

Континуальные схемотехнические модели в методе конечных элементов

БУЛАВИН В.Ф.

Математическим аппаратом для исследования служит формула Грина. В статье получено решение для элементных матриц жесткости линейного конечного элемента и показано, что число таких структур обладает мощностью континуум. Континуальная модель конечного элемента в виде электрической схемы дает возможность использовать известные алгоритмы анализа цепей для формирования глобальной матрицы жесткости. Схемотехническое решение позволяет снять любые ограничения на форму конечных элементов благодаря соответствующему выбору элементной матрицы жесткости и базисной функции.

Ключевые слова: формула Грина, метод конечных элементов, схемотехническая модель, матрица жесткости, аппроксимация

Схемотехническая реализация метода конечных элементов (МКЭ) предполагает определение параметров конечного элемента (КЭ) как многополюсника с дальнейшим формированием уравнений связи между переменными, характеризующими состояние всех КЭ, методами расчета электрических цепей. Свойства дискретной электрической модели должны со стороны внешних зажимов быть эквивалентны состоянию отдельных подобластей. Основным вопросом при таком подходе является способ определения параметров КЭ как элемента электрической цепи.

Вопросы взаимосвязи схемотехники и МКЭ доведены до логически завершеного результата в [1] и более ранних работах автора, в которых были построены электрические схемы замещения широкого набора КЭ для эллиптических уравнений. Однако результатами этих работ являлись модели, представленные как единственные. Особенность данной статьи состоит в том, что на примере ли-

нейных элементов показано многообразие схемных решений, а также сняты все ограничения по форме КЭ, что позволяет расширить практику применения «тонких» фрагментов.

Покажем, что схемотехническая модель для КЭ может быть построена на основе метода интегральных тождеств и соотношения, известного как формула Грина [2, 3].

Рассмотрим на плоскости неоднородную область D , ограниченную контуром ∂D , поле в которой описывается через скалярную функцию $j(N)$. Требуется найти решение, удовлетворяющее уравнению:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(m \operatorname{grad} j) &= -r(N); \quad N(x, y) \in D; \\ j|_{\partial D} &= f(M(h, x)), \end{aligned} \quad (1)$$

где m – физический параметр, характеризующий свойства среды.

Численное решение уравнения (1), например, в проекционной форме может быть получено из ус-

ловия ортогональности невязки [2, 3] базисным функциям $u_j(x,y)$, т.е. из уравнений:

$$\int_D \text{div}(\text{mgrad}(j_N) + \tau) u_j dD = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (2)$$

где $\bar{j}_N(x,y) = \sum_{j=1}^N a_j u_j(x,y)$ – приближенное решение.

Редукция (2) приводит к системе алгебраических уравнений относительно искомым величин, что дает решение исходной задачи.

Классический подход получения функций формы. Для анализа выделим КЭ в виде треугольника произвольного вида при условии, что узлы располагаются согласно модели Паскаля (рис. 1), образуя таким образом упорядоченное семейство [2, 3] лагранжевых треугольных элементов: a – линейный; b – квадратичный; c – кубический.

Традиционный подход состоит в использовании полиномиальной функции для приближенного решения. В пределах каждого конечного элемента для скалярной функции используется аппроксимация вида

$$\bar{j}(x,y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy + a_4 x^2 + a_5 y^2 + \dots,$$

где коэффициенты a_k определяются по значениям полевой функции в узлах шаблона. Для линейного КЭ (рис. 1,а) аппроксимация вида

$$\bar{j}(x,y) = a_0 + a_1 x + a_2 y \quad (3)$$

дает для базисных функций и функций формы результат в виде [2, 3] (в обозначениях на рис. 2):

$$\begin{aligned} \bar{j}(x,y) &= N_i j_i + N_j j_j + N_m j_m; \\ N_i &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{x}{c} - \frac{c_2' y}{c' h_c} \right); \quad N_j = \frac{1}{3} \left(\frac{x}{c} - \frac{c_1' y}{c' h_c} \right); \quad N_m = \frac{y}{h_c}; \\ N_i + N_j + N_m &= 1. \end{aligned}$$

Элементная матрица жесткости может быть определена из (2) или, например, из минимума энергетического функционала. В обоих случаях результат в базе (x,y) имеет вид:

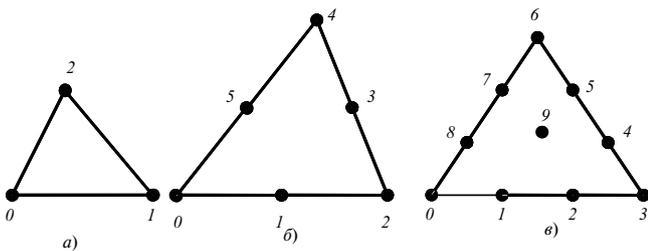


Рис. 1

$$k = m' S \begin{vmatrix} \frac{1}{c^2} + \frac{c_2^2}{c^2 \cdot h_c^2} & \frac{c_1' c_2}{c^2 \cdot h_c^2} & \frac{1}{c^2} \frac{c_2}{h_c} \\ \frac{c_1' c_2}{c^2 \cdot h_c^2} & \frac{1}{c^2} \frac{c_1^2}{h_c^2} & \frac{1}{c^2} \frac{c_1}{h_c} \\ \frac{1}{c^2} \frac{c_2}{h_c} & \frac{1}{c^2} \frac{c_1}{h_c} & \frac{1}{h_c^2} \end{vmatrix}$$

где c_1, c_2 – отрезки, на которые делит высота h_c сторону c ; S – площадь треугольного симплекса-элемента.

Синтез линейных базисных функций для симплекса-элемента на основе формулы Грина. Рассмотрим вопрос о построении базисных функций с помощью интегрального соотношения – формулы Грина:

$$\begin{aligned} (2p)j(N) &= \int_D \frac{\partial j(M)}{\partial n} \frac{1}{R_{NM}} dl - \\ &- \int_D j(M) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R_{NM}} dl + \int_D \frac{\tau(M)}{m} \frac{1}{R_{NM}} dS; \quad (4) \end{aligned}$$

$$R_{NM} = \sqrt{(h - x)^2 + (x - y)^2}; \quad N(x,y) \text{ OD.}$$

Использование соотношения (4) в качестве генерирующего базисные функции при заданных граничных условиях первого рода предполагает первоначальное определение производной по нормали на контуре КЭ, что приводит к необходимости решения интегрального уравнения первого рода относительно этой величины.

Примем локальную систему координат, как показано на рис. 2, и рассмотрим построение конечно-элементной схемы на базе соотношения (4). Допустим, что среда в пределах КЭ является однородной и изотропной.

Аппроксимируя скалярную функцию вдоль сторон треугольника линейными зависимостями (при соблюдении условия $\oint \text{grad}_1(j_N) dl = 0$, где l – ка-

сательное направление вдоль контура КЭ), примем $\text{grad}_n(j) = \text{const}$ (n – направление внешней нормали к контуру КЭ) на каждом из ребер. Выполним интегрирование в квадратурах контурных интегралов с использованием трех локальных систем координат, ориентированных вдоль сторон треугольника.

