

К описанию переходных процессов в электрических машинах постоянного тока

ДИЕВСКИЙ В.А.

До настоящего времени в теории электрических машин и электропривода не сформирован единый подход к описанию переходных (и установившихся) процессов. Это проявляется и в различном обозначении величин и в вопросе о переходе к безразмерным величинам при описании переходных процессов. В основу предлагаемого подхода к описанию переходных процессов электрических машин положен выбор в качестве базовых номинальных значений угловой скорости, тока и момента, а также переход к безразмерному времени. Дифференциальные уравнения электродвигателя постоянного тока с независимым или параллельным возбуждением при принятых условиях содержат пять безразмерных параметров. Получены решения этих уравнений для режимов: пуска без нагрузки и под нагрузкой, при набросе или сбросе нагрузки. Найдены экстремальные значения тока и угловой скорости. Проведено сравнение с результатами в работах других авторов.

Ключевые слова: электрическая машина, постоянный ток, переходные процессы, параметры, режимы

Описание переходных (и установившихся) процессов в электрических машинах имеет давнюю историю и в теории электрических машин, и в теории электропривода [1–5 и др.]. Однако до настоящего времени так и не сформировался единый подход к этому описанию даже при самом упрощённом моделировании процессов.

Прежде всего это проявляется в различии обозначений величин. Так, в ряде работ коэффициент $pN/2\pi a$, определяемый конструктивными параметрами машины, обозначается «с», в то время как в других работах — это «к», при этом там же $c = kF$ — приведенный поток обмотки возбуждения. Иногда «с» — ещё и жесткость механической характеристики, в других работах часто обозначаемая b .

А если вместо угловой скорости ω (1/с) при описании используется n (об/мин), то коэффициентов c (или k) становится два: c_m и c_e . Это вносит путаницу. Наличие единого коэффициента подчеркивает тот факт, что процессы в механической и электрической частях машины имеют связанный характер (сохранение передаваемой мощности). Неудачным представляется обозначение ω_0 для угловой скорости холостого хода $\omega_{х.х}$ (при этом момент короткого замыкания $M_{КЗ}$ не обозначается M_0).

Так же обстоит дело с обозначениями постоянных времени. Электромагнитная постоянная времени обмотки якоря L_a/R_a часто обозначается T_j , но где-то T_ω , а иногда $T_{эм}$. В то же время в других работах $T_{эм}$ — электромеханическая постоянная времени

$$(JR_a/c^2) = (JR_a/k^2F^2) = (J/b),$$

чаще всего обозначаемая T_M (но иногда T_M — механическая постоянная времени).

Вообще, введение различных постоянных времени может привести к ошибочному представлению о том, что процессы в электрической и механической частях электрической машины происходят по-разному. На самом деле переходные процессы (кроме короткого замыкания) в обеих частях имеют одинаковые частоты затухающих колебаний и показатели затухания (декременты).

Не менее важным является вопрос о переходе при описании процессов к безразмерным величинам. В ряде работ он вообще не проводится, в некоторых авторы вводят относительные значения, но не используют их. Кроме того, различен и выбор базовых значений переменных; многие авторы вместо номинальных значений в качестве базовых применяют $\omega_{х.х}$ и $I_{КЗ}$. Введение же в рассмотрение так называемого «номинального сопротивления якоря» $R_H = U/I_H$ представляется искусственным и потому излишним.

К тому же авторы не используют переход к безразмерному времени.

Предлагается следующий подход к описанию физических процессов.

Дифференциальные уравнения электродвигателя с независимым или параллельным возбуждением при условии, что обмотка возбуждения включена предварительно ($c = \text{const}$ — приведённый поток обмотки возбуждения; номинальная ЭДС $E_H = c\omega_H$; номинальный момент $M_H = cI_H$) и при отсутствии взаимной индуктивности цепей обмотки якоря и возбуждения, имеют вид:

$$L_a \frac{di_a}{dt} = U - R_a i_a - c\omega \text{ и } J \frac{d\omega}{dt} = c i_a - M_c,$$

где M_c – момент сопротивления (нагрузки).

