

# Типовые базовые ячейки-многополюсники решетчатых схем замещения плоскопараллельных электромагнитных полей

ИНКИН А.И., АЛИФЁРОВ А.И., БЛАНК А.В.

Для исследования плоскопараллельных полей эквивалентная схема замещения должна иметь решетчатую структуру и состоять из типовых многополюсников, каждый из которых моделирует определенную ячейку поля и имеет соответствующие конфигурацию и параметры. Излагаются теоретические основы формирования типовых прямоугольных ячеек-многополюсников решетчатых электромагнитных схем замещения плоскопараллельного поля и рассматриваются принципы синтеза типовых ячеек-многополюсников для различных физических полей. На основании законов и интегральных теорем электричества и магнетизма разработаны типовые ячейки-многополюсники как базовые элементы синтеза решетчатых схем замещения плоскопараллельных стационарных и синусоидальных электромагнитных полей.

Ключевые слова: силовые электроустановки, электромагнитное поле, схема замещения, анализ, расчет, схемная аппроксимация

Разработка и проектирование различных электротехнических устройств, а также их эксплуатация и усовершенствование требуют детального исследования электромагнитных и температурных полей в их активных объемах и окружающем пространстве.

К настоящему времени в отечественных и зарубежных изданиях опубликовано большое число научных работ, в которых исследования и расчеты электротепловых полей осуществляются с использованием слоистых моделей и универсальных электромагнитных и электротепловых каскадных схем замещения. Важно отметить, что конфигурация этих схем и их параметры получены в результате анализа общих решений дифференциальных уравнений теории поля.

Каскадные схемы замещения различных физических полей обеспечивают наглядное представление исследуемого поля и по существу сводят расчет поля к решению эквивалентной задачи теории цепей, что способствует их использованию в научных исследованиях и внедрению в инженерную практику.

Главным недостатком слоистых моделей электромагнитного поля, а следовательно и их каскадных схем замещения, является ограниченность возможностей при аналитическом исследовании двух- и трехмерных полей.

*An equivalent circuit intended for studying plane-parallel fields must have a lattice structure and consist of standard multiports. Each of these multiports models a certain cell of the field and has the suitable configuration and parameters. The theoretical principles used to construct the standard rectangular multiport cells of the lattice equivalent circuits of a plane-parallel electromagnetic field are described, and the principles of synthesizing the standard multiport cells for other kinds of physical fields are considered. The main goal pursued by the authors is to synthesize (in general form) an equivalent circuit with respect to the field vector components, in the given case, in the Cartesian system of coordinates for the volume of a small element ( $l \times x \times y$ ) based on the electromagnetic laws in the integral form.*

Key words: electromagnetic field, analysis and calculation methods, equivalent circuit, circuit approximation

В связи с этим научный и практический интерес представляют разработка и реализация таких методов анализа и расчета электротепловых полей, которые бы существенно расширяли возможности их схемной аппроксимации.

Сама идея расчета плоскопараллельного электромагнитного поля путем представления объема в виде совокупности продольных прямоугольных элементов не является новой. Так, например в [1], исследуемый объем разбивается на элементарные проводники с весьма малыми сечениями  $S_k$ , каждому из которых ставится в соответствие  $r$ - $L$ -цепочка, после чего весь объем представляется в виде совокупности параллельных ветвей с магнитосвязанными элементами.

Сложность применения этого метода обусловлена необходимостью для каждой конкретной задачи определять коэффициенты само- и взаимоиндукции множества элементов, что само по себе представляет достаточно непростую задачу магнитостатики.

Главная задача заключается в том, чтобы в общем виде на основе законов электромагнетизма синтезировать в интегральной форме для самого объема малого элемента ( $l' \times Dx' \times Dy$ ) схему замещения относительно составляющих векторов поля, в данном случае в декартовой системе координат.

