

Свойства точек экстремума на зависимости электрического сопротивления проводника от толщины покрытия на высокой частоте

МОРОЗОВ В.А.

Рассмотрена зависимость активного электрического сопротивления проводника от толщины покрытия на высокой частоте, на которой выявлено несколько точек экстремума. Показано, что точки экстремума соответствуют толщине покрытия, кратной четверти длины электромагнитной волны в материале покрытия, причем экстремумы с нечетными числами кратности являются минимумами, а с четными — максимумами, если коэффициент отражения электрического поля от границы «покрытие—проводник» положителен. Если коэффициент отражения отрицателен, то экстремумы с нечетными числами кратности являются максимумами, а с четными — минимумами.

Ключевые слова: *скин-эффект, проводник, покрытие, электрическое сопротивление, высокая частота, электромагнитная волна, точка экстремума*

В [1] приведены результаты исследования активного электрического сопротивления проводника (АЭСР) с покрытием на высокой частоте (ВЧ). Было выявлено, что зависимость сопротивления проводника от толщины покрытия имеет точку экстремума при толщине покрытия $z_{1\text{ext}} \approx \pi\delta_1 / 2$, где δ_1 — глубина скин-слоя покрытия. Причем, является ли экстремум максимумом или минимумом, определяется электромагнитными свойствами материалов проводника и покрытия. В этой же публикации приводятся графики зависимости АЭСР на частоте 13,56 МГц от толщины покрытия для проводника из меди, покрытого серебром, а также проводника из серебра, покрытого медью, которые имеют по две точки экстремума. В известной монографии К. Шимони [2] также приведены графики АЭСР от толщины покрытия, на которых имеются две точки экстремума, причем они соответствуют толщине покрытия $1,5\delta_1$ и $3,0\delta_1$. Обратим внимание на то, что в [1, 2] не раскрыта физическая сущность процессов, приводящих к появлению экстремумов. Цель настоящей статьи — устранение этого пробела.

The dependence of a conductor's electrical resistance at high frequency on the thickness of its coating is analyzed, which is found to have a few extreme points. It is shown that the extreme points correspond to the thickness of coating multiple of the quarter length of electromagnetic wave in the coating material. The extremes corresponding to odd multiple values are minimums and those with even multiple values are maximums if the electric field reflection ratio from the coating-conductor boundary is positive. If the reflection ratio is negative, the extremes with odd multiplicity numbers are maximums and those with even numbers are minimums.

Key words: *conductor, coating, electrical resistance, skin effect, high frequency, electromagnetic wave, extreme point*

Напомним, что в [1] предложена модель, описывающая поглощение энергии покрытым проводником при равномерном распределении тока по периметру его поперечного сечения (плоского, ширина которого много больше толщины, цилиндрического и трубчатого, для которых соответственно толщина, диаметр и толщина стенки много больше глубины скин-слоя материала проводника δ_2). В соответствии с моделью передача энергии производится электромагнитным полем. Направление передачи определяется проводниками, задающими граничные условия по полю. Часть передаваемой энергии проникает в покрытие проводника из окружающего проводник пространства. В покрытии распространяется затухающая электромагнитная волна, представляющая собой суперпозицию падающей и отраженной от границы покрытие—проводник волн, а в проводнике — затухающая волна, прошедшая через эту границу. Отсюда можно предположить, что экстремумы на зависимости АЭСР от толщины покрытия z_1 существуют вследствие отражения электромагнитной волны от границы покрытие—проводник. Действительно, в [1] получено выражение, описывающее удельное по-

верхностное сопротивление (УПС) проводника с покрытием на ВЧ R_{ss}^{coat} , численный анализ которого показал следующее: практически всегда существует экстремальное значение z_{1ext} для АЭСП при изменении толщины покрытия. Причем минимум отмечается при выполнении условия

$$\rho_2 \mu_{r2} > \rho_1 \mu_{r1} \quad (1)$$

и максимум, если

$$\rho_2 \mu_{r2} < \rho_1 \mu_{r1}, \quad (2)$$

и экстремума нет, если

$$\rho_2 \mu_{r2} = \rho_1 \mu_{r1}, \quad (3)$$

где ρ – удельное электрическое сопротивление материала; μ_r – относительная магнитная проницаемость материала; 1 и 2 – индексы, определяющие отношение параметров к материалам покрытия и проводника соответственно.