Переходя к безразмерным величинам: времени $t = \omega_H t$, угловой скорости $\tilde{\omega} = \omega / \omega_H$ и тока $\tilde{i}_a = i_a / i_H$, где $i_H = (U - E_H) / R_a$, получаем уравнения (штрих означает дифференцирование по t):

$$\tilde{i}'_a = K_1 - K_2 \tilde{i}_a - K_3 \tilde{\omega} \text{ и } \tilde{\omega}' = K_4 \tilde{i}_a - K_5.$$

Здесь $K_1 = U / i_H L_a \omega_H$; $K_2 = R_a / L_a \omega_H$; $K_3 = c / i_H L_a$; $K_4 = c i_H / J \omega_H^2$; $K_5 = M_c / J \omega_H^2$ – безразмерные параметры; $K_3 = K_1 - K_2$.

Если момент сопротивления будет равен номинальному моменту $M_c = M_H$, то $K_4 = K_5$, и тогда в установившемся режиме $\tilde{i}_a = \tilde{i}_y = 1$ и $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_y = 1$.

В общем случае из уравнений получаем:

$$\tilde{i}'_a = K_2 \tilde{i}'_a + K_4 K_3 \tilde{i}_a = K_5 K_3$$

или $\tilde{i}'_a = 2v \tilde{i}'_a + \kappa^2 \tilde{i}_a = K_5 K_3$,

где $\kappa = \sqrt{K_4 K_3}$ и $v = K_2 / 2$. Если $\kappa > v$, то корни характеристического уравнения $l_{1,2} = -v \pm i\kappa^*$, где $\kappa^* = \sqrt{\kappa^2 - v^2}$, т.е. будут происходить затухающие колебания с частотой κ^* . Частное решение неоднородного уравнения

$$\tilde{i}_a = K_5 / K_4 = M_c / c i_H = \tilde{i}_y$$

– установившееся значение тока.

Общее решение уравнений для тока якорной цепи и угловой скорости:

$$\tilde{i}_a = \tilde{i}_y + e^{-vt} (C_1 \cos \kappa^* t + C_2 \sin \kappa^* t);$$

$$\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_y - e^{-vt} (C_3 \cos \kappa^* t + C_4 \sin \kappa^* t),$$

где $\tilde{\omega}_y = (K_1 - K_2 \tilde{i}_y) / K_3 = (K_1 K_4 - K_2 K_5) / K_3 K_4$ – установившееся значение угловой скорости.

При пуске без нагрузки ($M_c = 0$, $K_5 = 0$) имеем $\tilde{i}_y = 0$ и

$$\tilde{\omega}_y = K_1 / K_3 = U / c \omega_H = U / E_H.$$

Если пуск будет происходить из состояния покоя, то начальные условия: $\tilde{i}_{a0} = 0$, $\tilde{\omega}_0 = 0$, $\tilde{i}'_{a0} = K_1$, $\tilde{\omega}'_0 = 0$, и тогда $\tilde{i}_a = (K_1 / \kappa^*) e^{-vt} \sin \kappa^* t$; $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_y [1 - A_1 e^{-vt} \sin(\kappa^* t + a_1)]$, где $A_1 = \kappa / \kappa^*$ и $a_1 = \arcsin(1 / A_1)$.

Легко видеть, что максимальное значение тока будет при $t_m = a_1 / \kappa^*$:

$$\tilde{i}_{a\max} = (K_1 / \kappa) e^{-vt_m},$$

а соответствующая ему угловая скорость

$$\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_y (1 - 2e^{-vt_m} \cos a_1) = \tilde{\omega}_y (1 - 2(v / \kappa) e^{-vt_m}).$$

Рассмотрим в качестве примера расчёт прямого пуска из [1].

