

Новая декомпозиция узловых цен на вклады ценообразующих заявок при оптимизации режимов электрических систем¹

ВАСЬКОВСКАЯ Т.А.

На оптовом рынке электроэнергии расчет узловых цен проводится одновременно с оптимизацией режимов электрической системы. Целевой функцией задачи оптимизации является удовлетворение наиболее эффективного спроса и загрузка наиболее эффективного генерирующего оборудования, ограничениями – нелинейные уравнения установившегося режима, сетевые ограничения, ограничения по напряжению и т.п. Источником для формирования узловых цен являются замыкающие (ценообразующие) заявки участников. Разложение узловых цен на компоненты позволяет определить факторы, влияющие на узловые цены. Стандартная декомпозиция предполагает разложение цен на системную цену, вклад потерь и системных ограничений. Предлагается новый метод декомпозиции узловых цен, позволяющий определить вклад ценообразующих заявок как совокупный, так и обусловленный сетевыми ограничениями и ограничениями по напряжению. Метод основан на использовании данных оптимального режима и анализе чувствительности задачи оптимизации к ограничениям. Полученная декомпозиция уникальна, а сумма рассчитанных вкладов равна узловой цене. Она может быть использована в мониторинге цен на рынке на сутки вперед и балансирующем рынке, при оценке и объяснении влияния тех или иных факторов на ценообразование. Она позволяет выделять зоны влияния ценообразующих заявок и отвечает на вопрос, какой именно заявкой и насколько сформирована узловая цена. Применение предлагаемого подхода показано на примере электрической системы из пяти узлов при различных случаях ценообразования.

Ключевые слова: рынок электроэнергии, электрическая система, узловая модель ценообразования, узловая цена, декомпозиция, ценообразующие заявки

На рынке электроэнергии обеспечивается спрос на потребление электроэнергии с наиболее эффективной загрузкой электрических станций на основе реализуемых режимов электрической системы. Участниками рынка являются крупные поставщики и покупатели электрической энергии и мощности. К поставщикам относятся владельцы (арендаторы) генерирующего оборудования установленной мощностью не менее 5 МВт. К покупателям относятся энергосбытовые и энергоснабжающие организации, крупные потребители с присоединенной мощностью не менее 20 МВА. Организации, осуществляющие импортно-экспортные операции, являются одновременно и поставщиками, и покупателями электроэнергии и мощности.

На оптовом рынке электроэнергии в России принята узловая модель ценообразования, в соответствии с которой цена на электроэнергию определяется в каждом узле электрической системы в двустороннем узлом аукционе. Расчет узловых цен проводится в ходе оптимизации режима электрической системы по ценовым заявкам участников рынка. При отборе ценовых заявок приоритет отдается наиболее дешевым заявкам поставщиков и наиболее дорогим заявкам покупателей. Покупа-

тели в основном подают так называемые ценопринимающие заявки, в которых они выражают готовность купить электроэнергию по любой цене. Подача такой заявки отражает неэластичный спрос на электроэнергию. Поэтому покупатели участвуют в формировании цены на рынке электроэнергии в меньшей мере, чем поставщики, у которых цена в заявке отражает топливную составляющую себестоимости производства электроэнергии. Равновесная цена на рынке формируется последней (замыкающей) – ценообразующей заявкой поставщика или покупателя, отобранной в ходе оптимизации.

Узловые цены на электроэнергию формируются по одной или нескольким ценообразующим заявкам под влиянием ограничений задачи оптимизации. В России оптимизация проводится для электрической системы примерно из 8600 узлов² и для каждого часа на рынке на сутки вперед и балансирующем рынке определяются около 8600 узловых равновесных цен и индикаторов балансирующего рынка. Для каждого участника складывающиеся цены различны.

Для целей выделения факторов, повлиявших на различие узловых цен, используется выделение из узловых цен их компонент [1]. Наиболее часто вы-

¹ Работа выполнена по программе «Государственной поддержки ведущих научных школ» (НШ-6656.2014.8).

² Актуальная информация представлена на официальном сайте ОАО «СО-ЕЭС»: <http://br.so-cdu.ru/>

деляют такие компоненты, как системная цена, цена потерь и системных ограничений (например [2–6]). Системной ценой называют маржинальную цену топлива и обслуживания генерирующего оборудования [1], цену энергии [2], цену в балансирующем узле [3], цену референтного узла [4] и т.д. Однако цена топлива и обслуживания генерирующего оборудования фактически неизвестна, поставщики могут закладывать в цену и другие расходы. А в случае формирования цены заявкой покупателя она не будет отражать цену топлива вовсе. Цена в балансирующем узле и референтом узле не имеет экономического смысла системной цены – это цена в конкретных узлах, по которым никто из участников может не вести финансовые расчеты. С другой стороны, цены во всех узлах одновременно могут быть системными или ценами энергии. Например, при недостаточной пропускной способности электрической сети узловые цены в ОЭС Юга формируются локальными станциями на более высоком уровне по сравнению с ОЭС Центра. Какую из цен, в каком узле – в ОЭС Юга или ОЭС Центра – следует выбрать в качестве системной и назвать ценой энергии? Цена в балансирующем узле не соотносится с ценами, например, в ОЭС Юга. Но при этом и та, и другая цена является системной или ценой энергии, поскольку отражает топливные (и иные) затраты замыкающих станций. В этой связи системная цена – это некоторый выбранный искусственно уровень цены.

Особенностью стандартной декомпозиции является необходимость выбора референтного узла и зависимость разложения цены на составляющие от такого выбора. Для решения этой проблемы в [7] предлагается использовать распределенный балансирующий узел, в [2, 5, 6, 8, 9] предлагаются алгоритмы декомпозиции независимо от референтного узла. Но даже в этом случае авторы вынуждены ввести искусственную системную цену и получить другие вклады относительно нее. В [10] разработан подход для выбора референтной цены на основе метода наименьших квадратов отклонений составляющих системных ограничений от единичного вектора. В [3, 4] подчеркивается важность именно разницы узловых цен, которая от выбора референтного узла не зависит.

В [11] отмечается, что в электрической системе возможно существование нескольких независимых цен, которые определяют цены для всех остальных узлов. А в [6] показано, что размерность пространства возможных цен зависит от ряда факторов и может быть больше единицы. Очевидно, что независимыми ценами являются цены в ценообразующих заявках, как входные данные задачи оптимизации.

Существуют и другие способы декомпозиции. В [12] предлагается выделение таких факторов, как вероятностный характер нагрузки, учет ограничений на выработку тепла, резерв мощности и рыночная сила. В [13] выделяются факторы, определяющие влияние каждой из поданных заявок. В [14] цена раскладывается на влияние каждого из работающих генераторов плюс стоимость поддержания устойчивости в энергосистеме.