Логистика промежуточных преобразований направлена на формирование соотношений, представляющих, с одной стороны, линейный разностный аналог фундаментального тождества:

$$\int_D \frac{\partial j(M)}{\partial n} \frac{1}{R_{NM}} dl = \begin{cases} 0, & \text{при } r = 0; \\ \frac{\tau}{m} S, & \text{при } r \neq 0, \end{cases} \quad (5)$$

а с другой стороны, подчинена требованиям выполнения этих соотношений при любых значениях величин $\ln(r_i)$, $\ln(r_j)$ и $\ln(r_m)$ в обозначениях на рис. 2. Окончательно приходим к результату¹ (без учета распределенных поверхностных источников поля в контуре КЭ) в виде:

$$\begin{aligned}
 (g + b + a) \int_{\Gamma} (M) \frac{\partial \bar{U}}{\partial n} \frac{d\Gamma}{\Delta n} &= \frac{j_i - j_j}{c} y + \frac{j_j - j_i}{c} x + j_i \frac{\psi}{\Delta} g + \\
 &+ \frac{j_m - j_j}{b} x_b + \frac{j_m - j_j}{b} h_b + j_j \frac{\psi}{\Delta} b + \\
 &+ \frac{j_i - j_m}{a} x_a + \frac{j_i - j_m}{a} h_a + j_m \frac{\psi}{\Delta} a, \quad (6)
 \end{aligned}$$

где g, b, a – углы, под которыми из точки $N(x, y)$ видны отрезки интегрирования (рис. 2).

Для базиса (h_b, x_b) , связанного со стороной треугольника b , матрица перехода и обратная матрица определяются как [2, 3]:

$$\begin{aligned}
 h_b &= -\cos q_j (x - c) + \sin q_j y; \\
 x &= -\cos q_j h_b - \sin q_j x_b + c; \\
 x_b &= -\cos q_j (x - c) - \sin q_j y; \\
 y &= \sin q_j h_b - \cos q_j x_b.
 \end{aligned} \quad (7)$$

Аналогично для стороны a в системе координат (h_a, x_a) матрица перехода и обратная ей имеют вид:

$$\begin{aligned}
 h_a &= -\cos q_i (x - a' \cos q_i) - \sin q_i (y - a' \sin q_i); \\
 x_a &= \sin q_i (x - a' \cos q_i) - \cos q_i (y - a' \sin q_i); \\
 x &= -\cos q_i h_a + \sin q_i x_a + a' \cos q_i; \\
 y &= -\sin q_i h_a - \cos q_i x_a + a' \sin q_i.
 \end{aligned} \quad (8)$$

Значения производных $\frac{\partial \bar{U}}{\partial n} \frac{d\Gamma}{\Delta n}$ и $\frac{\partial \bar{U}}{\partial n} \frac{d\Gamma}{\Delta n}$ на контуре КЭ найдем, подставив в (6) координаты узловых точек, в результате получим:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \bar{U}}{\partial n} \frac{d\Gamma}{\Delta n} &= \frac{1}{h_c} \frac{M}{\Delta} \frac{c_2}{c} j_i - \frac{c_1}{c} j_j + j_m \frac{\psi}{\Delta}; \\
 \frac{\partial \bar{U}}{\partial n} \frac{d\Gamma}{\Delta n} &= \frac{1}{h_b} \frac{M}{\Delta} j_i - \frac{b_2}{b} j_j - \frac{b_1}{b} j_m \frac{\psi}{\Delta}; \\
 \frac{\partial \bar{U}}{\partial n} \frac{d\Gamma}{\Delta n} &= \frac{1}{h_a} \frac{M}{\Delta} \frac{a_1}{a} j_i + j_j - \frac{a_2}{a} j_m \frac{\psi}{\Delta}.
 \end{aligned} \quad (9)$$

Решение (6) удовлетворяет условию одной из основных теорем теории потенциала – теоремы о среднем. Действительно, приняв координаты цен-

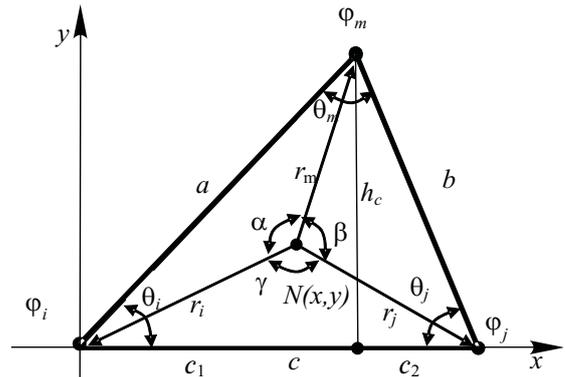


Рис. 2

тра окружности, описанной вокруг КЭ, и учитывая равенство

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial n} \frac{d\Gamma}{\Delta n} y_0 = j^* - j_0,$$

где $j^* = \frac{j_i + j_j}{2}$; j_0 – значение функции в центре окружности; y_0 – ордината указанной точки в базисе (x, y) , а также аналогичные соотношения, приходим к тождественному результату.

Погрешность результата. Линейная аппроксимация скалярной функции на контуре КЭ (погрешность $O(h^2)$) приводит к линейной зависимости от координат решения во всех точках области КЭ. Выполнение операций интегрирования в квадратурах и последующее исключение величин $\ln(r_i)$, $\ln(r_j)$ и $\ln(r_m)$ как сомножителей при разностных уравнениях аналога (5) позволяет утверждать, что погрешность результата (6) оценивается как $O(h^3)$, где $h = \max(a, b, c)$.

Учет поверхностных источников поля. При допущениях о линейных свойствах среды КЭ ($\epsilon = \text{const}$), полагая $\gamma = \text{const}$, учет распределенных источников поля приводит к необходимости дополнительного решения краевой задачи:

$$\begin{aligned}
 (2p) \int_{\Gamma} (N) \frac{\partial \bar{U}}{\partial n} \frac{d\Gamma}{\Delta n} &= \int_{\Gamma} \frac{1}{R_{NM}} \frac{d\Gamma}{\Delta n} + \\
 &+ \int_{\Gamma} \frac{\gamma}{m} \frac{1}{R_{NM}} \frac{d\Gamma}{\Delta n}; \quad j|_{\partial D} = 0; \quad (10)
 \end{aligned}$$

$$R_{NM} = \sqrt{(h - x)^2 + (x - y)^2}; \quad N(x, y) \text{ O.D.}$$

Приближенное решение (10) в рамках линейного распределения скалярной функции может быть найдено при аппроксимации подынтегральных выражений усредненными значениями (с погрешностью $O(h)$ относительно производной скалярной функции):

¹ Результат, полученный на этом этапе, будет использован в дальнейшем при построении схемотехнической модели КЭ.

