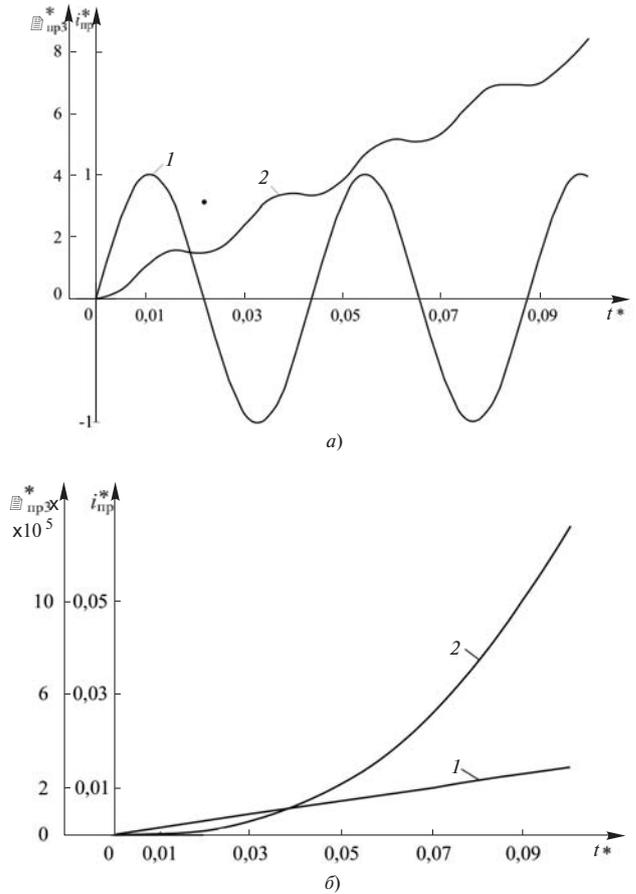
Из рис. 2,а видно, что в переходном режиме джоулев нагрев высокочастотным синусоидальным током медной жилы кабеля имеет нарастающий во времени  $t^*$  (от предыдущей полуволны к последующей полуволне тока) ступенчатый характер. К концу первой полуволны ( $t^* = 0,022$ ) принятого высокочастотного импульсного тока  $i_{\text{пр}}(t^*)$  безразмерная температура наружной поверхности медной жилы при  $\theta_0 = 0$  °C достигает  $\theta_{\text{пр2}}^*(t^*) = 16,0$ , что соответствует 103,9 °C (кривая 2 на рис. 2,а). Для того же значения  $t^* = 0,022$  ( $t = 10$  мкс) такая температура этой жилы при протекании по ней в неустановившемся режиме указанного низкочастотного тока не



**Рис. 2.** Временные зависимости температуры  $\theta_{\text{пр}2}^*(t^*)$  по формуле (12) для медной жилы кабеля РК 75-33-15, нагреваемой в переходном режиме высокочастотным (а) и низкочастотным (б) импульсным синусоидальным током  $i_{\text{пр}}^*(t^*)$  (1 – ток  $i_{\text{пр}}^*$ ; 2 – температура  $\theta_{\text{пр}2}^*$ )

превышает мало значения, составляющего  $0,38 \cdot 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}$  (кривая 2 на рис. 2,б).

На рис. 3,а кривой 2 представлен график изменения во времени  $t^*$  в соответствии с формулой (13) при  $k=100$  безразмерной максимальной температуры  $\theta_{\text{пр}3}^*(t^*)$  для наружной поверхности массивной сплошной круглой медной жилы рассматриваемого кабеля, испытывающего в импульсном режиме воздействие высокочастотного синусоидального тока (кривая 1) с использованными выше его АВП ( $I_m=100 \text{ кА}$ ;  $\omega=314 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ ;  $\omega^*=143,3$ ;  $\theta_b=6,496 \text{ }^\circ\text{C}$ ;  $t_b=456,31 \cdot 10^{-6} \text{ с}$ ;  $\Delta_3^*=0,118$ ). В этом случае температура нагрева медной жилы оказывается практически на порядок меньше ее температуры, найденной по формуле (12). Точкой на рис. 3,а



**Рис. 3.** Временные зависимости температуры  $\theta_{\text{пр}3}^*(t^*)$  по формуле (13) для медной жилы кабеля РК 75-33-15, нагреваемой в переходном режиме высокочастотным (а) и низкочастотным (б) импульсным синусоидальным током  $i_{\text{пр}}^*(t^*)$  (1 – ток  $i_{\text{пр}}^*$ ; 2 – температура  $\theta_{\text{пр}3}^*$ )