В статье декомпозицию предлагается проводить относительно ценообразующих заявок. Такая декомпозиция может показать, от каких поставщиков под влиянием каких факторов сформирована цена в узлах. В [15] предложено разложение узловых цен на вклад ценообразующих заявок и системных ограничений. В статье представлено также разложение системных ограничений на вклад каждой из ценообразующих заявок. Также следует отметить, что в большинстве процитированных работ используются упрощенные модели постоянного тока. В статье получены выражения для полной модели переменного тока.

Статья является продолжением исследований [16–19], направленных на изучение и анализ свойств и мониторинг узловых равновесных цен на оптовом рынке электроэнергии, факторов и условий их формирования.

Задача оптимизации. Рассматривается следующая задача оптимизации:

$$f(\mathbf{P}_g, \mathbf{P}_d, \mathbf{C}_g, \mathbf{C}_d) \text{ @ } \max(\min) |h; \quad (1)$$

$$\mathop{\hat{a}}_{\hat{d} D_j} P_d - \mathop{\hat{a}}_{\hat{g} G_j} P_g + \mathop{\hat{a}}_i P_{ij}(X) = 0, \quad j \in N \quad | \quad l_j^p; \quad (2)$$

$$\mathop{\hat{a}}_{\hat{d} D_j} Q_d - \mathop{\hat{a}}_{\hat{g} G_j} Q_g + \mathop{\hat{a}}_i Q_{ij}(X) = 0, \quad j \in N \quad | \quad l_j^q; \quad (3)$$

$$P_s = \mathop{\hat{a}}_{\hat{ij} s} P_{ij} \leq P_s^{\max}, \quad s \in S \quad | \quad s_s; \quad (4)$$

$$U_j^{\min} \leq U_j \leq U_j^{\max}, \quad j \in N \quad | \quad m_j^{\max(\min)}; \quad (5)$$

$$P_g^{\min} \leq P_g \leq P_g^{\max}, \quad g \in G \quad | \quad p_g^{\max(\min)}; \quad (6)$$

$$Q_g^{\min} \leq Q_g \leq Q_g^{\max}, \quad g \in G \quad | \quad r_g^{\max(\min)}; \quad (7)$$

$$0 \leq P_d \leq P_d^{\max}, \quad d \in D \quad | \quad y_d^{\max(\min)}, \quad (8)$$

где P_d, Q_d, P_g, Q_g – значения активной и реактивной мощности покупателя d или поставщика g ; C_g, C_d – цены в заявках на продажу и покупку электроэнергии; P_{ij}, Q_{ij} – потоки активной и реактивной мощности из узла i в узел j ;

$$P_{ij} = G_{ij}(U_i^2 - U_i U_j k_{ij} \cos(d_i - d_j + a_{ij})) + B_{ij} U_i U_j k_{ij} \sin(d_i - d_j + a_{ij}) + G_{cij} U_i^2;$$

$$Q_{ij} = B_{ij}(U_i^2 - U_i U_j k_{ij} \cos(d_i - d_j + a_{ij})) - G_{ij} U_i U_j k_{ij} \sin(d_i - d_j + a_{ij}) - B_{cij} U_i^2;$$

$$G_{ij} - jB_{ij} = \frac{1}{R_{ij} + jX_{ij}}; R_{ij}, X_{ij}, G_{cij}, B_{cij} - \text{параметры}$$

схем замещения линий электропередачи и трансформаторов ветви ij , для трансформатора в ветви ij : k_{ij} , a_{ij} – действительный и фазосдвигающий коэффициент трансформации; $X = (U, d)$ – амплитуда и фаза напряжения в узлах; P_s – переток активной мощности по контролируемому сечению; $G = \{g\}$, $D = \{d\}$ – множество поставщиков и покупателей; N , $|N| = n$ – множество узлов; $S = \{s\}$, $s \in L$ – множество сечений; $L = \{(i, j) | i, j \in N\}$ – множество линий электропередачи и трансформаторов (ветвей); \max , \min – ограничения максимального и минимального значений соответствующих величин (полужирным шрифтом выделены векторы (матрицы) соответствующих величин; через черту записаны обозначения множителей Лагранжа, соответствующие ограничениям и целевой функции).

Множитель Лагранжа к целевой функции h равен -1 при поиске максимума функции и 1 при поиске минимума. Введение отдельного множителя Лагранжа к целевой функции равнозначно поиску только минимального значения (максимального значения со знаком минус).

Предполагается, что целевая функция (1) содержит информацию о ценовых заявках участников и может быть представлена как целевая функция для рынка на сутки вперед³:

$$C_d^T P_d - C_g^T P_g \text{ @ max} \quad (9)$$

или как целевая функция балансирующего рынка⁴:

$$C_g^T P_g \text{ @ min.} \quad (10)$$

Целевая функция может также содержать квадратичные энергетические (расходные) характеристики электростанций. Предлагаемый алгоритм можно применить и к такой целевой функции, однако в статье подробнее остановимся на целевых функциях вида (9) и (10).

Запишем задачу оптимизации (1)–(8) в следующем виде:

$$f(P_g, P_d, C_g, C_d) \text{ @ max(min) } |h; \quad (11)$$

$$B(X, P, Q) = 0, \quad \begin{cases} \bar{p} \\ \bar{q} \\ \bar{r} \\ \bar{u} \end{cases} \quad (12)$$

$$T(X) \leq 0, \quad \bar{s}; \quad (13)$$

$$V(X) \leq 0, \quad \bar{m} \quad (14)$$

$$G(P_g, P_d, Q_g) \leq 0, \quad \begin{cases} \bar{p} \\ \bar{q} \\ \bar{r} \\ \bar{u} \end{cases} \quad (15)$$

где $P = P_g - P_d$, $Q = Q_g - Q_d$ – векторы размерности n чистых инъекций активной и реактивной мощности в узлы; (12) – система из $2n$ нелинейных уравнений установившегося режима (2) и (3); (13) – ограничения на переток активной мощности (4); (14) – ограничения по напряжению (5); (15) – остальные ограничения на диапазон изменения переменных задачи (6)–(8); черта над греческим символом означает векторную величину.

Допущения и упрощения. Без потери общности подхода сделаны следующие допущения и упрощения. Рассматривается один часовой интервал времени, значения мощности численно равны значениям электроэнергии. К каждому узлу подключен только один участник, который подает только одну заявку. Тогда векторы цен в заявках имеют ту же размерность, что и узловы цены, что делает вывод формул проще. Исследуется решение задачи оптимизации (1)–(8), и все переменные равны своим оптимальным значениям. Это позволяет в том числе исключить неактивные ограничения, которые фактически не оказывают влияния на решение задачи. Тогда справедливы соотношения:

$$T(X) = 0; \quad V(X) = 0; \quad D(P_g, P_d, Q_g) = 0.$$

Векторы множителей Лагранжа \bar{p} , \bar{r} , \bar{u} приведены к узлам, их размерности равны n . В случае отсутствия соответствующего ограничения в узле элемент вектора равен нулю. Также вектор множителей Лагранжа \bar{m} дополнен нулями до размерности вектора X .