Для двигателя ПН-100 мощностью 10 кВт приведены следующие данные: $U = 220$ В; $n_H = 950$ об/мин; $R_a = 0,381$ Ом; $L_a = 0,0105$ Гн; $J = 0,3425$ кгж²; $E_H = 210$ В. (Последняя величина имеет некоторое округлённое значение, если её считать по другим данным двигателя, можно получить значение 208,3 В, и дальнейший расчёт требует уточнения; различие может быть определено, в частности, наличием падения напряжения на щёточном контакте.)

Тогда $\omega_H = \pi n / 30 = 99,5$ 1/с; $c = E_H / \omega_H = 2,11$ Вб. По приведённым формулам имеем: $i_H = 26,25$ А; $K_1 = 8,02$; $K_2 = 0,365$; $K_3 = 7,66$; $K_4 = 0,0164$; $v = 0,182$; $\kappa = 0,354$; $\kappa^* = 0,303$; $\tilde{\omega}_y = 1,05$; $A_1 = 1,17$; $a_1 = 1,03$ рад; $t_m = 3,39$; время $t_m = t_m / \omega_H = 0,0341$ с; $\tilde{i}_{a\max} = 12,2$ (12-кратная перегрузка по току); максимальное значение тока $i_{a\max} = i_H \tilde{i}_{a\max} = 320$ А; соответствующая ему угловая скорость $\tilde{\omega} = 0,446$.

В [1] по двум методикам получены: $t_m = 0,037$ с и $0,034$ с; $i_{a\max} = 319$ А и $302,5$ А; $\tilde{\omega} = 0,455$ и $0,440$, а опытные значения $t_m = 0,032$ с, $i_{a\max} = 357,5$ А, $\tilde{\omega} = 0,442$.

При пуске под нагрузкой и пассивном моменте сопротивления переходный процесс будет происходить в два этапа [2, 3].

На первом этапе $\tilde{\omega}^0 = 0$ (вращения нет), а ток меняется в соответствии с уравнением $\tilde{i}'_a = K_1 - K_2 \tilde{i}_a$; он растёт от нуля до $\tilde{i}_y = K_5 / K_4$. Решение уравнения имеет вид

$$\tilde{i}_a = K_1 / K_2 (1 - e^{-K_2 t}),$$

отсюда время этого этапа

$$t = (1 / K_2) \ln(K_1 / K_3 \tilde{\omega}_y).$$

Если пуск будет при номинальной нагрузке, то $K_4 = K_5$, $\tilde{\omega}_y = 1$ и $t = (1 / K_2) \ln(K_1 / K_3)$. Для данных приведённого примера получим $t = 0,128$ и $t = t / \omega_H = 0,00128$ с.

На втором этапе начинается вращение, уравнения двигателя принимают исходный вид при начальных условиях: $\tilde{i}_{a0} = K_5 / K_4$; $\tilde{\omega}_0 = 0$; $\tilde{\omega}'_0 = 0$; $\tilde{i}'_{a0} = K_1 - K_2 \tilde{i}_{a0}$ (время вновь считаем от нуля). При

номинальной нагрузке $\tilde{i}_{a0}=1$ и $\tilde{i}_{a0}^* = K_3$, и тогда $\tilde{i}_a = 1 + (K_3 / \kappa^*) e^{-\nu t} \sin \kappa^* t$. Выражение для угловой скорости такое же, как и при холостом пуске (с учётом того, что $\tilde{w}_y = 1$). Сохраняется и время достижения максимального тока $t_m = a_1 / \kappa^*$, и он равен $\tilde{i}_{amax} = 1 + (K_3 / \kappa) e^{-\nu t_m}$.

Для данных приведённого примера получим $\tilde{i}_{amax} = 12,7$, при этом $i_{amax} = i_n \tilde{i}_{amax} = 333$ А; соответствующая угловая скорость $\tilde{w}_0 = 0,440$. Из расчётов видно, что для рассмотренного двигателя перегрузка по току при пуске под нагрузкой мало отличается от перегрузки при холостом пуске.