$$\begin{aligned}
 (2p)j(N) & \gg \ln(r_i) \frac{\partial \bar{U}}{\partial n} \Big|_{\Delta S_i} - l_1 \frac{r}{2m} h_c c \frac{\partial \bar{U}}{\partial n} \Big|_{\Delta S_c} \\
 & + \ln(r_j) \frac{\partial \bar{U}}{\partial n} \Big|_{\Delta S_j} - l_2 \frac{r}{2m} h_b b \frac{\partial \bar{U}}{\partial n} \Big|_{\Delta S_b} \\
 & + \ln(r_m) \frac{\partial \bar{U}}{\partial n} \Big|_{\Delta S_m} - l_3 \frac{r}{2m} h_a a \frac{\partial \bar{U}}{\partial n} \Big|_{\Delta S_a}
 \end{aligned}$$

Для произвольной точки $N(x,y) \in OD$ тривиальный ответ $j(x,y) = 0$ может быть получен, если принять решение в виде:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \bar{U}}{\partial n} \Big|_{\Delta S_c} & = l_1 \frac{r}{2m} h_c; & \frac{\partial \bar{U}}{\partial n} \Big|_{\Delta S_b} & = l_2 \frac{r}{2m} h_b; \\
 \frac{\partial \bar{U}}{\partial n} \Big|_{\Delta S_a} & = l_3 \frac{r}{2m} h_a,
 \end{aligned} \tag{11}$$

где l_1, l_2, l_3 - весовые коэффициенты, такие что $l_i > 0; l_1 + l_2 + l_3 = 1$.

Последний вывод позволяет записать полное решение (6) и при уточнении соотношения (9) из-за наличия распределенных источников поля в контуре КЭ согласуется с (5). Окончательный результат следует рассматривать как решение для симплекс-элемента на основе формулы Грина.

Структура (6) показывает, что при произвольном выборе точки $N(x,y)$ его следует рассматривать как суперпозицию частных решений, полученных в трех локальных системах координат, связанных со сторонами КЭ. Таким образом, подпространство линейных базисных функций симплекс-элемента представлено тремя базисными функциями из (6), коэффициенты которых определяются из граничных условий [2, 3]. Вопрос целесообразного выбора частного решения будет рассмотрен далее.

Конечно-элементная практика расчетов при математическом описании состояния каждого КЭ строится на базе использования только одной из трех базисных функций \bar{J}_k .

Континуальная схмотехническая модель симплекс-элемента. В логистике решения уравнений (4) и (10), а также в последующих преобразованиях

составной частью является формулировка соотношений:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \bar{U}}{\partial n} \Big|_{\Delta S_c} x - \frac{j_j - j_i}{c} y + \frac{\partial \bar{U}}{\partial n} \Big|_{\Delta S_a} (a - h_a) + \\
 + \frac{j_i - j_m}{a} x_a - \frac{r}{m} DS_i \frac{\partial \bar{U}}{\partial n} \Big|_{\Delta S_i} \ln r_i = 0; \\
 \frac{\partial \bar{U}}{\partial n} \Big|_{\Delta S_b} h_b - \frac{j_m - j_j}{b} x_b + \frac{\partial \bar{U}}{\partial n} \Big|_{\Delta S_c} (c - x) + \\
 + \frac{j_j - j_i}{c} y - \frac{r}{m} DS_j \frac{\partial \bar{U}}{\partial n} \Big|_{\Delta S_j} \ln r_j = 0; \\
 \frac{\partial \bar{U}}{\partial n} \Big|_{\Delta S_a} h_a - \frac{j_i - j_m}{a} x_a + \frac{\partial \bar{U}}{\partial n} \Big|_{\Delta S_b} (b - h_b) + \\
 + \frac{j_m - j_j}{b} x_b - \frac{r}{m} DS_m \frac{\partial \bar{U}}{\partial n} \Big|_{\Delta S_m} \ln r_m = 0,
 \end{aligned} \tag{13}$$

которые пропорциональны разностному аналогу тождества (5) в линейном приближении для трех замкнутых четырехугольных подобластей DS_i, DS_j, DS_m с диагоналями r_i, r_j, r_m и общей точкой $N(x,y) \in OD$ (рис. 3).

Выражения (13) определяют баланс потоков скалярной функции между внешними границами, а также границами сопряжения трех подобластей с учетом распределенных источников поля внутри КЭ. Весовые коэффициенты l_1, l_2, l_3 из (11) должны быть согласованы с положением точки $N(x,y)$. Выполнить последнее требование можно, если воспользоваться L -координатами [2, 3] и принять $l_1 = \frac{y}{h_c}, l_2 = \frac{x_b}{h_b}, l_3 = \frac{x_a}{h_a}$.

Уравнения (13) можно написать независимо, исходя из (5), но предварительно следует доказать, что наличие распределенных с постоянной плотностью источников не искажает линейной структуры поля в КЭ. Последнее было показано при анализе уравнения (10). Кроме того, при построении конечно-элементных (как и конечно-разностных) соотношений все балансные методы затрудняют оценку погрешности итогового результата. В контексте предложенного подхода подчеркивается как связь формулы Грина и фундаментального тождества (5), так и то, что сами соотношения (13) возникают в результате интегрирования (4) и (10), при этом сложностей в оценке их погрешности не возникает.

Соотношения (13) позволяют сгенерировать схмотехнические модели симплекс-элемента в терминах узлового анализа электрических цепей [4].

Разделяя слагаемые и принимая обозначения:

$$J_1 = - \frac{\partial \bar{U}}{\partial n} \Big|_{\Delta S_c} x + \frac{\partial \bar{U}}{\partial n} \Big|_{\Delta S_a} (a - h_a) + r DS_i \frac{\partial \bar{U}}{\partial n} \Big|_{\Delta S_i} \ln r_i;$$

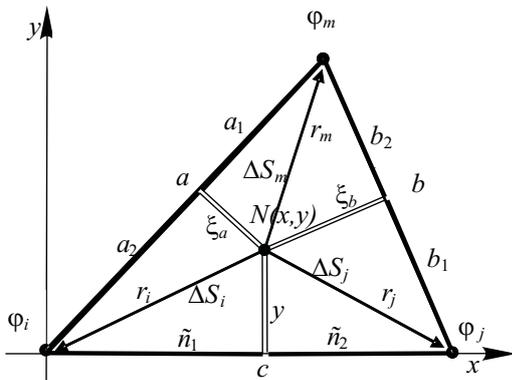


Рис. 3

шем случае произвольного по форме КЭ она не лежит на прямой Эйлера и на рис. 5 не показана.

Отметим то обстоятельство, что для остроугольного КЭ все указанные точки лежат внутри контура КЭ, для прямоугольного точки O и H лежат на контуре КЭ. В случае тупоугольных треугольников только точки P (при $q_i < q_j + p/2$; $q_i < q_m + p/2$ и аналогичных равенствах), а также G и Q всегда находятся внутри контура КЭ.