В балансирующем узле фаза напряжения фиксирована и равна нулю, тогда как модуль напряжения оптимизируется. Также считаем, что оптимальное решение таково, что системы линейных алгебраических уравнений, полученные в ходе разложения цен, разрешимы.

Стандартная декомпозиция узловых цен. Узловые равновесные цены на электроэнергию равны множителям Лагранжа к ограничениям по балансу активной мощности. Множители Лагранжа к ограни-

³ Согласно регламенту проведения конкурентного отбора ценовых заявок на сутки вперед (приложение № 7 к Договору о присоединении к торговой системе оптового рынка): <http://www.np-sr/regulation/joining/reglaments/index.htm>

⁴ Согласно регламенту проведения конкурентного отбора заявок для балансирования системы (приложение № 10 к Договору о присоединении к торговой системе оптового рынка): <http://www.np-sr.ru/regulation/joining/reglaments/index.htm>

чениям по балансу реактивной мощности аналогично называют узловыми ценами на реактивную мощность (энергию).

Функция Лагранжа задачи оптимизации (11)–(15) записывается как

$$L = f(\mathbf{P}_g, \mathbf{P}_d, \mathbf{C}_g, \mathbf{C}_d)h + \mathbf{B}(\mathbf{X}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}) \begin{matrix} \frac{\partial L}{\partial \bar{p}} \\ \frac{\partial L}{\partial \bar{q}} \end{matrix} + \mathbf{T}(\mathbf{X})^T \bar{\mathbf{s}} + \mathbf{V}(\mathbf{X})^T \bar{\mathbf{m}} + \mathbf{D}(\mathbf{P}_g, \mathbf{P}_d, \mathbf{Q}_g) \begin{matrix} \frac{\partial L}{\partial \bar{r}} \\ \frac{\partial L}{\partial \bar{y}} \end{matrix} \quad (16)$$

Введем следующие обозначения:

$$\mathbf{J} = \tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{X}} \mathbf{B}; \quad \mathbf{A} = \tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{X}} \mathbf{T}.$$

Стандартная декомпозиция (например [2]) выводится из условия Куна–Таккера оптимальности первого порядка – равенства нулю градиента функции Лагранжа по переменной \mathbf{X} :

$$\tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{X}} L = \mathbf{J}^T \bar{\mathbf{l}} + \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{s}} + \bar{\mathbf{m}} = 0. \quad (17)$$

Из этого условия следует, что вектор, составленный из векторов множителей Лагранжа $\bar{\mathbf{l}}, \bar{\mathbf{s}}, \bar{\mathbf{m}}$ ортогонален градиенту функции Лагранжа по зависимым переменным \mathbf{X} . Относительно любого референтного узла r значения множителей Лагранжа \bar{l}_r^p, \bar{l}_r^q равны

$$\begin{matrix} \frac{\partial L}{\partial \bar{l}_r^p} \\ \frac{\partial L}{\partial \bar{l}_r^q} \end{matrix} = -(\mathbf{J}^T \cdot r)^{-1} (\mathbf{J}^T_r \bar{l}_r^p + \mathbf{A}^T \cdot r \bar{\mathbf{s}} + \bar{\mathbf{m}}_r), \quad (18)$$

Индексы r и $-r$ обозначают соответствующие подматрицы. Первая компонента $-(\mathbf{J}^T \cdot r)^{-1} \mathbf{J}^T_r \bar{l}_r^p$ определяет системную компоненту цены с учетом потерь. Вторая компонента $-(\mathbf{J}^T \cdot r)^{-1} \mathbf{A}^T \cdot r \bar{\mathbf{s}}$ определяет вклад сетевых ограничений. Третья компонента $-(\mathbf{J}^T \cdot r)^{-1} \bar{\mathbf{m}}_r$ определяет вклад ограничений по напряжению. В формуле (18) очевидно влияние выбора референтного узла на уровень каждой компоненты.

Новая декомпозиция узловых цен. Основывая новую декомпозицию узловых цен на ценообразующих заявках, рассмотрим градиент функции Лагранжа по мощности производства и потребления активной и реактивной мощности:

$$\begin{matrix} \tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{P}_g} L^T = h \mathbf{C}_g \cdot \bar{l}^p + \bar{p}^{\max} - \bar{p}^{\min} = 0; \\ \tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{P}_d} L^T = -h \mathbf{C}_g + \bar{l}^p + \bar{y}^{\max} - \bar{y}^{\min} = 0; \\ \tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{Q}_g} L^T = -\bar{l}^q + \bar{r}^{\max} - \bar{r}^{\min} = 0. \end{matrix} \quad (19)$$

Из (19) следует, что множитель Лагранжа l_j^p равен цене в заявке, поданной в отношении этого узла, при условии равенства нулю множителей Лагранжа p_j, y_j . Это означает, что ценообразующими заявками будут являться те, в узлах которых ограничения (6), (8) неактивны [9, 15, 20]. Малые изменения в электрической системе балансируются посредством изменения объемов мощности в этих узлах. Случаем, когда p_j или y_j равно нулю и соответствующее ограничение активно, можно пренебречь. Он теоретически может возникнуть, когда суммарная мощность генерации, суммарная мощность потребления и нагрузочные потери оптимального режима оказываются сбалансированными сами по себе. Тогда для множества указанных узлов и заявок можно считать заданными (независимыми) значения множителей Лагранжа и не заданными (зависимыми) значения активной мощности. Определим термин *ценообразующая заявка*: заявка, для которой ограничения (6) или (8) неактивны и, как следствие, цена на электроэнергию в узле равна цене в заявке.

В остальных узлах, напротив, активная мощность равна предельному значению ограничений (6), (8), т.е. независима, а множители Лагранжа l_j^p не известны и зависимы. Аналогично множитель Лагранжа l_j^q равен нулю в pv -узлах, когда неактивно ограничение на диапазон изменения реактивной мощности генератора (7), а реактивная мощность является зависимой величиной. И наоборот l_j^q не известны в pq -узлах, когда заданы конкретные инъекции реактивной мощности.

Введем следующие обозначения для узлов с независимыми и зависимыми узловыми ценами: у первых будем использовать индекс w , у вторых – u . Разделяя все множество узлов и узловых цен по данному признаку, получим, что в вектор $\bar{l}_w = \begin{matrix} \frac{\partial L}{\partial \bar{l}_w^p} \\ \frac{\partial L}{\partial \bar{l}_w^q} \end{matrix}$ включены узловые цены с ценообразующими заявками и нулевыми узловыми ценами на реактивную мощность в pv -узлах. Выделив множество ценообразующих заявок, можно записать, что

$$\bar{l}_w^p = \mathbf{C}, \quad \bar{l}_w^q = 0,$$

где \mathbf{C} – вектор цен ценообразующих заявок (как на покупку, так и на продажу); к \bar{l}_u относятся все остальные множители l_j^p, l_j^q .