отмечена температура  $\theta_{\text{пр}3}^*(\pi/\omega^*)=\pi$  в установившемся режиме, найденная по известной формуле (10.85) из [4] и достигаемая цилиндрической поверхностью массивного медного проводника после протекания по нему первой полуволны указанного тока. Из рис. 3,а следует, что в переходном режиме протекания по металлическому проводнику синусоидального тока по сравнению с установившимся режимом температура джоулева нагрева его проводящего материала на участке первой токовой полуволны характеризуется существенно меньшими значениями (при  $t^*=0,022$  это расхождение согласно формуле (13) и кривой 2 на рис. 3,а в 2 раза больше). Такой результат для величины  $\theta_{\text{пр}3}^*(\pi/\omega^*)$  хорошо коррелирует с результатами численного расчета в нестационарном режиме максимальной температуры нагрева массивных проводников большими импульсными токами, получаемыми при разряде мощных емкостных накопителей энергии [8, 21].

При использовании (13) и протекании по исследуемой медной жиле ( $b=2,5 \cdot 10^{-3}$  м;  $S_{\text{пр}}=19,63 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>) низкочастотного синусоидального тока  $i_{\text{пр}}(t^*)$  частотой 50 Гц ( $I_m=100$  кА;  $\omega=314$  с<sup>-1</sup>;  $\omega^*=0,1433$ ;  $\theta_b=6,496^\circ\text{C}$ ;  $t_b=456,31 \cdot 10^{-6}$  с;  $\Delta_{\Sigma}^*=1,0$ ;  $k=100$ ) значение температуры  $\theta_{\text{пр}3}^*(t^*)$  ее импульсного нагрева, как и в случае применения расчетной формулы (12), согласно данным рис. 3,б для  $t^*=0,022$  ( $t=10$  мкс) незначительно: около  $0,28 \cdot 10^{-4}$  °C (кривая 2). К концу первой полуволны такого аварийного переменного тока (при  $t^*=21,93$  или  $t=10$  мс) в соответствии с (13) температура  $\theta_{\text{пр}3}(t^*)$  для рассматриваемой круглой медной жилы при  $\theta_0=0$  °C достигает большого значения, примерно равного 570 °C (при  $\theta_{\text{пр}3}^*(\pi/\omega^*)=87,71$ ).

На рис. 4 кривая 2 характеризует временную зависимость в неустановившемся режиме безразмерной максимальной температуры  $\theta_{\text{пр}1}^*(t^*)$  круглой медной жилы радиочастотного кабеля марки РК 75-33-15, рассчитанную по (11) при  $k=100$  и импульсном воздействии на нее высокочастотного синусоидального тока частотой 50 кГц (кривая 1) с ранее упомянутыми АВП. Из этого рисунка видно, что искомая температура  $\theta_{\text{пр}1}(t^*)$  рассматриваемого токопровода, при расчете которой, а также значения нагреваемого объема  $V_{\text{пр}}^*$  было учтено полное поперечное сечение жилы  $S_{\text{пр}}=\pi b^2=19,63$  мм<sup>2</sup>, более чем в 4 раза меньше значения аналогичной

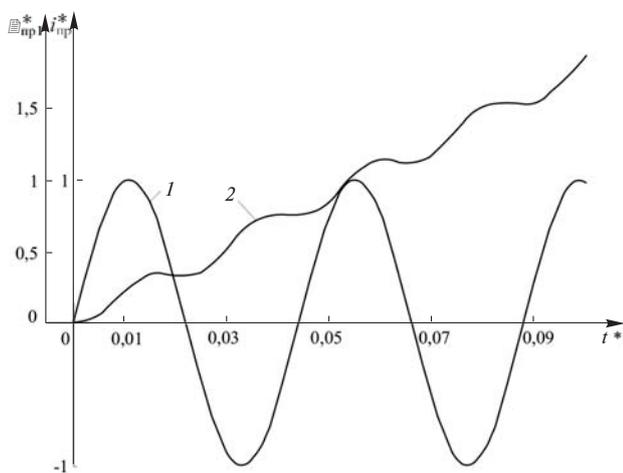


Рис. 4. Временная зависимость температуры  $\theta_{\text{пр}1}^*(t^*)$  по формуле (11) для медной жилы кабеля РК 75-33-15, нагреваемой в переходном режиме высокочастотным импульсным синусоидальным током  $i_{\text{пр}}^*(t^*)$  (1—ток  $i_{\text{пр}}^*$ ; 2 — температура  $\theta_{\text{пр}1}^*$ )