**Типовая E-H-ячейка плоскопараллельного синусоидального электромагнитного поля.** На рис. 1,а изображена прямоугольная (Dx, Dy) ячейка в проводящей (g, m) среде. Ячейка пронизывается синусоидальным током. На рис 1,а показаны касательные составляющие векторов магнитной напряженности  $\dot{H}_1, \dot{H}_2, \dot{H}_3, \dot{H}_4$  (на контуре ячейки) и z-составляющая векторов электрической напряженности  $\dot{E}_1, \dot{E}_2, \dot{E}_3, \dot{E}_4$ .

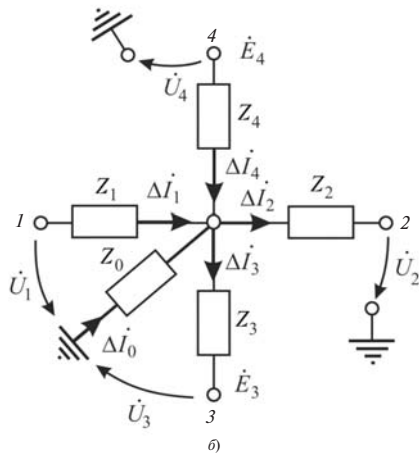
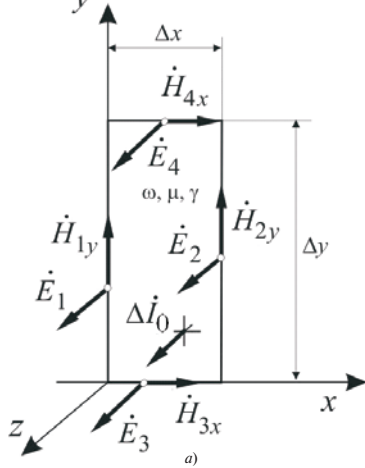


Рис. 1. E-H-ячейка плоскопараллельного синусоидального электромагнитного поля (а) и ее схема замещения (б)

В соответствии с законом полного тока

$\oint \dot{H}dl = \dot{\bar{I}}_{\text{полн}}$  при малых размерах ячейки для контура ячейки справедливо уравнение

$$-\dot{H}_{1y}Dy + \dot{H}_{2y}Dy + \dot{H}_{3x}Dx - \dot{H}_{4x}Dx = \dot{D}I_0. \quad (1)$$

Этому базовому уравнению может быть поставлена в соответствие пятиэлементная электрическая схема, представленная на рис. 1,б, где

$$\begin{aligned} \dot{D}I_1 &= \dot{H}_{1y}Dy; \quad \dot{D}I_2 = \dot{H}_{2y}Dy; \\ \dot{D}I_3 &= \dot{H}_{3x}Dx; \quad \dot{D}I_4 = \dot{H}_{4x}Dx; \end{aligned} \quad (2)$$

$\dot{D}I_0$  – ток, охваченный контуром ячейки, реальный ток в проводнике с поперечным сечением  $DS = Dx Dy$ ; сопротивления  $Z_0 - Z_4$  – не известны.

Исходя из закона электромагнитной индукции  $\oint \dot{E}dl = -j\omega \dot{\bar{B}}S = -j\omega F$ , напряжения  $U_1, U_2, U_3$  и  $U_4$  связаны с составляющими магнитного потока:

$$U_1 - U_2 = j\omega DF_y; \quad (3)$$

$$U_1 - U_2 = j\omega DF_x. \quad (3a)$$

Магнитные потоки  $DF_y$  и  $DF_x$  при малых размерах ячейки могут быть определены по средним значениям соответствующих составляющих вектора  $\dot{B}$ :

$$DF_y = m \frac{\dot{H}_{1y} + \dot{H}_{2y}}{2} Dx, \quad (4)$$

$$DF_x = m \frac{\dot{H}_{3x} + \dot{H}_{4x}}{2} Dy, \quad (4a)$$

где  $l$  – длина проводника в направлении оси Oz.