Перепишем (17), применяя новые обозначения:

$$\mathbf{J}_{uu}^T \bar{l}_u + \mathbf{J}_{wu}^T \mathbf{C} + \mathbf{A}_{(\cdot)u}^T \bar{\mathbf{s}} + \bar{\mathbf{m}}_u = 0.$$

Здесь матрицы $\mathbf{J}_{uu}^T \hat{R}^{n_u} n_u$, $\mathbf{J}_{wu}^T \hat{R}^{n_u} n_w$, $\mathbf{A}_{(\cdot)u}^T \hat{R}^{n_u} |S|$, n_u, n_w – число зависимых и независимых узловых цен как на активную, так и реактивную мощность, а индексы u и w определяют, какие строки (первый индекс) и столбцы (второй индекс) формируют подматрицу. Индекс (\cdot) используется, если подматрица включает все строки или столбцы основной матрицы. При отсутствии активных ограничений на перетоки мощности по контролируемым сечениям и ограничений по напряжению, когда $\bar{s} = 0$ и $\bar{m}_u = 0^*$, декомпозиция цен на ценообразующие заявки выглядит следующим образом:

$$\bar{l}_u = (\mathbf{J}_{uu}^T)^{-1} \mathbf{J}_{wu}^T \mathbf{C}. \quad (20)$$

В случае, если ценообразующая заявка одна и подана участником, подключенным к балансирующему узлу, то полученная формула совпадает со стандартной формулой декомпозиции (18), а матрица \mathbf{J}_{uu}^T является транспонированной расчетной матрицей Якоби, используемой для расчета установившегося режима.

В случае, если ценообразующих заявок несколько и располагаются они в произвольных узлах, выражение $(\mathbf{J}_{uu}^T)^{-1} \mathbf{J}_{wu}^T$ определяет вклад каждой такой заявки в узловую цену. Назовем такой вклад *режимным вкладом ценообразующих заявок*. Каждый коэффициент $k_{ij} = (\mathbf{J}_{uj}^T)^{-1} \mathbf{J}_{ij}^T$ для узла j при элементе \mathbf{C}_i показывает мгновенное (предельное) увеличение чистой инъекции мощности в узле ценообразующей заявки i при увеличении нагрузки в узле j .

Наличие активных ограничений по напряжению и сетевых ограничений вносит соответствующий вклад в формулу разложения цены. Учтем, что множители Лагранжа \bar{m}_u, \bar{s} зависят от ценовых заявок и могут быть через них выражены. По определению эти множители равны производной целевой функции по соответствующему ограничению:

$$\bar{s} = - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{P}_s^{\max}} \frac{\dot{\delta}^T}{\delta} = - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{P}_s^{\max}} \frac{\dot{\delta}^T}{\delta} \mathbf{C}; \quad (21)$$

$$\bar{m}_u = - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{U}_u^{\max}} \frac{\dot{\delta}^T}{\delta} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{U}_u^{\min}} \frac{\dot{\delta}^T}{\delta} = - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{U}_u^{\max}} \frac{\dot{\delta}^T}{\delta} + \frac{\partial \mathbf{P}_w}{\partial \mathbf{U}_u^{\min}} \frac{\dot{\delta}^T}{\delta} \mathbf{C}. \quad (22)$$

Воспользуемся алгоритмом расчета коэффициентов чувствительности к изменениям нагрузки ак-

тивной мощности [21]. Предположим, что возмущение какого-либо из ограничений слишком мало, чтобы привести к изменению состава активных ограничений оптимального решения. Тогда структуры матриц с индексами w и u и векторов множителей Лагранжа не изменятся. Рассмотрим малое приращение предельных значений активных ограничений $d\mathbf{U}_j^{\max(\min)}$ и $d\mathbf{P}_s^{\max}$. Такое приращение приведет к изменению всех зависимых переменных задачи оптимизации, а приращение предельного значения напряжения приведет, кроме того, к изменению напряжения в соответствующем узле, т.е. $dX_j = d\mathbf{U}_j^{\max(\min)}$. Для (17) можно записать дифференциал

$$\tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{X}} \mathbf{J}_{u(\cdot)}^T \bar{l}_u d\mathbf{X} + \mathbf{J}_{u(\cdot)}^T d\bar{l}_u + \tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{X}} \mathbf{J}_{w(\cdot)}^T \mathbf{C} d\mathbf{X} + \tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{X}} \mathbf{A}^T \bar{s} d\mathbf{X} + \mathbf{A}^T d\bar{s} + d\bar{m}_u = 0. \quad (23)$$

Следует учесть, что изменение напряжений в узлах ведет к изменению чистых инъекций активной и реактивной мощности в узлах:

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{Q}} \frac{\dot{\delta}}{\delta} = \mathbf{J} d\mathbf{X}. \quad (24)$$

При наличии активных сетевых ограничений (запертых контролируемых сечений) появляется также зависимость между изменением ограничения перетока по сечениям и изменением напряжением в узлах

$$\mathbf{A} d\mathbf{X} = d\mathbf{P}_s^{\max}. \quad (25)$$

Вспомним, что исходя из взаимосвязи ограничений (6)–(8) с (19) приращения $d\mathbf{P}_u, d\mathbf{Q}_u$ равны нулю, приращения $d\mathbf{P}_w, d\mathbf{Q}_w$ зависимы и неизвестны.

Разделим аналогично элементы вектора $d\mathbf{X}$ на зависимые (неизвестные) и независимые (заданные) переменные. В векторе \mathbf{X} зафиксированы модули напряжений, достигшие своего минимального или максимального значения, а также фаза напряжения в балансирующем узле. Вектор из известных элементов (независимых переменных) в $d\mathbf{X}$ отметим индексом z , а оставшиеся зависимые переменные – индексом n .

Решение системы уравнений (23)–(25) позволит найти производные $\partial \mathbf{P}_w / \partial \mathbf{P}_s^{\max}$ и $\partial \mathbf{P}_w / \partial \mathbf{U}_u^{\max(\min)}$, которые в (21) и (22) определяют \bar{s} и \bar{m}_u . Так, из (24) имеем, что $d\mathbf{P}_w = \mathbf{J}_{w(\cdot)} d\mathbf{X}$, тогда

$$df = d\mathbf{P}_w^T \mathbf{C} = (\mathbf{J}_{w(\cdot)} d\mathbf{X})^T \mathbf{C}. \quad (26)$$

* При этом вектор множителей \bar{m}_w может содержать ненулевые элементы.