В этой же статье дано выражение для коэффициента отражения k_r электрического поля от границы покрытие–проводник:

$$k_r = \frac{\sqrt{\rho_2 \mu_{r2}} - \sqrt{\rho_1 \mu_{r1}}}{\sqrt{\rho_2 \mu_{r2}} + \sqrt{\rho_1 \mu_{r1}}}. \quad (4)$$

Обратим внимание, что с учетом формулы (4), выражений (1)–(3) точка экстремума является минимумом, если $k_r > 1$, максимумом, если $k_r < 1$, и экстремума нет, если $k_r = 0$.

Исследуем АЭСП с покрытием на экстремум учитывая, что его сопротивление зависит от z_1 только по параметру R_{ss}^{coat} [1]. Выражение для УПС проводника с покрытием выглядит так [3]:

$$R_{ss}^{coat} = \frac{\rho_1 \left\{ 1 + \exp\left(-\frac{2z_1}{\delta_1}\right) \left[k_r^2 \left(1 - \exp\left(-\frac{2z_1}{\delta_1}\right) \right) \right] + \right.}{\delta_1 \left\{ 1 + \exp\left(-\frac{2z_1}{\delta_1}\right) \left[k_r^2 \exp\left(-\frac{2z_1}{\delta_1}\right) - 2k_r \cos\left(\frac{2z_1}{\delta_1}\right) \right] \right\}} \rightarrow$$

$$\left. \frac{+ 2k_r \sin\left(\frac{2z_1}{\delta_1}\right) + \frac{\rho_1 \delta_2 (1 + k_r)^2}{\rho_2 \delta_1} - 1 \right\}}, \quad (5)$$

где

$$\delta = \sqrt{\frac{2\rho}{\mu_0 \mu_r \omega}}, \quad (6)$$

μ_0 – магнитная постоянная; ω – угловая частота колебаний электромагнитного поля.

На рис. 1 и 2 показаны рассчитанные по формулам (4)–(6) на частоте 13,56 МГц¹ зависимости R_{ss}^{coat} и dR_{ss}^{coat}/dz_1 от z_1 . Материалы покрытия и проводника – серебро ($\rho = 1,59 \cdot 10^{-2}$ Ом·мкм, $\mu_r = 1$ [4, 5]) и медь ($\rho = 1,67 \cdot 10^{-2}$ Ом·мкм, $\mu_r = 1$ [4, 5]). На рис. 1 каждая из кривых 1 и 2 в рассматриваемом интервале изменения z_1 имеет по две точки экстремума. Для проводника из меди, покрытого серебром (кривая 1), точки экстремума соответствуют покрытию толщиной $z_{1min} \approx 27,1$ мкм и $z_{1max} \approx 54,1$ мкм, а для проводника из серебра, покрытого медью (кривая 2), – $z_{1max} \approx 27,7$ мкм и $z_{1min} \approx 55,5$ мкм. Как и следовало ожидать, эти же значения толщины покрытия соответствуют равенству нулю производной R_{ss}^{coat} по z_1 (рис. 2), а толщина покрытия, соответствующая точке экстремума, кратна $\pi\delta_1/2$. Это следует из того, что на частоте 13,56 МГц глубина скин-слоя серебра, определенная по выражению (6), равна 17,23 мкм, а $\pi\delta_1/2 \approx 27,1$ мкм и $\pi\delta_1 \approx 54,1$ мкм. Аналогичная зависимость наблюдается и для меди ($\delta_1 \approx 17,66$ мкм, $\pi\delta_1/2 \approx 27,7$ мкм и $\pi\delta_1 \approx 55,5$ мкм). «...Заметим, что точка $z_1 = 0$ для зависимости R_{ss}^{coat} не является экстремальной, так как для нее не выполняется условие существования экстремума» [6, с. 43].