Если проводится наброс (сброс) нагрузки из некоторого установившегося режима работы с какими-то значениями \tilde{i}_{a0} и \tilde{w}_0 , то начинается переходный процесс, в результате которого эти значения получают приращения.

При изменении безразмерного момента сопротивления на $D\tilde{M}_c = DM_c / M_n$ новые установившиеся значения тока и угловой скорости будут равны: $\tilde{i}_y = \tilde{i}_{a0} + D\tilde{i}_a$ и $\tilde{w}_y = \tilde{w}_0 + D\tilde{w}$, где $D\tilde{i}_a = D\tilde{M}_c$ и $D\tilde{w} = - (K_2 / K_3) D\tilde{M}_c$.

Тогда решение исходных уравнений при мгновенном изменении нагрузки принимает вид:

$$\tilde{i}_a = \tilde{i}_y - D\tilde{i}_a A_1 e^{-\nu t} \sin(\kappa^* t + a_1),$$

где $A_1 = \kappa / \kappa^*$; $a_1 = \arcsin(1 / A_1)$;

$$\tilde{w} = \tilde{w}_y + D\tilde{w} A_2 e^{-\nu t} \sin(\kappa^* t - a_2), \quad (*)$$

где $A_2 = \sqrt{1 + [(\kappa^* / \nu) - (\nu / \kappa^*)]^2 / 4}$; $a_2 = \arcsin(1 / A_2)$.

Экстремальное значение тока (минимальное или максимальное в зависимости от того происходит сброс или наброс нагрузки) достигается при $t_{m1} = \rho / \kappa^*$ и равно $\tilde{i}_{am} = \tilde{i}_y - D\tilde{i}_a e^{-\nu t_{m1}}$, а экстремальное значение угловой скорости достигается при $t_{m2} = (a_1 + a_2) / \kappa^*$ и равно $\tilde{w}_m = \tilde{w}_y + D\tilde{w}(A_2 / A_1) e^{-\nu t_{m2}}$.

Полученные выше соотношения аналогичны тем, которые приводятся обычно в теории электропривода с учётом того, что используемые там параметры выражаются следующим образом:

$$d_c = R_a i_n / U = K_2 / K_1;$$

$$T_\omega = L_a / R_a = 1 / K_2 w_n = 1 / 2 \nu w_n;$$

$$T_M = J R_a / c^2 = K_2 / K_3 K_4 w_n = 2 \nu / \kappa^2 w_n;$$

$$b = c^2 / R_a = J / T_M = K_3 K_4 J w_n / K_2 = \kappa^2 J w_n / 2 \nu.$$

Например, полученная компактная формула (*) для угловой скорости в случае наброса (сброса) нагрузки в теории электропривода (см., например, [2]) записывается в размерном виде как

$$w = w_c + (w_{c,на} - w_c) e^{-at} \cdot \left[\frac{\omega}{\omega_c} \cos \omega_p t + \frac{a T_M - 1}{\omega_p T_M} \sin \omega_p t \right] \frac{\ddot{\omega}}{\omega}$$

Здесь формула приведена в обозначениях [2].

Автор выражает признательность профессору МЭИ(ТУ) В.Я. Беспалову за ценные замечания по рукописи статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ермолин Н.П. Переходные процессы в машинах постоянного тока. – М.: Госэнергоиздат, 1951, 304 с.
2. Ключев В.И. Теория электропривода. – М.: Энергоатомиздат, 1985, 560 с.
3. Голован А.Т. Основы электропривода. – М.: Госэнергоиздат, 1959, 344 с.
4. Бельман М.Х. Переходные процессы в микродвигателях постоянного тока при импульсном питании. – Л.: Энергия, 1975, 184 с.
5. Родюков Ф.Ф., Львович А.Ю. Уравнения электрических машин. – СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского университета, 1997, 272 с.
6. Диевский В.А. Приложение неголономной механики к общей теории электрических машин. – Краснодар: Изд-во «Лань», 2009, 120 с.