Для нахождения dX воспользуемся уравнениями (23), (25) и оставшимися уравнениями из (24): $J_{u(\cdot)} dX=0$. Обозначим $H = \tilde{N}_X J^T \bar{1} + \tilde{N}_X A^T \bar{S}$, перенесем в правую часть независимые переменные и запишем полученные уравнения в едином матричном уравнении:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial X} & J_{u(\cdot)}^T & A^T \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX \\ dU \\ dP_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial X} \bar{1} + \frac{\partial H}{\partial X} A^T \bar{S} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (27)$$

Деление обеих частей уравнения и решение системы уравнений (27) относительно каждого $dU_j^{\max(\min)}$ и dP_s^{\max} в отдельности позволяет найти производные $\frac{\partial X_n}{\partial U_j^{\max(\min)}}$ и $\frac{\partial X_n}{\partial P_s^{\max}}$. Значения $\frac{\partial X_z}{\partial U_j^{\max(\min)}}$ известны, они равны единице для модуля напряжения в узле j , где $\frac{\partial X_j}{\partial U_j^{\max(\min)}}$, и нулю для других элементов вектора. Вектор $\frac{\partial X_z}{\partial P_s^{\max}} = 0$. Полученные производные используем в (26), чтобы найти коэффициенты связи производных $df / dU_j^{\max(\min)}$ и df / dP_s^{\max} с ценами ценообразующих заявок C .

Окончательно получаем следующее разложение узловых цен:

$$l_u = (J_{uu}^T)^{-1} \left[\frac{\partial H}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial P_s^{\max}} + J_{w(\cdot)}^T \right] + \frac{\partial X}{\partial U_u^{\max}} + \frac{\partial X}{\partial U_u^{\min}} J_{w(\cdot)}^T \quad (28)$$

или

$$l_j = \hat{a}_{ij} \frac{\partial X}{\partial C_i} k_{ij} + \hat{a}_{sj} k_{ji}^s + \hat{a}_{vj} k_{ji}^v + \hat{a}_{lj} k_{ji}^l \frac{\partial X}{\partial C_i}$$

Таким образом, получены коэффициенты влияния каждой из ценообразующих заявок каждого из активных ограничений на формирование узловой равновесной цены. Векторы k_j , k_j^s , k_j^u , k_j^l показывают направление изменения чистых инъекций мощности в узлах ценообразующих заявок. Иначе говоря, они показывают, как изменится загрузка замыкающих поставщиков (покупателей) при необходимости поставить в узел j дополнительный 1 МВт мощности. Их расчет основан на информации об оптимальном режиме электрической системы. Для этого, например, используется матрица Якоби. При наличии активных ограничений ис-

пользуется второй дифференциал функции Лагранжа с взвешиванием по множителям Лагранжа $\bar{1}$ и \bar{S} элементов матриц Якоби нелинейных уравнений баланса мощности в установившемся режиме и нелинейных уравнений перетока активной мощности по контролируемым сечениям. Таким образом, для разложения используются как технологическая информация о текущем режиме электрической системы, так и экономическая – о текущем уровне цен.

Режимный вклад k_j состоит из положительных коэффициентов, вклады активных ограничений k_j^s , k_j^u , k_j^l могут содержать отрицательные элементы. Появление отрицательных коэффициентов обусловлено необходимостью нахождения решения задачи в допустимой области решений. Ценообразующие заявки использованы оптимальным образом в соответствии с целевой функцией. Чтобы обеспечить дополнительный 1 МВт потребления в узле j , может оказаться невозможным дополнительно использовать какую-либо из заявок, не выходя из области допустимых решений. Поэтому требуется разгрузка какого-либо из поставщиков (загрузка какого-либо из покупателей), чтобы соответствующее ограничение было выполнено.

Пример. Для иллюстрации предложенного алгоритма рассмотрим пример электрической системы из 5 узлов при различных условиях ценообразования. Базовые исходные данные и схема представлены на рисунке, а. Результаты оптимизации режима с целевой функцией минимизации стоимости выработки электроэнергии (10) представлены на рисунке, б. Ценообразующей заявкой стала заявка в узле 1 с ценой 1400 руб./МВт·ч. Об этом свидетельствуют равенство множителя Лагранжа l_1^p цене в заявке и выполнение строгих неравенств $P_{g1}^{\min} < P_{g1} < P_{g1}^{\max}$. В генераторных узлах 2 и 3 заявки не отображены, узловые цены меньше цен в заявках, а мощность равна минимальной активной мощности выработки генераторов. Исходя из (19) разница между ценами приходится на множители Лагранжа p_2^{\min}, p_3^{\min} . Уровень напряжения задан в узле 1 и равен максимальному значению U_1^{\max} . Разложение цены на составляющие проведено в соответствии с (20) и представлено в табл. 1.

Поскольку по результатам оптимизации кроме ограничения $U_1 = U_1^{\max}$ другие активные ограничения отсутствуют, а ограничение по напряжению в ценообразующем узле в разложении не участвует, в формирование узловых цен вносит вклад только