температуры  $\theta_{\text{пр}3}(t^*)$ , найденного по (13) при использовании ее нагреваемого импульсным током поперечного сечения, определенного на базе толщины  $\Delta_{\Sigma}$  электрического скин-слоя (кривая 2 на рис. 3,а). Так, к концу протекания в импульсном режиме по данной круглой медной жиле первой полуволны высокочастотного синусоидального тока ( $I_m=100$  кА;  $\omega=314 \cdot 10^3$  с<sup>-1</sup>;  $\omega^*=143,3$ ;  $\theta_b=6,496$  °C;  $t_b=456,31 \cdot 10^{-6}$  с;  $\Delta_T^*=0,01$ ;  $\Delta_{\Sigma}^*=0,118$ ) ее безразмерная температура  $\theta_{\text{пр}1}^*(t^*)$  при  $t^*=0,022$  ( $t=10$  мкс) и  $\theta_0=0$  °C характеризуется незначительным численным значением, составляющим около 0,34 ( $\theta_{\text{пр}1}(\pi/\omega^*)=2,2$  °C).

Характер изменения для случая применения расчетной формулы (11) безразмерной температуры  $\theta_{\text{пр}1}^*(t^*)=\theta_{\text{пр}3}^*(t^*)$  в поперечном сечении  $S_{\text{пр}}$  рассматриваемой медной жилы на начальном участке первой четверти периода воздействующего на нее низкочастотного синусоидального тока  $i_{\text{пр}}(t^*)$  частотой 50 Гц ( $I_m=100$  кА;  $\omega=314$  с<sup>-1</sup>;  $\omega^*=0,1433$ ;  $\theta_b=6,496$  °C;  $t_b=456,31 \cdot 10^{-6}$  с;  $\Delta_{\Sigma}^*=1,0$ ) иллюстрирует кривая 2 на рис. 3,б.

Из анализа представленных кривых на рис. 2–4 следует, что использование в предлагаемом соотношении (9) нагреваемого импульсным током  $i_{\text{пр}}(t)$  с различными АВП объема  $V_{\text{пр}}^*$  металлического проводника, выбираемого на основе площади его поперечного сечения, определяемой толщиной  $\Delta_T$  термического скин-слоя (например по формуле (12) для его цилиндрической формы), приводит к существенно завышенным расчетным значениям максимальной температуры нагрева  $\theta_{\text{пр}}(t)$  проводника в неустановившемся режиме. Выбор в (9) значения нагреваемого объема  $V_{\text{пр}}^*$ , учитывающий полную площадь поперечного сечения  $S_{\text{пр}}$  проводника и проиллюстрированный формулой (11) для его круглой конфигурации, обуславливает получение существенно заниженных в импульсном режиме его нагрева расчетных данных для температуры  $\theta_{\text{пр}}(t)$ . Использование толщины  $\Delta_{\Sigma}$  электрического скин-слоя проводника при выборе значения его объема  $V_{\text{пр}}^*$  импульсного джоулевого тепловыделения, характеризуемое с помощью формулы (13), является для предлагаемого метода расчета максимальной температуры  $\theta_{\text{пр}}(t)$  нагрева проводника наиболее целесообразным.

**Выводы.** 1. Предложен приближенный метод аналитического определения в неустановившемся режиме максимальной температуры  $\theta_{\text{пр}}(t)$  адиабатического нагрева немагнитного однородного металлического проводника произвольного поперечного сечения  $S_{\text{пр}}$  импульсным электрическим током  $i_{\text{пр}}(t)$  с заданными АВП, базирующийся на понятии переходного электрического сопротивления  $Z_{\text{пр}}(t)$  проводника и учитывающий проявление нестационарного линейного скин-эффекта в проводнике и импульсное джоулево тепловыделение как в термическом или электрическом скин-слое его материала, так и в полном поперечном сечении проводника.

2. Полученное для максимальной температуры  $\theta_{\text{пр}}(t)$  указанного проводника расчетное соотношение (9) позволяет в принятом приближении осуществлять оперативную оценку теплового состояния его металлических поверхностей на любом временном участке протекания по нему импульсного электрического тока  $i_{\text{пр}}(t)$  с произвольными АВП как для случая тонкого проводника (толщина термического  $\Delta_T$  или электрического  $\Delta_{\Sigma}$  скин-слоя больше его поперечных размеров), так и для случая массивного проводника (толщина  $\Delta_T$  и  $\Delta_{\Sigma}$  скин-слоев меньше его поперечных размеров).