Покажем, что точки экстремума на зависимости АЭСП от толщины покрытия соответствуют толщине, кратной $\pi\delta_1/2$ не только на частоте 13,56 МГц, но и на любой другой. Отметим, что периодичность точек экстремума на кривой УПС объясняется присутствием в формуле (5) функций синуса и косинуса. Действительно, если для их аргумента выполняется условие $2z_1/\delta_1 = n\pi$, где n – положительное целое число, то $\sin\left(\frac{2z_1}{\delta_1}\right) = 0$, а $\left| \cos\left(\frac{2z_1}{\delta_1}\right) \right| = 1$. Отсюда следует, что экстремальная толщина покрытия

$$z_{1ext} = n\pi\delta_1/2. \quad (7)$$

Заметим, что функция $\cos(2z_1/\delta_1)$ для $z_1 = z_{1ext}$ имеет точки экстремума, поэтому в соответствии с (5) неравенство $k_r \cos(n\pi) < 0$ определяет номера экстремумов n (чисел кратности), являющихся точками минимума, а $k_r \cos(n\pi) > 0$ – номера экстремумов, являющихся максимумами. Например, для проводника из меди, покрытого серебром, значение $k_r > 0$, поэтому все четные экстремумы на зави-

¹ Широко применяемая частота в промышленности, научных исследованиях и медицине.

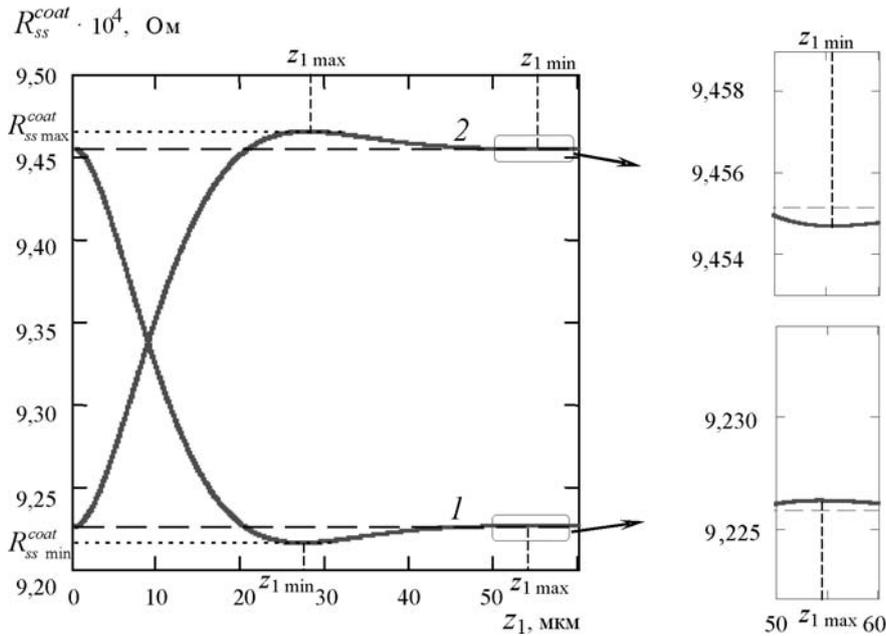


Рис. 1. Расчетные зависимости удельного поверхностного сопротивления R_{ss}^{coat} от толщины покрытия z_1 на частоте 13,56 МГц: 1 – медный проводник, покрытие – серебро; 2 – серебряный проводник, покрытие – медь

симости R_{ss}^{coat} от z_1 – максимумы, а нечетные – минимумы (см. кривую 1 на рис. 1).