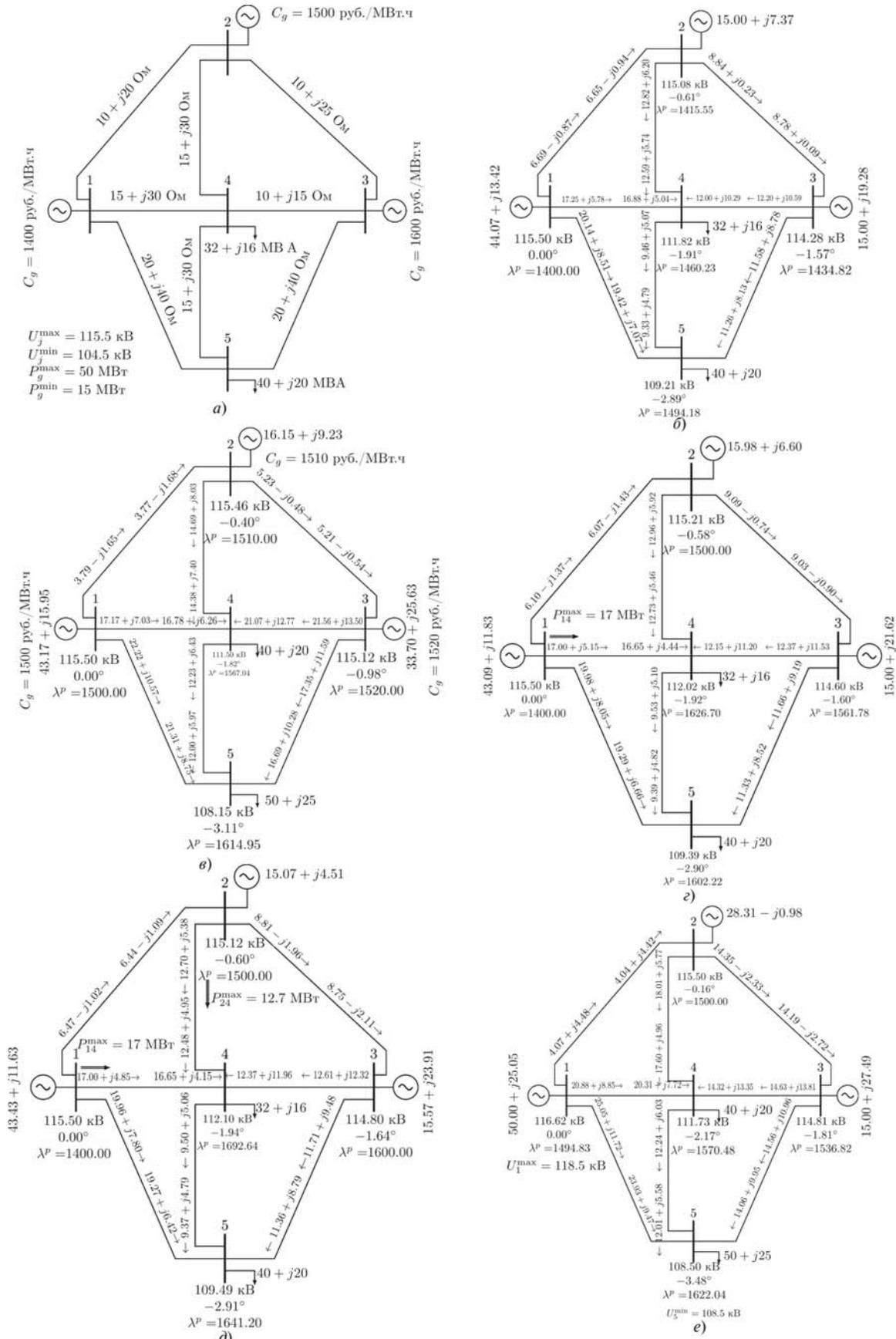


Схема системы из пяти узлов: а – базовая; б – схема с результатами оптимизации режима (мощность в МВА, узловые цены – руб./МВт.ч); в – то же при изменении заявок поставщиков (здесь и далее выделены изменения входных данных по сравнению с базовым вариантом); г – то же при внесении ограничения на переток активной мощности в линии 1–4; д – то же при внесении ограничений на перетоки активной мощности в линиях 1–4 и 2–4; е – то же при увеличении потребления и повышении пределов напряжения в узлах 1 и 5

режимная составляющая ценообразующей заявки C_1 . В данном случае разложение цен на составляющие совпадает со стандартной декомпозицией (18) относительно референтного узла I . А если вычесть значение цены в узле I , то можно получить вклад потерь в узловой цене относительно узла I .

Таблица 1

Номер узла	Узловая цена, руб./МВтж	Режимный вклад ценообразующей заявки C_1
1	1400,00	1,0
2	1415,55	1,011
3	1434,82	1,025
4	1460,23	1,043
5	1494,18	1,067

Часто узловые цены без введения сетевых ограничений формируются не одной, а несколькими заявками. Покажем такой тип ценообразования при подаче новых заявок $C_1=1500$ руб./МВт·ч, $C_2=1510$ руб./МВт·ч, $C_3=1520$ руб./МВт·ч (см. рисунок, *в*). По результатам оптимизации ценообразующими заявками стали сразу все поданные заявки. В таких случаях можно сказать, что цены в заявках отличаются на значения потерь (в ценовом выражении). С одной стороны, это действительно так, поскольку режим, в котором наиболее дорогой поставщик в узле 3 отобран для выработки электроэнергии и передачи ее в нагрузочные узлы, более экономичен, чем передача электроэнергии из более дешевых узлов с более высоким уровнем потерь. С другой стороны, три различные цены в заявках являются независимыми друг от друга. В этой связи цену в узле 3 с ценообразующей заявкой C_3 невозможно восстановить по уровню цены в узле 1 с ценообразующей заявкой C_1 . Размерность пространства узловых цен равна трем, и каждая заявка вносит свой вклад в формирование узловых цен. Результаты декомпозиции узловых цен в соответствии с (20) представлены в табл. 2. Из этих данных видно, что поставщик в узле 2 в наименьшей степени влияет на формирование цен в узлах 4 и 5. Режимный вклад заявки в узле 2 составляет 23,2% и 9,6% соответственно. Цены в узлах 4 и 5 в большей степени формируются заявками в узлах 1 и 3 с вкладами от 30,2% до 52,9%.

Таблица 2

Номер узла	Узловая цена, руб./МВтж	Режимный вклад ценообразующих заявок		
		C_1	C_2	C_3
1	1500,00	1	—	—
2	1510,00	—	1	—

3	1520,00	—	—	1
4	1567,04	0,302	0,232	0,503
5	1614,95	0,444	0,096	0,529

Внесем в исходный сценарий ограничение на переток активной мощности по линии 1–4 на уровне 17 МВт. Оптимальный режим электрической системы, отобранная мощность поставщиков (отобранные заявки) и узловые цены показаны на рисунке, *г*. Активное сетевое ограничение увеличивает размерность пространства узловых цен и приводит к появлению второй ценообразующей заявки в узле 2. Мощность генерации в узле 1 из-за сетевого ограничения не может быть передана в нагрузочные узлы. Поэтому востребована более дорогая мощность поставщика в узле 2. Проведем декомпозицию узловых цен по формуле (28) после решения системы линейных алгебраических уравнений (27). По результатам декомпозиции (табл. 3) видим, что сетевое ограничение вносит серьезные изменения в режимный вклад ценообразующих заявок. Так, без учета сетевого ограничения рост нагрузки в узле 4 привел бы к загрузке генерации в узле 1 на 38,8%, в узле 2 – на 62,6% роста нагрузки. При учете сетевого ограничения рост нагрузки в узле 4 на 1 МВт требует разгрузки генерации в узле 1 на 1,457 МВт и загрузке генерации в узле 2 на 1,443 МВт. Суммарный вклад C_1 в узловую цену 4 становится отрицательным, а вклад C_2 – почти удвоенным. Вклады ценообразующих заявок показывают зоны влияния ценообразующих заявок. В зоне влияния второй ценообразующей заявки оказались все узлы кроме узла 1. В зоне влияния узла 1 находится только сам узел 1. Он находится за сетевым ограничением.

Добавим еще одно сетевое ограничение: в линии 2–4 (рисунок, *д*). Из-за второго активного ограничения появляется необходимость загрузить свыше минимума поставщика в узле 3. В итоге цены формируются тремя ценообразующими заявками. Результаты декомпозиции показаны в табл. 4. Каждый вклад разделен по причине его появления – режимный вклад или вклад каждого из сетевых ограничений. Направление загрузки того или иного ценообразующего поставщика при увеличении нагрузки в каком-либо из узлов определяет вклад в узловую цену этих поставщиков. При рассмотрении отдельно сетевого ограничения в линии 1–4 видно, что рост нагрузки в узлах 4 и 5 обеспечивается в основном за счет поставщика в узле 3, аналогично с сетевым ограничением в линии 2–4. Таким образом, на суммарный вклад узловых цен в нагрузочных узлах 4 и 5 оказывает основное влияние ценообразующая заявка в узле 3.