Исследуем решение (16) в указанных случаях. Примем в качестве фиксированной точки $N(x,y)OD$ центр окружности, описанной вокруг треугольника. Подставив координаты точки O в (16), приходим к результату для матрицы жесткости (неопределенных узловых проводимостей) симплекс-элемента в виде

$$k_1 = \frac{m}{2} \cdot \begin{vmatrix} \frac{b_1 c_1}{h_b h_c} & \frac{b_1 c_2}{h_b h_c} & \frac{b_1 c_3}{h_b h_c} \\ \frac{b_2 c_1}{h_b h_c} & \frac{b_2 c_2}{h_b h_c} & \frac{b_2 c_3}{h_b h_c} \\ \frac{b_3 c_1}{h_b h_c} & \frac{b_3 c_2}{h_b h_c} & \frac{b_3 c_3}{h_b h_c} \end{vmatrix} \quad (17)$$

Соотношение (17) представлено в базисах трех локальных систем координат, связанных со сторонами КЭ. Форма полученного соотношения, хотя и отличается по виду от классического выражения, но полностью совпадает с ним при использовании только одной системы координат.

Очевидно, поскольку точка O для тупоугольного КЭ лежит за контуром элемента, то формула Грина (и тождество (5)) не могут быть применены, а значит, классическая матрица жесткости (неопределенных узловых проводимостей) в этом случае не существует, как не имеющая физического смысла, хотя формально может быть вычислена. Это является одной из двух причин, указывающих на невозможность использования таких фрагментов в классической интерпретации МКЭ.

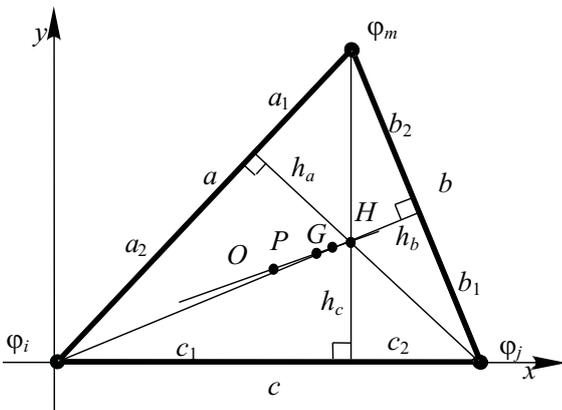


Рис. 5

На практике тупоугольные КЭ неизбежно появляются при аппроксимации криволинейных границ расчетной области поля и лишь небольшое их число по сравнению с «нормальными» элементами скрывает неадекватность для них классической математической модели. Погрешность итогового результата при этом оказывается неясной.

Примем в качестве фиксированной точки $N(x,y)OD$ ортоцентр КЭ – точку H . Вводя координаты выбранной точки в (16), получаем матрицу жесткости в виде

$$k_2 = \frac{m}{2S} \cdot \begin{vmatrix} (c_1 c_2 + a_1 a_2) & (-c_1 c_2) & (-a_1 a_2) \\ (-c_1 c_2) & (c_1 c_2 + b_1 b_2) & (-b_1 b_2) \\ (-a_1 a_2) & (-b_1 b_2) & (a_1 a_2 + b_1 b_2) \end{vmatrix} \quad (18)$$

Как и в первом случае, результат (18) не может быть распространен на КЭ произвольной формы.

Приняв во внимание, что центр окружности девяти точек лежит в середине отрезка OH , для соответствующей матрицы жесткости симплекс-элемента можем записать:

$$k_3 = \frac{k_1 + k_2}{2} \quad (19)$$

Последний результат в виду удвоенного числа арифметических операций и необходимости выполнения дополнительной проверки по условиям применимости не имеет практического значения и может рассматриваться только в качестве методического.

Примем в качестве фиксированной точки $N(x,y)OD$ центр тяжести КЭ – точку G . Вводя координаты выбранной точки в (16), получаем результат для матрицы жесткости:

$$k_4 = 2m \frac{S}{3} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{c^2 + a^2} & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{a^2} \\ \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c^2 + b^2} & \frac{1}{b^2} \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b^2 + a^2} \end{vmatrix} \quad (20)$$

Результат имеет приоритетное значение по сравнению с предыдущими, поскольку не связан никакими ограничениями по форме КЭ. Соотношение (20) может быть рекомендовано для практических расчетов в качестве универсального.

Решение (16) для центра вписанной окружности (точки Q), приводит к выражению для матрицы жесткости:

$$k_5 = m \frac{S}{p} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{c} + \frac{1}{a} & \frac{1}{c} & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} + \frac{1}{b} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \end{vmatrix} \quad (21)$$

где $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ – полупериметр треугольника.

Замечания, высказанные ранее по поводу (20), полностью остаются в силе и для (21). Очевидно, при указанном подходе в четырех последних случаях матрицы жесткости симплекс-элемента (матрицы неопределенных узловых проводимостей) имеют неклассическую форму как по виду, так и по содержанию. Результаты (17)-(21) можно объединить в практически реализуемое семейство схемотехнических моделей КЭ.

В табл. 1–3 представлены схемотехнические решения для КЭ различной формы, вычисленные на основе представленных соотношений.

Ансамблирование глобальной матрицы жесткости при схемотехническом подходе может быть осуществлено методами теории электрических цепей при каскадном соединении многополюсников. Такие алгоритмы формирования уравнений, как, например, в узловом анализе электрической цепи метод поэлементного вклада, позволяют сформировать матрицу состояния с последующим решением на основе выбранного метода [4]. Отметим, что такое важное свойство глобальной матрицы жесткости, как степень разреженности, не ухудшается.

В процессе составления узловых уравнений следующая ситуация должна быть принята во внимание. Если узел с номером i является внутренним, т.е. окружен тремя или более КЭ, то группа слагаемых вида $\frac{\partial \bar{J}}{\partial n} \frac{d\bar{J}}{dn} x + \frac{\partial \bar{J}}{\partial n} \frac{d\bar{J}}{dn} y$ ($a - h_a$)^б и аналогичных, соответствующих всем ребрам, примыкающим к рассматриваемому узлу, в сумме обращается в нуль. Эквивалентный источник тока в рассматриваемом узле образуется как сумма слагаемых вида $e r_k DS_k$, обеспечивая баланс потоков между КЭ. Реализация в граничных узлах краевых условий всех видов не вызывает сложностей.

Выбор линейной базисной функции. Триангуляция области поля с границами сложной конфигурации приводит к появлению КЭ разнообразных форм. Если для остроугольных и прямоугольных треугольников частные решения \bar{J}_k равноценны, то использование тупоугольных шаблонов практика прикладных расчетов не рекомендует [2, 3], объясняя это большой погрешностью. Однако именно такие шаблоны чаще всего получаются при аппроксимации криволинейных границ.

Дадим простую интерпретацию того, что эта проблема легко решается путем рационального выбора базисной функции КЭ и матрицы жесткости [5, 6].

На рис. 6 в локальной системе координат, связанной со стороной треугольника c , линейную базисную функцию из (6) запишем в виде

$$\bar{J}(x, y) = \frac{J_i}{3} \left(1 - \frac{x}{c} - \frac{c_2' y}{h_c c} \right) + \frac{J_j}{3} \left(\frac{x}{c} + \frac{c_1' y}{h_c c} \right) + \frac{J_m}{3} \left(\frac{y}{h_c} \right)$$

где $J^* = \frac{J_j - J_i}{c} c_1 + J_i$.