Точек экстремума на кривой зависимости АЭСП от z_1 много. Однако с практической точки зрения интересен первый экстремум, так как он соответствует небольшой толщине покрытия, а экстремумы более высокого порядка выражены

слабо и быстро вырождаются из-за уменьшения доли энергии электромагнитной волны, перераспределяемой на границе покрытие–проводник с увеличением толщины покрытия. Таким образом, с увеличением значения z_1 точки экстремума колеблются около горизонтальной асимптоты, определяемой УПС материала покрытия, приближаясь к ней.

Экстремальную толщину покрытия можно определить через длину электромагнитной волны в покрытии. Длина волны в металле определяется по формуле $\lambda = 2\pi\delta$ [7]. Таким образом, как следует из (7), экстремальная толщина покрытия кратна одной четвертой длины волны в материале покрытия, т.е.

$$z_{1ext} = n\lambda_1 / 4. \tag{8}$$

В соответствии с (7) и (8) экстремальная толщина покрытия зависит только от электромагнитных свойств материала покрытия, частоты колебаний электромагнитного поля и номера экстремума, но не зависит от свойств материала проводника.

В то же время, подставляя в (5) вместо z_1 значение z_{1ext} по (7), приходим к выражению, описывающему УПС проводника с покрытием в точках экстремума,

$$R_{ssext}^{coat} = \frac{\rho_1 \left\{ 1 + \exp(-n\pi) \times \left[k_r^2 (1 - \exp(-n\pi)) + \frac{\rho_1 \delta_2 (1 + k_r)^2}{\rho_2 \delta_1} - 1 \right] \right\}}{\delta_1 \{ 1 + \exp(-n\pi) \times [k_r^2 \exp(-n\pi) - 2k_r \cos(n\pi)] \}}, \tag{9}$$

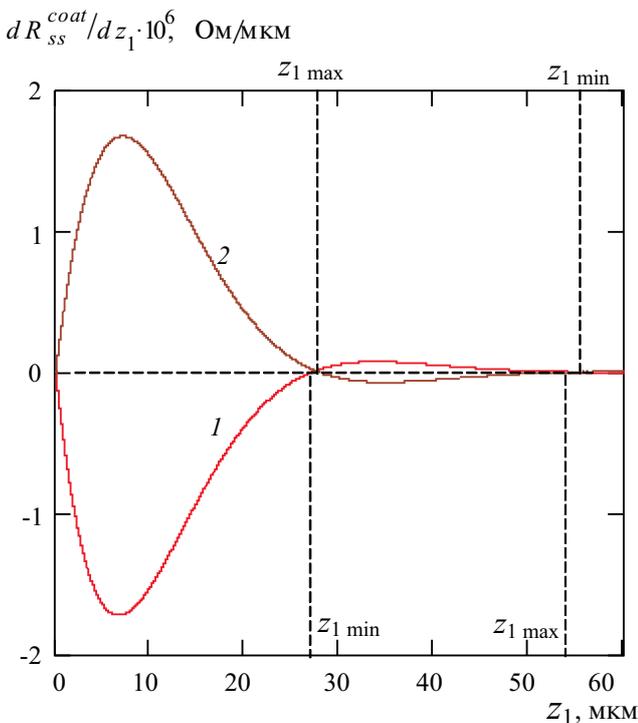


Рис. 2. Расчетные зависимости dR_{ss}^{coat} / dz_1 от толщины покрытия z_1 на частоте 13,56 МГц: 1 – медный проводник, покрытие – серебро; 2 – серебряный проводник, покрытие – медь

из которого вытекает, что экстремальные значения УПС, а значит и АЭСП, определяются электромагнитными свойствами материалов покрытия и проводника, частотой колебаний электромагнитного поля и номером экстремума.