Таблица 3

Номер узла	Узловая цена, руб./МВт⋅ч	Вклад ценообразующих заявок					
		режимный		обусловленный сетевым ограничением		суммарный	
		C_1	C_2	C_1	C_2	C_1	C_2
1	1400,00	1	–	–	–	1	–
2	1500,00	–	1	–	–	–	1
3	1561,78	0,388	0,626	-0,944	0,934	-0,556	1,560
4	1626,70	0,493	0,542	-1,457	1,443	-0,964	1,985
5	1602,22	0,641	0,419	-0,894	0,885	-0,253	1,305

Таблица 4

Номер узла	Узловая цена, руб./МВт⋅ч	Вклад ценообразующих заявок												
		режимный			обусловленный сетевым ограничением в линии						суммарный			
					1–4			2–4						
		C_1	C_2	C_3	C_1	C_2	C_3	C_1	C_2	C_3	C_1	C_2	C_3	
1	1400,00	1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1	–	–
2	1500,00	–	1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1	–
3	1600,00	–	–	1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1
4	1692,64	0,300	0,230	0,498	-0,728	0,176	0,537	0,321	-0,988	0,662	-0,108	-0,582	1,698	
5	1641,20	0,439	0,094	0,520	-0,297	0,072	0,220	0,131	-0,404	0,271	0,272	-0,238	1,011	

Рассмотрим теперь влияние ограничения по напряжению. Для этого увеличим нагрузку до $40+j20$ МВА в узле 4 и до $50+j25$ МВА в узле 5. И увеличим U_1^{\max} до 118,5 кВ, U_5^{\min} до 108,5 кВ. Результаты оптимизации режима электрической системы (рисунок, е) показывают, что становится активным ограничение на нижний предел напряжения в узле 5. Проведем декомпозицию узловых цен по формуле (28) (табл. 5).

Таблица 5

Номер узла	Узловая цена, руб./МВт⋅ч	Вклад ценообразующих заявок C_2		
		режимный	ограничения напряжения	суммарный
1	1494,83	0,992	0,005	0,997
2	1500,00	1,0	–	1,0
3	1536,82	1,019	0,006	1,025
4	1570,48	1,042	0,005	1,047
5	1622,04	1,074	0,007	1,081

Результаты декомпозиции показывают, что это ограничение привело к росту узловых цен по всей электрической системе на 0,5–0,7% цены в ценообразующей заявке или 7,5–10,5 руб./МВт⋅ч. В более сложной электрической системе ограничения на уровень напряжения, так же как и в случае с сетевыми ограничениями, могут привести к разнонаправленному влиянию различных заявок.

Заключение. Формулы разложения узловых цен приведены для полной модели оптимизации переменного тока. Новая декомпозиция цен может быть использована в мониторинге цен на рынке на сутки вперед и балансирующем рынке при оценке и объяснении влияния тех или иных факторов на ценообразование. Она позволяет выделять зоны влияния ценообразующих заявок и отвечает на вопрос, какой именно заявкой и насколько сформирована узловая цена. Кроме того, с помощью такой декомпозиции получена возможность проводить анализ зон влияния ценообразующих заявок в отсутствие активных сетевых ограничений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schewe F., Caramanis M., Tabors R., Bohn R. Spot Pricing of Electricity. — Boston: Kluwer, 1988.

2. **Cheng X., Overbye T.J.** An energy reference bus independent LMP decomposition algorithm. — IEEE Trans. Power Syst., 2006, vol. 21, No. 3, pp. 1041–1049.
3. **Давидсон М.Р., Догадушкина Ю.В., Крейнс Е.М., Новикова Н.М., Удальцов Ю.А., Ширяева Л.В.** Математическая модель конкурентного оптового рынка электроэнергии в России. — Известия РАН. Теория и системы управления, 2004, № 3, с. 72–83.
4. **Cardell J.B.** Marginal loss pricing for hours with transmission congestion. — IEEE Trans. Power Syst., 2007, vol. 22, No. 4, pp. 1466–1474.
5. **Chévez-González D., Lin J.** Mutually orthogonal LMP decomposition: Analysis of PJM network by null space approach. — IEEE PES General Meeting, IEEE, 2010, pp. 1–8.
6. **Chévez-González D., DeMarco C. L.** Mutually orthogonal LMP decompositions: Congestion decomposes, losses do not. — 2009 6th International Conference on the European Energy Market, 2009, pp. 1–6.
7. **Wu T., Alaywan Z., Papalexopoulos A.D.** Locational Marginal Price Calculations Using the Distributed-Slack Power-Flow Formulation. — IEEE Trans. Power Syst., 2005, vol. 20, No. 2, pp. 1188–1190.
8. **Li F.** Fully reference-independent LMP decomposition using reference-independent loss factors. — Electr. Power Syst. Res., 2011, vol. 81, No. 11, pp. 1995–2004.
9. **Orfanogianni T., Gross G.** A General Formulation for LMP Evaluation. — IEEE Trans. Power Syst., 2007, vol. 22, No. 3, pp. 1163–1173.
10. **Sarkar V., Khaparde S.A.** Optimal LMP Decomposition for the ACOPF Calculation. — IEEE Trans. Power Syst., 2011, vol. 26, No. 3, pp. 1714–1723.
11. **Biggar D.R., Hesamzadeh M.R.** The Economics of Electricity Markets/Ed. Biggar D.R., Hesamzadeh M.R. — Chichester. United Kingdom Publ.: John Wiley & Sons Ltd, 2014, 409 p.
12. **Wang L., Mazumdar M.** Using a system model to decompose the effects of influential factors on locational marginal prices. — IEEE Trans. Power Syst., 2007, vol. 22, No. 4, pp. 1456–1465.
13. **Wachi T., Fukutome S., Makino Y., Luonan Chen.** Decomposition of market clearing price based on single price auction model. — 2008 IEEE Power and Energy Society General Meeting: Conversion and Delivery of Electrical Energy in the 21st Century, IEEE, 2008, pp. 1–8.
14. **Li R., Chen L., Yokoyama R.** Evaluation Of Voltage Stability Based On Sensitivity Analyses Of Electric Pricing. — IEEE PES Power Systems Conference and Exposition. IEEE, 2004, pp. 1313–1318.
15. **Suzuki H., Wachi T., Shimura Y.** Components of nodal prices for electric power systems. — IEEE Trans. Power Syst., 2002, vol. 17, No. 1, pp. 41–49.
16. **Васьковская Т.А.** Показатели разницы узловых цен на оптовом рынке электроэнергии. — Электричество, 2007, № 2, с. 23–27.
17. **Васьковская Т.А.** Способы расчета рыночной силы и оценки конкурентной среды применительно к оптовому рынку электроэнергии в России. — Известия АН. Энергетика, 2012, № 4, с. 30–48.
18. **Васьковская Т.А., Володин Д.В.** Определение зон влияния сетевых ограничений на узловые цены. — Известия АН. Энергетика, 2014, № 1, с. 74–83.
19. **Володин Д.В., Васьковская Т.А.** Определение локальных рынков, обусловленных влиянием системных ограничений, на рынках электроэнергии. — Труды МФТИ, 2014, т. 6, № 4, с. 17–32.
20. **Wood A.J., Wollenberg B.F., Sheble G.B.** Power generation, operation, and control. 3rd Edition. Wiley, 2013, 656 p.
21. **Conejo A.J. et al.** Locational marginal price sensitivities. — IEEE Trans. Power Syst., 2005, vol. 20, No 4, pp. 2026–2033.