Для схемы (рис. 2) справедливы уравнения Кирхгофа:

$$U_1 - U_2 = \dot{D}I_1 Z_1 + \dot{D}I_2 Z_2 \quad (5)$$

$$U_4 - U_3 = \dot{D}I_3 Z_3 + \dot{D}I_4 Z_4. \quad (5a)$$

Из (2)–(5) имеем:

$$j\omega m \frac{\dot{H}_{1y}}{2} Dx + j\omega m \frac{\dot{H}_{2y}}{2} Dx = \dot{H}_{1y} Dy Z_1 + \dot{H}_{2y} Dy Z_2,$$

откуда

$$Z_1 = Z_2 = j\omega m \frac{Dx}{2Dy}, \quad (6)$$

аналогично

$$Z_3 = Z_4 = j\omega m \frac{Dy}{2Dx}. \quad (6a)$$

Так как  $\dot{D}I_0$  – реальный ток в проводнике длиной  $l$  с малым поперечным сечением  $DS = Dx Dy$ , в соответствии с законом Ома

$$Z_0 = \frac{l}{gDxDy}. \quad (7)$$

Полученные выражения (6), (6а) и (7) целесообразно подвергнуть тестовой проверке. Для этого рассмотрим частный случай одномерного поля  $\dot{E} = \dot{E}_z(x), \dot{H} = \dot{H}_y(x)$ . В случае одномерного поля

на рис. 2  $I_3 = I_4 = 0$ : решетчатая модель обращается в слоистую.

В [2] приведены выражения для сопротивлений при толщине расчетного слоя  $h$  и высоте  $b$ , полученные преобразованием решений уравнения Гельмгольца для вектора электрической напряженности. В частности:

$$Z_1 = Z_2 = \frac{pl}{gb} \operatorname{th} \frac{ph}{2}; \tag{8}$$

$$Z_0 = \frac{pl}{gbshph}, \tag{9}$$

где  $p = \sqrt{j\omega\mu\sigma}$ .

При достаточно малых размерах ячейки ( $h = Dx$ ,  $b = Dy$ ),  $\operatorname{th} \frac{ph}{2} \approx \frac{ph}{2}$  и  $shph \approx ph$  (8) и (9) принимают вид:

$$Z_1 = Z_2 = j\omega\mu \frac{Dx}{2Dy}; \tag{8a}$$

$$Z_0 = \frac{l}{gDyDx}, \tag{9a}$$

что целиком соответствует полученным ранее выражениям (6) и (7).

**Типовая активная  $j_M$ -F-ячейка решетчатой магнитной схемы в объеме постоянного магнита.** На рис. 2,а изображен прямоугольный ( $Dx$ ,  $Dy$ ) элемент постоянного магнита, обозначены нормальные к соответствующим поверхностям составляющие векторов магнитной напряженности и индукции, а также значения магнитного потенциала на поверхностях  $j_1, j_2, j_3, j_4$ . Предполагается, что вектор намагниченности  $\vec{J}$  имеет одну  $x$ -составляющую.

Считаем, что характеристика размагничивания постоянного магнита представляет собой линейную зависимость, а  $x$ -составляющая вектора индукции

$$B_x = B_0 + \mu_1 H_x, \tag{10}$$

где  $\mu_1 = \frac{B_0}{H_0}$ ;  $B_0, H_0$  – остаточная индукция и коэрцитивная сила магнита.

При этом  $y$ -составляющая вектора индукции

$$B_y = \mu_0 H_y. \tag{10a}$$

В качестве базового положения, на основании которого формируется схема ячейки, используется принцип непрерывности магнитного потока  $\oint \vec{B} d\vec{S} = 0$ . Для ячейки на рис. 2,а на единицу длины в поперечном направлении