Однако значение J^* лежит вне контура треугольника и не является элементом линейной оболочки рассматриваемого КЭ. Эта величина может быть найдена только из соседнего шаблона. Можно сказать, что эта аппроксимация, удовлетворяя исходному уравнению (4) и краевым условиям, не является при этом решением задачи о распределении полевой функции на КЭ. Следовательно, в системе координат xu не может быть построена финитная базисная функция симплекс-элемента [5, 6].

Сказанное выше является второй причиной, препятствующей использованию тупоугольных фрагментов в классической интерпретации МКЭ. Таким образом, этот выбор частного решения из (6) невозможен, так как приводит к неконтролируемой погрешности.

Ситуация разрешима, если воспользоваться частным решением из (6) в локальной системе координат, связанной со стороной a (рис. 7). В указанной ситуации в осях $h_a x_a$ финитная функция выглядит следующим образом:

$$\bar{J}(h, x) = \frac{J_i}{3} \left(\frac{x}{h_a} + \frac{J_j - J_m}{a} h \right) + \frac{J_m}{3} \left(\frac{y}{h} \right)$$

$$J^* = \frac{J_i - J_m}{a} a_1 + J_m$$

В последнем случае все величины, входящие в определение базисной функции, принадлежат линейной оболочке треугольника.

Окончательно рекомендации по возможности использования тупоугольных фрагментов в методе конечных элементов можно сформулировать следующим образом [5, 6]:

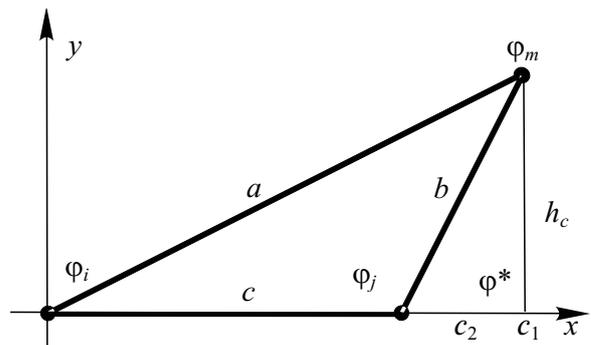
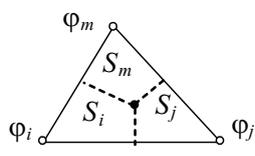
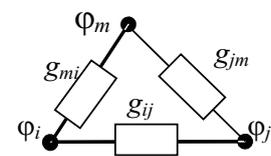


Рис. 6

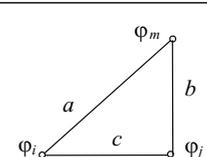
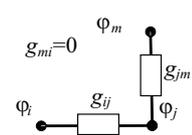
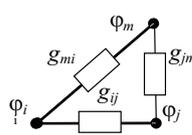
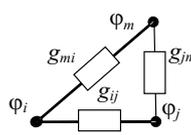
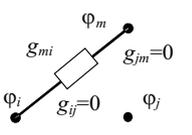
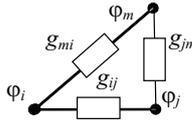
Таблица 1

КЭ – произвольный остроугольный треугольник		Схема замещения КЭ		
 $q_i = 55^\circ$ $q_j = 47,2^\circ$ $q_m = 77,8^\circ$				
Центр описанной окружности (точка O)	Центр окружности девяти точек (точка P)	Центр тяжести (точка G)	Ортоцентр (точка H)	Центр вписанной окружности (точка Q)
й 0,517 - 0,108 - 0,464 к - 0,108 0,458 - 0,35 л - 0,464 - 0,35 0,814	й 0,568 - 0,253 - 0,314 к - 0,253 0,516 - 0,262 л - 0,314 - 0,262 0,577	й 0,569 - 0,205 - 0,364 к - 0,205 0,496 - 0,292 л - 0,364 - 0,292 0,656	й 0,564 - 0,399 - 0,165 к - 0,399 0,574 - 0,175 л - 0,165 - 0,175 0,339	й 0,554 - 0,237 - 0,317 к - 0,237 0,521 - 0,283 л - 0,317 - 0,283 0,600

Примечания: соответствие между значениями параметров схемы замещения и элементов матрицы жесткости установлено в (16); для равностороннего КЭ все образующие точки семейства матриц жесткости сливаются в одну и, следовательно, $k_1=k_2=k_3=k_4=k_5$; распределение источников поля по узлам равностороннего КЭ (источники тока в схемной модели КЭ) осуществляется пропорционально сечениям $S_i=S_j=S_m=S_{КЭ}/3$; распределение источников поля КЭ по узлам рассматриваемого остроугольного треугольника (источники тока в схемной модели КЭ) осуществляется пропорционально сечениям:

для точки O – $S_i=0,3S_{КЭ}$; $S_j=0,288S_{КЭ}$; $S_m=0,412S_{КЭ}$; для точки P – $S_i=0,374S_{КЭ}$; $S_j=0,417S_{КЭ}$; $S_m=0,209S_{КЭ}$;
 для точки G – $S_i=0,355S_{КЭ}$; $S_j=0,376S_{КЭ}$; $S_m=0,269S_{КЭ}$; для точки H – $S_i=0,395S_{КЭ}$; $S_j=0,532S_{КЭ}$; $S_m=0,073S_{КЭ}$;
 для точки Q – $S_i=0,352S_{КЭ}$; $S_j=0,42S_{КЭ}$; $S_m=0,227S_{КЭ}$.

Таблица 2

КЭ – прямоугольный равнобедренный треугольник				
				
Центр описанной окружности (точка O)	Центр окружности девяти точек (точка P)	Центр тяжести (точка G)	Ортоцентр (точка H)	Центр вписанной окружности (точка Q)
й 0,5 - 0,5 0 к - 0,5 1 - 0,5 л 0 - 0,5 0,5	й 0,5 - 0,25 - 0,25 к - 0,25 0,5 - 0,25 л - 0,25 - 0,25 0,5	й 0,500 - 0,333 - 0,167 к - 0,333 0,667 - 0,333 л - 0,167 - 0,333 0,500	й 0,5 0 - 0,5 к 0 0 0 л - 0,5 0 0,5	й 0,500 - 0,293 - 0,207 к - 0,293 0,586 - 0,293 л - 0,207 - 0,293 0,500
Схемотехническое решение	Схемотехническое решение	Схемотехническое решение	Схемотехническое решение	Схемотехническое решение
				

Примечания: матрица жесткости для ортоцентра является вырожденной, ей соответствует некорректная схемотехническая модель (в описании отсутствует информация об узле j), причина этого – образующая точка совпадает с узловой; распределение источников поля КЭ по узлам (источники тока в схемной модели КЭ) осуществляется пропорционально сечениям:

для точки O – $S_i=0,25S_{КЭ}$; $S_j=0,5S_{КЭ}$; $S_m=0,25S_{КЭ}$; для точки P – $S_i=0,4375S_{КЭ}$; $S_j=0,125S_{КЭ}$; $S_m=0,4375S_{КЭ}$;
 для точки G – $S_i=0,389S_{КЭ}$; $S_j=0,222S_{КЭ}$; $S_m=0,389S_{КЭ}$; для точки Q – $S_i=0,414S_{КЭ}$; $S_j=0,172S_{КЭ}$; $S_m=0,414S_{КЭ}$.