[31.03.15]

Автор: Васьковская Татьяна Александровна окончила в 2002 г. Институт электроэнергетики Московского энергетического института (Технического университета) (ныне Национальный исследовательский университет МЭИ – НИУ «МЭИ»). Там же в 2003 г. защитила кандидатскую диссертацию «Диагностика линейных электрических цепей по частям». Доцент кафедры теоретических основ электротехники НИУ «МЭИ».

Elektrichestvo (Electricity), 2015, No. 7, pp. 21–31.

A New Decomposition of Nodal Prices for the Contributions of Price Forming Bids in Optimal Power Flow Calculating

T.A. VASKOVSKAYA

Nodal prices in a wholesale market of electricity are calculated concurrently with optimizing the electric power system operating modes. Meeting the most effective demand and loading the most efficient power-generating equipment constitute the objective function, and the nonlinear load flow equations, network limitations, voltage limitations, etc. serve as the constraints of the optimization problem. Closing (price forming) bids from the participants are the source for determining the nodal prices. By decomposing nodal prices into components it is possible to determine the factors affecting these prices. According to the standard decomposition procedure, the prices are decomposed into the system price and the contributions due to losses and congestion. A new nodal price decomposition method is proposed, using which it is possible to determine the contribution of price forming bids as a combined one and as resulting from network limitations and voltage limitations. The proposed method is based on using the optimal power flow data and on analyzing the optimization problem sensitivity to constraints. The obtained decomposition is a unique one, and the sum of calculated contributions is equal to the nodal price. It can be used in monitoring the prices in the day ahead market and in the balancing market, as well as in evaluating and

explaining the effect of various factors on price formation. It allows one to separate the influencing zones of price forming bids and to answer the following question: due which particular bid and to what extent the price has been formed? The application of the proposed approach is illustrated taking as an example a five-node electric power system with different price forming scenarios.

Key words: *electricity market, electric power system, nodal price, decomposition, price forming bids*

REFERENCES

1. **Schwepe F., Caramanis M., Tabors R., Bohn R.** Spot Pricing of Electricity. — Boston: Kluwer, 1988.
2. **Cheng X., Overbye T.J.** An energy reference bus independent LMP decomposition algorithm. — IEEE Trans. Power Syst., 2006, vol. 21, No. 3, pp. 1041–1049.
3. **Davidson M.R., Dogadushkin Yu.V., Kreines E.M., Novikov N.M., Udal'tsov Yu.A., Shiryayeva L.V.** *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya — in Russ. (News of the Russian Academy of Sciences. Theory and control systems)*, 2004, No. 3, pp. 72–83.
4. **Cardell J.B.** Marginal loss pricing for hours with transmission congestion. — IEEE Trans. Power Syst., 2007, vol. 22, No. 4, pp. 1466–1474.
5. **Chévez-González D., Lin J.** Mutually orthogonal LMP decomposition: Analysis of PJM network by null space approach. — IEEE PES General Meeting, IEEE, 2010, pp. 1–8.
6. **Chévez-González D., DeMarco C. L.** Mutually orthogonal LMP decompositions: Congestion decomposes, losses do not. — 2009 6th International Conference on the European Energy Market, 2009, pp. 1–6.
7. **Wu T., Alaywan Z., Papalexopoulos A.D.** Locational Marginal Price Calculations Using the Distributed-Slack Power-Flow Formulation. — IEEE Trans. Power Syst., 2005, vol. 20, No. 2, pp. 1188–1190.
8. **Li F.** Fully reference-independent LMP decomposition using reference-independent loss factors. — Electr. Power Syst. Res., 2011, vol. 81, No. 11, pp. 1995–2004.
9. **Orfanogianni T., Gross G.** A General Formulation for LMP Evaluation. — IEEE Trans. Power Syst., 2007, vol. 22, No. 3, pp. 1163–1173.
10. **Sarkar V., Khaparde S.A.** Optimal LMP Decomposition for the ACOPT Calculation. — IEEE Trans. Power Syst., 2011, vol. 26, No. 3, pp. 1714–1723.
11. **Biggar D.R., Hesamzadeh M.R.** The Economics of Electricity Markets/Ed. Biggar D.R., Hesamzadeh M.R. — Chichester. United Kingdom Publ.: John Wiley & Sons Ltd, 2014, 409 p.
12. **Wang L., Mazumdar M.** Using a system model to decompose the effects of influential factors on locational marginal prices. — IEEE Trans. Power Syst., 2007, vol. 22, No. 4, pp. 1456–1465.
13. **Wachi T., Fukutome S., Makino Y., Luonan Chen.** Decomposition of market clearing price based on single price auction model. — 2008 IEEE Power and Energy Society General Meeting: Conversion and Delivery of Electrical Energy in the 21st Century, IEEE, 2008, pp. 1–8.
14. **Li R., Chen L., Yokoyama R.** Evaluation Of Voltage Stability Based On Sensitivity Analyses Of Electric Pricing. — IEEE PES Power Systems Conference and Exposition. IEEE, 2004, pp. 1313–1318.
15. **Suzuki H., Wachi T., Shimura Y.** Components of nodal prices for electric power systems. — IEEE Trans. Power Syst., 2002, vol. 17, No. 1, pp. 41–49.
16. **Vaskovskaya T.A.** *Elektrichestvo — in Russ. (Electricity)*, 2007, No. 2, pp. 23–27.
17. **Vaskovskaya T.A.** *Izvestiya AN. Energetika — in Russ. (News of the Academy of Sciences. Power Engineering)*, 2002, No. 4, pp. 30–48.
18. **Vaskovskaya T.A., Volodin D.V.** *Izvestiya AN. Energetika — in Russ. (News of the Academy of Sciences. Power Engineering)*, 2014, No. 1, pp. 74–83.
19. **Volodin D.V., Vaskovskaya T.A.** *Trudy MFTI — in Russ. (Proc. of the Moscow Physical and Technical Institute)*, 2014, vol. 6, No. 4, pp. 17–32.
20. **Wood A.J., Wollenberg B.F., Sheble G.B.** Power generation, operation, and control. 3rd Edition. Wiley, 2013, 656 p.
21. **Conejo A. J. et al.** Locational marginal price sensitivities. — IEEE Trans. Power Syst., 2005, vol. 20, No. 4, pp. 2026–2033.

Author: Vaskovskaya Tatiana Aleksandrovna (Moscow, Russia) — Cand. Sci. (Eng.). Associate professor of the Department, Scientific and Resuarch University «Moscow Power Engineering Institute».