$$- DF_1 + DF_2 - DF_3 + DF_4 = 0, \tag{11}$$

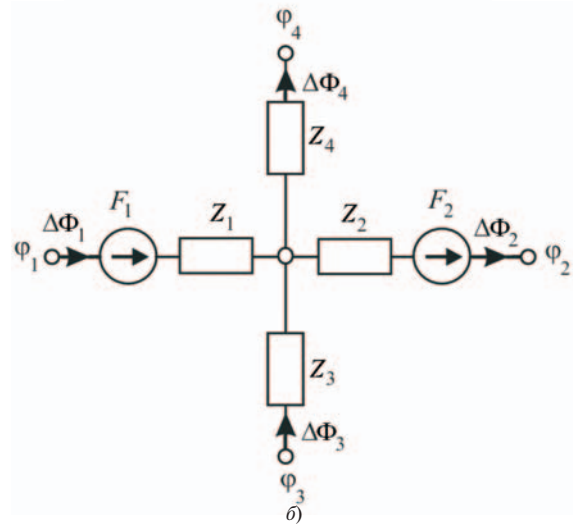
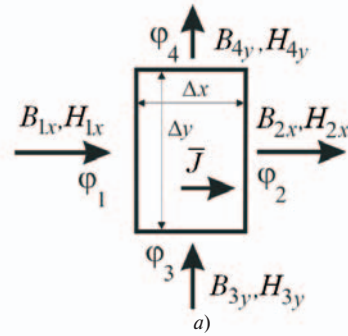


Рис. 2. Активная  $j_M$ -F-ячейка магнитного поля в объеме постоянного магнита (а) и ее схема замещения (б)

где

$$\begin{aligned} DF_1 &= B_{1x} Dy; & DF_2 &= B_{2x} Dy; \\ DF_3 &= B_{3y} Dx; & DF_4 &= B_{4y} Dx. \end{aligned} \tag{12}$$

Уравнению (11) соответствует четырехлучевая схема (рис. 2,б) с двумя активными ветвями. Рассмотрим параметры схемы. В каждой ветви магнитные напряжения  $U_M$ , магнитные потоки  $DF$  и магнитодвижущие силы  $F$  связаны законом Ома:

$$DF = \frac{U_M + F}{Z}.$$

Из (10) с учетом (12) имеем:

$$H_{1x} Dx = \frac{DF_1 Dx}{\mu_1 Dy} - H_0 Dx; \tag{13}$$

$$H_{2x} Dx = \frac{DF_2 Dx}{\mu_1 Dy} - H_0 Dx. \tag{13a}$$

Магнитное напряжение определим по среднему значению магнитной напряженности на поверхностях ячейки:

$$U_{12} = \frac{H_{1x} + H_{2x}}{2} Dx. \tag{14}$$

С учетом (13) и (13a) из (14) получим:

$$j_1 - j_2 = DF_1 \frac{Dx}{2m_1 Dy} - H_0 \frac{Dx}{2} + DF_2 \frac{Dx}{2m_2 Dy} - H_0 \frac{Dx}{2}, \quad (15)$$

откуда

$$F_1 = F_2 = H_0 \frac{Dx}{2}; \quad (16)$$

$$Z_1 = Z_2 = H_0 \frac{Dx}{2m_1 Dy}; \quad (17)$$

аналогично для пассивных ветвей:

$$F_3 = F_4 = 0; \quad (16a)$$

$$Z_3 = Z_4 = H_0 \frac{Dy}{2m_0 Dx}. \quad (17a)$$

**Расчет плоскопараллельного поля с использованием решетчатых схем.** В [3] приведены кривые распределения нормальной составляющей вектора индукции на поверхности статора электрической машины с постоянными магнитами на роторе, намагниченными в радиальном направлении. Кривые построены при следующих исходных данных: полюсное деление 67,2 мм; ширина магнита 33,6 мм; высота магнита 6 мм; рабочий зазор 0,6 и 6 мм; остаточная индукция магнита 0,8 Тл; коэрцитивная сила 440 кА/м.

Для проверки разработанного расчетного метода был проведен расчет магнитного поля электрической машины по решетчатой  $j_M - \Phi$ -схеме. Расчет проводился с использованием программы для схемотехнического моделирования электрических цепей Multisim 10. Результат расчета приведен на рис. 3.