Представленный выше результат можно использовать для исследования удельного электрического сопротивления металлов на ВЧ. Действительно, если в уравнение (7) подставить (6) и решить полученное выражение относительно ρ_1 , то получим

$$\rho_1 = \frac{2}{\pi^2} \mu_0 \mu_{r1} \omega \left(\frac{z_{1\text{ext}}}{n} \right)^2.$$

Отсюда следует, что удельное электрическое сопротивление материала покрытия можно определить по известной магнитной проницаемости μ_{r1} , угловой частоте колебаний электромагнитного поля ω , экстремальной толщине покрытия $z_{1\text{ext}}$ и номеру экстремума n .

Результаты этой работы применимы для оптимизации покрытых проводников, используемых на одной или нескольких частотах. Оптимизация проводится как для улучшения, так и для ухудшения АЭСП на ВЧ или СВЧ. Алгоритм оптимизации следующий:

1. Составляется перечень материалов, предназначенных для изготовления проводника.
2. Для каждого материала проводника подбираются покрытия, улучшающие ($k_p > 0, n=1$) или ухудшающие ($k_p < 0, n=1$) АЭСП с покрытием.
3. Для каждого возможного сочетания материалов проводника и покрытия по формулам (4), (6) и (9) рассчитывается УПС в точках экстремума.
4. Выбирается сочетание материалов, для которого УПС в точке экстремума имеет наименьшее или наибольшее значение.
5. По выражению (7) определяется экстремальная толщина покрытия.
6. Периметр поперечного сечения проводника рассчитывается в соответствии с методикой, приведенной в статье [3], с учетом экстремального значения УПС.

Оптимизация покрытых проводников, используемых на нескольких частотах, проводится по наименьшей частоте. Оптимизация проводников,

используемых для одновременной передачи нескольких гармонических сигналов или периодических негармонических сигналов, осуществляется исследованием на экстремум функции, описывающей омические потери в покрытом проводнике по z_1 , и в настоящей статье не рассматривается.

Выводы. 1. Точки экстремума на зависимости активного электрического сопротивления от толщины покрытия на ВЧ существуют из-за перераспределения потерь энергии и тока между покрытием и проводником вследствие отражения электромагнитной волны от границы покрытие–проводник.

2. Точки экстремума соответствуют покрытию, толщина которого кратна одной четвертой длины электромагнитной волны в материале покрытия.

3. Тип экстремума (минимум или максимум) определяется знаком коэффициента отражения электрического поля от границы покрытие–проводник и номером экстремума.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Морозов В.А., Михеев Г.М. Исследование активного сопротивления проводника с покрытием на высокой частоте. — Электротехника, 2004, № 3.
2. Шимони К. Теоретическая электротехника/Пер. с нем. под ред. К.М. Поливанова. — М.: Мир, 1964.
3. Морозов В.А., Михеев Г.М. Простой расчет поперечного сечения электрического провода на низких и высоких частотах. — Электротехника, 2005, № 4.
4. **Материалы** в приборостроении и автоматике: Справочник/Под ред. Ю.М. Пятинина. — М.: Машиностроение, 1982.
5. Кошкин Н.И., Ширкевич М.Г. Справочник по элементарной физике. — М.: Наука, 1980.
6. Егерев В.К., Радунский Б.А., Тальский Д.А. Методика построения графиков функций. — М.: Высшая школа, 1970.
7. Пейн Г. Физика колебаний и волн/Пер. с англ. — М.: Мир, 1979.

[24.06.10]

Автор: Морозов Виктор Александрович окончил приборостроительный факультет Ижевского механического института в 1979 г. В 2007 г. защитил кандидатскую диссертацию «Высокочастотные нагрузочные системы для емкостного возбуждения плазмы» в Удмуртском государственном университете. Начальник конструкторского бюро отдела «Аналитические приборы и комплексы» ОАО «Ижевский электромеханический завод «Купол».