[16.12.13]

Автор: Диевский Виктор Алексеевич окончил математико-механический факультет Ленинградского государственного университета (ЛГУ) им. А.А. Жданова в 1971 г. Ученую степень кандидата физико-математических наук получил, защитив в ЛГУ в 1980 г. диссертацию «Исследование электромеханических систем методами неголономной механики». Доцент военного института (инженерного) Военной академии материально-технического обеспечения.

On Description of Transients in DC Electrical Machines

V. A. DIEVSKII

Up to now, a unified approach to description of transient (as well as steady-state processes) has not been established in the theory of electrical machines and electric drives. This is manifested both in different notations of quantities and in the question of shifting to dimensionless quantities in describing transients.

Selecting the nominal angular speed, current, and torque as the base values and making a shift to dimensionless time are laid at the heart of the proposed approach to description of transients in electrical machines. With the adopted conditions, the differential equations of a DC electric motor with independent or parallel excitation contain five dimensionless parameters. Solutions of these equations are obtained for the modes of startup without load and under load, and in load inrush and load rejection modes. The extreme values of current and angular speed are found. The obtained data are compared with the results reported in the works of other researchers.

Key words: *electrical machine, direct current, transients, parameters, operating modes*

REFERENCES

1. **Yermolin N.P.** *Perekhodnye protsessy v mashinakh postoyannogo toka* (Transients in DC machines). Moscow. Publ. «Gosenergoizdat», 1951, 304 p.
2. **Klyuchev V.I.** *Teoriya elektroprivoda* (Theory of electric drives). Moscow. Publ. «Energoatomizdat», 1985, 560 p.
3. **Golovan A.T.** *Osnovy elektroprivoda* (Principles of electric drives). Moscow. Publ. «Gosenergoizdat», 1959, 334 p.

4. **Bel'man M.Kh.** *Perekhodnye protsessy v mikrodivigatelyakh postoyannogo toka pri impul'snom pitanii* (Transients in impulse-fed DC micromotors). Leningrad. Publ. «Energiya», 1975, 184 p.

5. **Rodyukov F.F., L'vovich A.Yu.** *Upravleniya elektricheskikh mashin* (The equations of electrical machines). St. Petersburg. Publ. of St. Petersburg University, 1997, 272 p.

6. **Diyevskii V.A.** *Prilozheniye negolomnoi mekhaniki k obshchei teorii elektricheskikh mashin* (Application of nonholonomic mechanics to the general theory of electrical machines). Krasnodar. Publ. «Lan'», 2009, 120 p.

*Author: **Diyevskii Victor Alekseyevich** graduated from the Leningrad State University in 1971. In 1980 he received the degree of Cand. Techn. Sci. in the Leningrad State University. He is Senior Lecturer in Military Institute (of Engineering and Technical Science) of Military Academy of Material and Technical Support.*

* * *

ЧИТАТЕЛЯМ, ПОДПИСЧИКАМ, РЕКЛАМОДАТЕЛЯМ ЖУРНАЛА «ЭЛЕКТРИЧЕСТВО»

Подписка в России и странах СНГ принимается в отделениях связи.

Для желающих представить в журнал статью сообщаем, что правила подготовки рукописей публикуются в №№ 6 и 12 каждого года и на сайте журнала.

Реклама в черно-белом изображении может быть размещена на страницах журнала и на его обложке, а также в виде вкладки.

Возможно размещение рекламы в цветном изображении.

Стоимость оплаты рекламных статей – по договоренности.

При повторении той же рекламы в следующем номере – скидка 10%. При публикации той же рекламы в третьем и последующих номерах – скидка 20%. Последний срок представления рекламного материала – за 1,5 месяца до выхода номера из печати (обычно номер выходит в середине каждого месяца).

Адрес для переписки: 101000 Москва, Главпочтамт, а/я 648

тел./факс: (495)362-7485

E-mail: l.s.kudinova@rambler.ru