Расчетная область (половина полюсного деления) в решетчатой  $j_M - \Phi$ -схеме разбита на 48 ячеек, область магнита содержит 12 ячеек сечением 4,2'2 мм, а рабочий зазор – 24 ячейки сечением 4,2'0,2 мм и 4,2'2 мм.

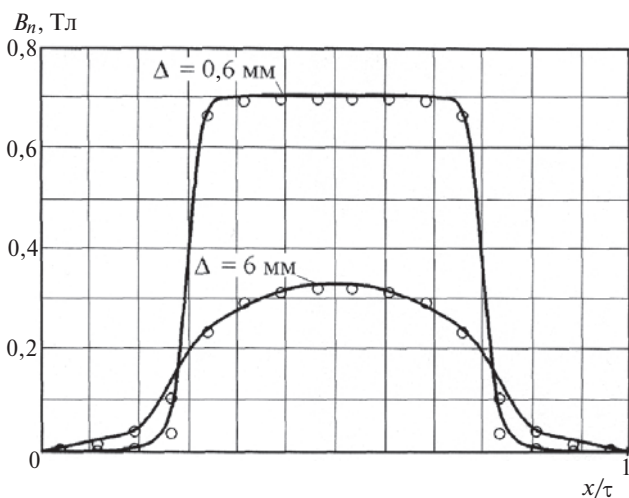


Рис. 3. Нормальная составляющая вектора индукции на поверхности статора: — — данные из [3]; ○ ○ ○ — расчет по  $j_M - \Phi$ -схеме

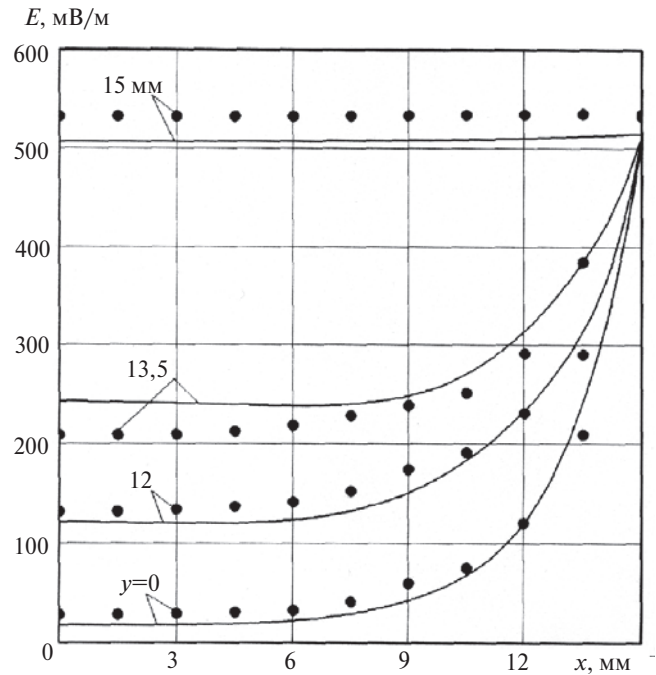


Рис. 4. Распределение электрической напряженности в объеме ферромагнитного проводника квадратного сечения: — — численный расчет; ○ ○ ○ — расчет по  $E-H$ -схеме

В качестве второго примера, иллюстрирующего возможности решетчатых схем, на рис. 4 представлены результаты расчета синусоидального электромагнитного поля в нелинейной проводящей ферромагнитной среде.

Проводник (материал – сталь 20) квадратного сечения (30'30 мм) обтекается током промышленной частоты. Действующее значение тока выбрано таким образом, чтобы напряженность магнитного поля на поверхности проводника достигала 3500 А/м, что примерно соответствует максимуму магнитной проницаемости.

При расчете по решетчатой  $E-H$ -схеме расчетная область (включая четверть сечения проводника и воздух, окружающий проводник) разбита на 52 ячейки, из них 36 приходится на объем проводника. На глубине проникновения расположены 16 ячеек сечением 1,5'3 мм и 4 ячейки 1,5'1,5 мм.