Таблица 3

КЭ – тупоугольный произвольный треугольник				
		Схемотехническое решение 		
Центр описанной окружности (точка O)	Центр окружности девяти точек (точка P)	Центр тяжести (точка G)	Ортоцентр (точка H)	Центр вписанной окружности (точка Q)
Схемотехническое решение отсутствует	Схемотехническое решение отсутствует	Схемотехническое решение существует	Схемотехническое решение отсутствует	Схемотехническое решение существует
		й 0,233 - 0,092 - 0,141 к - 0,092 0,778 - 0,686 л - 0,141 - 0,686 0,827		й 0,284 - 0,127 - 0,157 к - 0,127 0,474 - 0,347 л - 0,157 - 0,347 0,504

Примечания: матриц жесткости не существует для точек O, P и H, поскольку они лежат вне КЭ, схемотехнических моделей нет; распределение источников поля КЭ по узлам (источники тока в схемной модели КЭ) осуществляется пропорционально сечениям:

для точки G – $S_i=0,436S_{КЭ}$; $S_j=0,448S_{КЭ}$; $S_m=0,116S_{КЭ}$; для точки Q – $S_i=0,663S_{КЭ}$; $S_j=0,257S_{КЭ}$; $S_m=0,08S_{КЭ}$.

для тупоугольных КЭ базисная функция должна быть выбрана в локальной системе координат, связанной с самой длинной из сторон КЭ;

необходимые градиенты следует вычислять именно из указанной базисной функции;

в качестве центральной точки $N(x,y)$, относительно которой рекомендуется вычислять матрицу жесткости, следует использовать либо центр тяжести, либо центр вписанной в КЭ окружности, которые всегда лежат внутри контура КЭ при любой его форме;

при наличии распределенных источников поля весовые коэффициенты l_1, l_2, l_3 из (11) должны быть согласованы с положением точки $N(x,y)$.

Таким образом, две точки (центр тяжести треугольника и центр окружности, вписанной в треугольник), принятые в качестве центра для построения матрицы жесткости, дадут результат с заданной методологической погрешностью. Это позволит в процессе реализации МКЭ снять любые ограничения по форме КЭ и тем самым расширить его возможности. Методологическая погрешность

решения при выполнении указанных замечаний всегда будет сохраняться на уровне $O(h^2)$, где $h = \max(a,b,c)$.

Приложение. Необходима сравнительная оценка на тестовом примере схемотехнической и классической реализаций МКЭ и анализ итоговых результатов. В качестве контрольного материала использована классическая задача о кручении цилиндрического стержня некругового сечения, для которой в [7] приведено «ручное» решение. Расчетная модель в виде 1/8 части исходной области и конечно-элементная сетка (в виде сплошной и штриховой линий) показаны на рис. 8, а и б. В каждом сравнительном варианте матрица жесткости (МЖ) элементов определялась для альтернативных точек, соответствующих предложенным схемотехническим решениям.

Функция напряжений $j(x,y)$ подчиняется дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 j}{\partial y^2} + 2Gq = 0; \quad j|_{\partial D} = 0,$$

где $G = 0,84 \cdot 10^7$ Н/см² – модуль сдвига материала; $q = \frac{\rho}{180} \cdot \frac{1}{100}$ рад/см – угол закручивания на единицу длины².

Результаты расчетов для конечно-элементной сетки (сплошная линия) приведены в табл. 4.

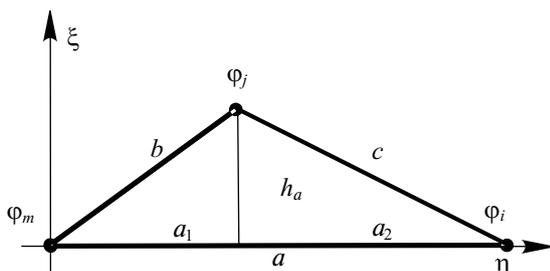


Рис. 7

2 Расчеты проведены при тех числовых данных параметров и констант, значения которых указаны в [7] и показаны на рис. 8.

Таблица 4

Узловая точка	1. Точное решение	2. Приближенное решение по [7]	3. Приближенное решение при построении МЖ относительно центра описанной окружности (точка O)	4. Приближенное решение при построении МЖ относительно центра окружности девяти точек (точка P)	5. Приближенное решение при построении МЖ относительно центра тяжести (точка G)	6. Приближенное решение при построении МЖ относительно ортоцентра (точка H)	7. Приближенное решение при построении МЖ относительно центра вписанной окружности (точка Q)
j_1	205,6	218,04	196,4	218,12	210,12	—	213,62
j_2	160,03	159,9	152,72	141,8	147,27	—	144,9
j_4	126,4	123,56	119,99	141,8	132,32	—	136,44
Число обусловленности глобальной МЖ (матрицы узловых проводимостей)							
	—	10,89	10,89	6,31	7,51	—	6,9

Комментарии. Различие результатов во втором и третьем столбцах табл. 4 носит принципиальный характер: при одинаковых элементных и глобальной МЖ имеет место несовпадение правых частей конечно-элементной системы уравнений. Причина – в принципе их формирования. Для каждого КЭ автор [7] распределяет источники поля по узлам как $2Gq \frac{S_{КЭ}}{3} = 29,7$, т. е. без учета реального положения точки O , относительно которой формируется матрица жесткости элемента.

Каковы бы не были доводы в пользу такого подхода и как бы убедительно они не звучали, их нельзя противопоставить интегральному тождеству (5), которое требует иного решения. На рис. 9 на примере первого фрагмента показано, что распределение источников поля по узлам (или в схемотехнической интерпретации определение эквивалентных источников тока в соответствующей цепной модели) с учетом положения точки O осуществляется пропорционально сечениям S_1 , S_2 и S_4 , а именно: для узла 1 – $J_1 = 2Gq \frac{S_{КЭ}}{4} = 21,817$; для узла 2 – $J_2 = 2Gq \frac{S_{КЭ}}{2} = 43,633$ и узла 4 – $J_4 = 2Gq \frac{S_{КЭ}}{4} = 21,817$.

В результате формирования полной системы алгебраических уравнений относительно искомым переменных правая часть ее по [7] выглядит как $B = [29,07; 87,22; 29,07; 87,22; 87,22; 87,22; 29,07]^T$, в то время как при ис-

пользовании интегрального тождества (5) – $B = [21,817; 87,22; 43,633; 87,22; 87,22; 21,817]^T$. Учет граничных условий приводит к окончательному результату в первом случае $B = [29,07; 87,22; 87,22]^T$, а в альтернативном – $B = [21,817; 87,22; 87,22]^T$.

Результаты вычислений в шестом столбце отсутствуют ввиду некорректности соответствующей схемотехнической модели (ортоцентр всех КЭ совпадает с узловой точкой). Результат в четвертом столбце выглядит слабее, но обнадеживающе.