3. При приближенном расчете в нестационарном режиме максимальной температуры  $\theta_{\text{пр}}(t)$  кратковременного джоулева нагрева рассматриваемого проводника с различными значениями его поперечного сечения  $S_{\text{пр}}$  по предлагаемому соотношению (9) для выбора в материале проводника значения объема  $V_{\text{пр}}^*$  импульсного джоулева тепловыделения от протекания по нему заданного импульсного электрического тока  $i_{\text{пр}}(t)$  рекомендуется использовать толщину  $\Delta_{\Sigma}$  его электрического скин-слоя и обусловленное ею значение кратковременно нагреваемого поперечного сечения проводника.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нейман Л.Р., Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники: Учебник для вузов. Т. 1.— Л.: Энергоиздат, 1981.
2. Мельник Ю.А., Стогов Г.В. Основы радиотехники и радиотехнические устройства.— М.: Советское радио, 1973.
3. Техника высоких напряжений/Под общей ред. Г.С. Кучинского.— Санкт-Петербург: Изд-во ПЭИПК, 1998.
4. Техника больших импульсных токов и магнитных полей/Под ред. В.С. Комелькова.— М.: Атомиздат, 1970.
5. Кнопфель Г. Сверхсильные импульсные магнитные поля.— М.: Мир, 1972.
6. Месяц Г.А. Импульсная энергетика и электроника.— М.: Наука, 2004.
7. Михайлов В.М. Импульсные электромагнитные поля.— Харьков: Вища школа, 1979.
8. Баранов М.И. Избранные вопросы электрофизики: Монография. Т. 2, кн. 2: Теория электрофизических эффектов и задач.— Харьков: Изд-во НТУ «ХПИ», 2010.
9. Чальян К.М. Методы расчета электромагнитных параметров токопроводов.— М.: Энергоатомиздат, 1990.
10. Шнейерсон Г.А. Поля и переходные процессы в аппаратуре сверхсильных токов.— Л.: Энергоиздат, 1981.
11. Михайлов В.М. Электромагнитные и тепловые процессы в проводниках при получении сильных импульсных магнитных полей. — Электричество, 1977, №5.
12. Баранов М.И., Бондина Н.Н. Нестационарные электромагнитные и тепловые процессы в цилиндрических проводниках при воздействии на них тока молнии. — Электричество, 1992, №10.
13. Баранов М.И., Бондина Н.Н. Переходное сопротивление массивных токопроводов высоковольтных электрофизических установок для получения больших импульсных токов. — Электротехника и электромеханика (Харьков), 2002, №1.
14. Баранов М.И. Избранные вопросы электрофизики: Монография. Т. 2, кн. 1: Теория электрофизических эффектов и задач.— Харьков: Изд-во НТУ «ХПИ», 2009.
15. Кухлинг Х. Справочник по физике/Пер. с нем. под ред. Е.М. Лейкина.— М.: Мир, 1982.
16. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров/Пер. с франц. под общ. ред. К.С. Шифрина.— М.: Наука, 1965.
17. Баранов М.И. Избранные вопросы электрофизики: Монография. Т. 1: Электрофизика и выдающиеся физики мира.— Харьков: Изд-во НТУ «ХПИ», 2008.
18. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции/Пер. с нем. под ред. Л.И. Седова. — М.: Наука, 1977.
19. Баранов М.И., Бондина Н.Н. О применении и численном решении некоторых типов специальных уравнений в теории расчета электротехнических устройств с импульсными электромагнитными полями. — Теоретическая электротехника (Львов), 1988, №44.
20. Белоруссов Н.И., Саакян А.Е., Яковлева А.И. Электрические кабели, провода и шнуры: Справочник/Под ред. Н.И. Белоруссова.— М.: Энергоатомиздат, 1988.
21. Баранов М.И., Бондина Н.Н., Бочаров В.А. Моделирование нелинейной электротепловой задачи для цилиндрических изотропных токопроводов электрофизических установок при получении больших импульсных токов. — Технічна електродинаміка (Киев), 1998, №4.

[16.09.10]

*А в т о р ы : Баранов Михаил Иванович окончил в 1972 г. инженерно-физический факультет Харьковского политехнического института (ныне НТУ «ХПИ») по специальности «Инженерная электрофизика». В 1999 г. в НТУ «ХПИ» защитил докторскую диссертацию «Переходные процессы при воздействии больших импульсных токов и сильных импульсных магнитных полей на проводящие объекты». Заведующий отделом электромагнитных испытаний Научно-исследовательского и проектно-конструкторского института (НИПКИ) «Молния» НТУ «ХПИ», старший научный сотрудник, профессор НТУ «ХПИ».*

*Носенко Марина Александровна окончила в 1997 г. физико-технический факультет НТУ «ХПИ» по специальности «Инженерная электрофизика» и в дальнейшем аспирантуру при этом университете по специальности «Техника сильных электрических и магнитных полей». Научный сотрудник отдела электромагнитных испытаний НИПКИ «Молния» НТУ «ХПИ».*