При численном расчете (в программе FEMM 4,2) в виде таблицы задавалась кривая намагничивания стали, при расчете решетчатой схемы – зависимость относительной магнитной проницаемости от напряженности магнитного поля, при этом индуктивные сопротивления в решетчатой схеме – это нелинейные элементы, определяемые значением магнитной проницаемости.

Сравнение расчетов поля с помощью решетчатых схем с данными из [3] и численными расчетами свидетельствует о достаточно высокой точности разрабатываемого расчетного метода.



**Выводы.** 1. Предлагаемые основы формирования типовых ячеек-многополюсников позволяют осуществить переход от наиболее простых типовых звеньев-четыреполюсников каскадных схем к более сложным типовым ячейкам-многополюсникам решетчатых схем замещения физических полей и свести в итоге расчет двумерного поля к решению стандартной задачи анализа электрических цепей.

2. Синтезирование типовых звеньев-многополюсников осуществляется на базе фундаментальных законов электромагнетизма и теории цепей и по существу является одним из разделов теоретической электротехники, который может быть включен в программы студенческих и других образовательных курсов.

3. Результаты тестовых расчетов решетчатых схем замещения полей свидетельствуют о достаточно высокой точности разрабатываемого расчетного метода, что позволяет использовать решетчатые схемы и методы теоретической электротехники для анализа и расчета сложных электротепловых полей (в том числе — в нелинейных средах) в силовых электроустановках, в частности — в электрических машинах и электротехнологическом оборудовании.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шакиров М.А., Кияткин Р.П. Динамика электромагнитных сил при переходном скин-эффекте в прямолинейных шинах. — Электричество, 1998, № 4, с. 62–69.

2. Инкин А.И., Алифёров А.И., Бланк А.В. Исследование параметров ферромагнитных изделий прямоугольного сечения при их электроконтакте и индукционном нагреве. — Электротехника, 2009, № 12, с. 55–60.

3. Инкин А.И. Аналитические исследования магнитного поля в активном объеме электрической машины с постоянными магнитами. — Электричество, 1979, № 5, с. 30–34.

[24.09.13]

*Авторы: Инкин Алексей Иванович окончил электротехнический факультет Новосибирского электротехнического института в 1959 г. В 1987 г. защитил докторскую диссертацию «Теория и электромагнитный расчет электрических машин с составными активными объемами» в Московском энергетическом институте. Профессор кафедры теоретических основ электротехники (ТОЭ) Новосибирского государственного технического университета (НГТУ).*

*Алифёров Александр Иванович окончил электротехнический факультет Новосибирского электротехнического института в 1978 г. В 1999 г. защитил докторскую диссертацию «Электротепловые процессы в токоведущих проводниках произвольной конфигурации. Теория и практика» в НГТУ. Заведующий кафедрой автоматизированных электротехнологических установок НГТУ.*

\* \* \*

### Вниманию предприятий, организаций, НИИ, вузов России и зарубежных фирм!

Журнал «Электричество» предоставляет свои страницы для

- РЕКЛАМЫ ИЗДЕЛИЙ отечественных предприятий и зарубежных фирм в области энергетики, электротехники, электроники, автоматики
- ПУБЛИКАЦИИ ОБЪЯВЛЕНИЙ о научных симпозиумах, конференциях, совещаниях, семинарах
- ДРУГОЙ ИНФОРМАЦИИ, соответствующей тематике журнала

Сообщаем, что журнал поступает к зарубежным подписчикам во многих странах мира.

Напоминаем наш адрес: 101000 Москва, Главпочтамт, а/я 648.

Тел./факс (495)362-7485

*Бланк Алексей Валерьевич* окончил электромеханический факультет НГТУ в 1999 г. В 2005 г. защитил кандидатскую диссертацию «Разработка метода расчета магнитного поля в дискретно-однородных цилиндрических структурах явнополюсных электрических машин». Доцент кафедры ТОЭ НГТУ.