На рис. 8,б представлена другая конечно-элементная сетка (штриховые линии), особенность которой заключается в наличии трех тупоугольных фрагментов (элементов 1, 3 и 4). И хотя данная ситуация носит искусственный характер, автор стремится показать, что наличие тупоугольных фрагментов не является препятствием для проведения расчетов.

Следует отметить, что в литературе по МКЭ имеется масса иллюстраций, когда в конечно-элементной сетке присутствуют «плохие» элементы. Указанное обстоятельство снижает достоверность решения (с точки зрения погрешности). Результаты анализа по второму варианту сведены в табл. 5.

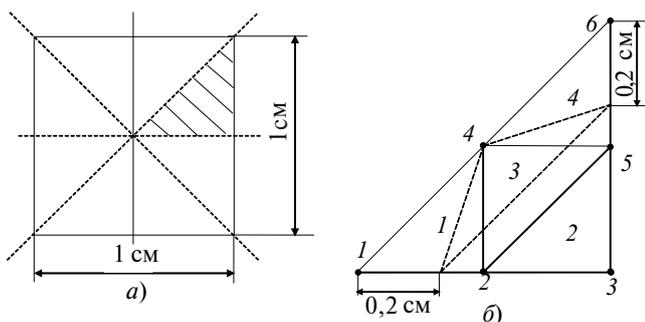


Рис. 8

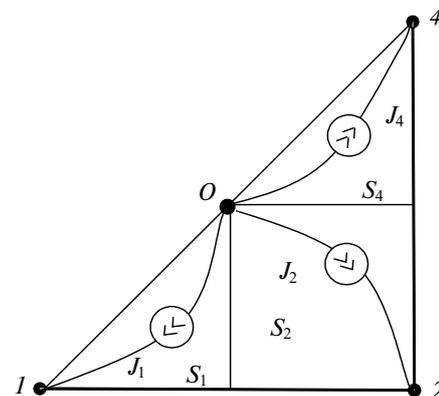


Рис. 9

Таблица 5

Узловая точка	1. Точное решение	2. Приближенное решение по [7]	3. Приближенное решение при построении МЖ относительно центра описанной окружности (точка O)	4. Приближенное решение при построении МЖ относительно центра окружности девяти точек (точка P)	5. Приближенное решение при построении МЖ относительно центра тяжести (точка G)	6. Приближенное решение при построении МЖ относительно ортоцентра (точка H)	7. Приближенное решение при построении МЖ относительно центра вписанной окружности (точка Q)
j_1	205,6	132,02	–	253,6	184,77	–	197,04
j_2^*	176,9	92,16	–	192,89	137,37	–	147,1
j_4	126,4	65,68	–	187,04	120,64	–	137,94
Число обусловленности глобальной МЖ (матрицы узловых проводимостей)							
	–	2,09	–	6,18	5,74	–	5,85

Комментарии. Решение в столбце 3 отсутствует ввиду некорректности элементных МЖ для фрагментов 1, 3 и 4 (точка O лежит вне контура КЭ).

Решение в столбце 6 отсутствует ввиду некорректности элементных МЖ для всех фрагментов.

Решение в столбце 2 получено по классической технологии МКЭ в [7]. Формализуя процесс вычислений (не обращая внимания на отсутствие физического смысла у элементных МЖ фрагментов 1, 3 и 4), приведем глобальную МЖ (с учетом граничных условий):

$$K = \begin{matrix} \begin{matrix} \text{ж} & 0,65 & -0,75 & 0,1 & \text{ц} \\ \text{з} & -0,75 & 2,292 & -0,292 & \text{ч} \\ \text{й} & 0,1 & -0,292 & 1,342 & \text{ш} \end{matrix} \end{matrix}$$

Наличие положительных недиагональных элементов является причиной того, что такой структуре нет физического аналога в виде схемотехнической модели, реализованной на пассивных элементах. Этот результат вступает в противоречие с формулой Грина и интегральным тождеством (5) как на этапах формирования, так и в окончательном виде.

В столбце 2 методология в распределении источников поля по узлам по модели $2Gq \frac{S_{КЭ}}{3}$ после ансамблирования и учета граничных условий дает результат: $V = [23,259; 93,037; 74,43]^T$. Оставаясь на позициях трактовки по Грину схемоанализа и МКЭ, ясно, что такое правило будет справедливо только для равностороннего КЭ. По мере искажения формы КЭ (отхода от указанной) будет расти методическая погрешность итогового результата. Указанные причины объясняют слабый (некорректный) результат в столбце 2.

В обоих вариантах для полноты сравнения приводятся числа обусловленности ($|I_{\max}/I_{\min}|$) глобальных МЖ (матриц узловых проводимостей). Из табл. 4 видно, что альтернативные решения обладают заметно лучшими свойствами. В табл. 5 анало-

гичный результат в столбце 2 не обсуждается как полученный для матрицы, не имеющей физического смысла, и приводится по принципу «как есть».

В целом, как указывает автор [7, стр.92], «четыре элемента мало для получения приемлемой точности решения, но достаточно для иллюстрации».

Целесообразность применения смешанной стратегии, когда для «хороших» КЭ используется классическая матрица жесткости, а для «тонких» фрагментов один из альтернативных вариантов, не очевидна, поскольку требует включения в вычислительный процесс дополнительного логического блока.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шакиров М.А. Теоретические основы электротехники. Новые идеи и принципы. Схемоанализ и диакоптика. Декомпозиционные алгоритмы. – СПб.: Издательство С.-Петербургского университета, 2001, 212 с.
2. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. – М.: Мир, 1986, 318 с.
3. Ильин В.П. Методы и технологии конечных элементов. – Новосибирск: Изд. Института вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, 2007, 371 с.
4. Демирчян К.С., Нейман Л.Р., Коровкин Н.В., Чечурин В.Л. Теоретические основы электротехники: Учебник для вузов, т. 1, 4-е изд. – СПб: Питер, 2004, 463 с.
5. Булавин В.Ф. Метод конечных элементов: возможность применения симплекс-элементов произвольной формы. Информатизация процессов формирования открытых систем на основе СУБД, САПР, АСНИ и систем искусственного интеллекта. – Материалы VII Международной научно-техн. конф. – Вологда, Вологодский государственный технический университет, 2013, 243 с.
6. Булавин В.Ф. Метод конечных элементов и выбор линейной базисной функции. Автоматизация и энергосбережение машиностроительного и металлургического производств, технология и надежность машин, приборов и оборудования. – Материалы VIII Международ. научно-техн. конф. – Вологда: ВоГТУ, 2013, 264 с.

7. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов/Пер. с англ. – М.: Мир, 1979, 392 с.

[30.06.14]

Автор: Булавин Вячеслав Федорович окончил электромеханический факультет Ленинградского по-

литехнического института (ЛПИ) по специальности «Электрические аппараты» в 1978 г. В 1983 г. защитил кандидатскую диссертацию в ЛПИ. Доцент кафедры «Технологии и оборудование автоматизированных производств» Вологодского государственного университета.

Elektrichestvo (Electricity), 2015, No. 1, pp. 39–50.

Continuum Circuit Engineering Models in the Finite Element Method

V.F. BULAVIN

Matters concerned with interconnection between circuit engineering and the finite element method were elaborated to a logically completed result in [1] (as well as in earlier works of that author), in which equivalent electric circuits of a wide range of finite elements were constructed for elliptical equations. However, models presented as unique ones were obtained as the results of those works. A distinguishing feature of the present article is that a variety of circuit solutions is shown taking linear elements as an example, which opens the possibility to extend the practice of using «thin» fragments. Green's formula serves as the mathematical tool for investigation. A solution for the element stiffness matrices of a linear finite element is obtained, and it is shown that the number of such structures has a continuum power. A finite element continuum model in the form of electric circuit opens the possibility to use well-known circuit analysis algorithms for forming the global stiffness matrix. The use of the circuit engineering solution makes it possible to remove any limitations imposed on the shape of finite elements owing to the appropriate choice of element stiffness matrix and basic function.

Key words: Green's formula, finite element method, circuit engineering model, stiffness matrix, approximation

REFERENCES

1. **Shakirov M.A.** *Teoreticheskiye osnovy elektrotekhniki. Novye idei i printsipy. Skhemoanaliz i diakoptika. Dekompozitsionnyye algoritmy* (Theoretical Principles of Electrical Engineering. New idea and principles. Circuit Analysis and Diakoptika. Decomposition Algorithms). St. Petersburg, Publ. of St. Petersburg University, 2001, 212 p.

2. **Zenkevich O., Morgan K.** *Konechnye elementy i approksimatsiya* (Finite Elements and Approximation). Moscow, Publ. «Mir», 1986, 318 p.

3. **Il'in V.P.** *Metody i tekhnologii konechnykh elementov* (Methods and technologies of Finite Elements). Novosibirsk: Izd. Instituta vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi geofiziki Sibirskogo otdeleniya Rossiiskoi akademii nauk (Publ. of Institute of Computational Mathematics and Mathematic Geophysics of Siberia Branch of Russian Academy of Sciences), 2007, 371 p.

4. **Demirchyan K.S., Neiman L.R., Korovkin N.V., Chechurin V.L.** *Teoreticheskiye osnovy elektrotekhniki: Uchebnik dlya vuzov, t. 1, izd. 4* (Theoretical Principles of Electrical Engineering. Handbook for Higher Schools, t. 1, 4th Publ. St. Petersburg, Publ. «Piter», 2004, 463 p.

5. **Bulavin V.F.** *Materialy VII Mezhdunarodnoi nauchno- tekhn. konf. «Metod konechnykh elementov: vozmozhnost' primeneniya*

simpleks-elementov proizvol'noi formy. Informatizatsiya protsessov formirovaniya otkrytykh sistem na osnove SUBD, SAPR, ASNI i system iskusstvennogo intellekta». (The finite element method: The possibility of using simplex elements with arbitrary shape. Application of information technologies to construction of open systems on the basis of database management systems, computer-aided design systems, computer-aided scientific research systems, and artificial intelligence systems). Proc. VII International Scientific and Technical Conf. Vologda, Publ. of Vologda State Technical University, 2013, 243 p.

6. **Bulavin V.F.** *Materialy VIII Mezhdunarodnoi nauchno-tekhn. konf. Metod konechnykh elementov i vybor lineinoi bazisnoi funktsii. Avtomatizatsiya i energosberezheniye mashinostroitel'nogo i metallurgicheskogo proizvodstv, tekhnologiya i nadezhnost' mashin, priborov i oborudovaniya.* (The finite element method and selection of the linear basic function. Automation and energy conservation in machinery construction and metallurgical production processes, technology and reliability of machines, instruments, and equipment). Proc. VIII International Scientific and Technical Conf. Vologda, Publ. Vologda State Technical University, 2013, 264 p.

7. **Seegerlind L.** *Primeneniye metoda konechnykh elementov/Per s angl.* (Application of Finite Elements Method)/Trans. from English. Moscow, Publ. «Mir», 1979, 392 p.

Author: **Bulavin Vyacheslav Fedorovich** (Vologda, Russia) – Cand. Techn. Sci., Associate Professor, Vologda State University.

References

Shakirov M.A. Teoreticheskiye osnovy elektrotehniki. Novye idei i printsypy. Skhemoanaliz i diakoptika. Dekompozitsionnye algoritmy (Theoretical Principles of Electrical Engineering. New idea and principles. Circuit Analysis and Diakoptika. Decomposition Algorithms). St. Petersburg, Publ. of St. Petersburg University, 2001, 212 p.

Zenkevich O., Morgan K. Konechnye element i approksimatsiya (Finite Elements and Approximation). Moscow, Publ. «Mir», 1986, 318 p.

Il'in V.P. Metody i tekhnologii konechnykh elementov (Methods i technologies of Finite Elements). Novosibirsk Izd. Institute vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi geofiziki Sibirskogo otdeleniya Rossiiskoi akademii nauk (Publ. of Institute of Computational Mathematics and Mathematic Geophysics of Siberia Branch of Russian Academy of Sciences), 2007, 371 p.

Demirchyan K.S., Neiman L.R., Korovkin N.V., Chechurin V.L. Teoreticheskie osnovy elektrotehniki: Uchebnik dlya vuzov, t. 1, izd. 4 (Theoretical Principles of Electrical Engineering. Handbook for Higher Schools, t. 1, 4th Publ., St. Petersburg, Publ. «Piter», 2004, 463 p.

5. Bulavin V.F. Materialy VII Mezhdunarodnoi nauchno-techni. conf. «Metod konechnykh elementov: vozmozhnost' primeneniya simpleks-elementov proizvol'noi formy. Informatizatsiya protsessov formirovaniya otkrytykh system na osnove SUBD, SAPR, ASNI i system iskusstvennogo intellekta». Proc. VII International Scientific and Technical Conf. (The finite element method: The possibility of using simplex elements with arbitrary shape. Application of information technologies to construction of open systems on the basis of database management systems, computer-aided design systems, computer-aided scientific research systems, and artificial intelligence systems). Vologda, Publ. of Vologda State Technical University, 2013, 243 p.

6. Bulavin V.F. Materialy VIII Mezhdunarodnoi nauchno-technic. conf. Metod konechnykh elementov i vybor lineinoi bazisnoi funktsii. Avtomatizatsiya i energosberezheniye mashinostroitel'nogo i metallurgicheskogo proizvodstv, tekhnologiya i nadezhnost' mashin, priborov i oborudovaniya. Proc. VIII International Scientific and Technical Conf. (The finite element method and selection of the linear basic function. Automation and energy conservation in machinery construction and metallurgical production processes, technology and reliability of machines, instruments, and equipment). Vologda, Publ. Vologda State Technical University, 2013, 264 p.

7. Segerlind L. Primeneniye metoda konechnykh elementov/Per s angl. (Application of Finite Elements Method)/Trans. From English. Moscow, Publ. «Mir», 1979, 392 p.