

* * *

Электричество, 2015, № 8, с. 33–37.

Об аппроксимации периодических индуктивностей электрических двигателей эллиптическими функциями Якоби

ЕНИН В.Н., СТЕПАНОВ А.В.

Для аппроксимации периодических индуктивностей электрических двигателей индукторного типа предлагается использовать эллиптические функции Якоби. Индуктивности обмоток статора в зависимости от угла поворота ротора для различных типов электрических машин могут быть постоянными, синусоидальными, периодическими. Для электрических машин с зубчатостью магнитных систем статора и ротора эта зависимость имеет трапецевидный характер. Использование эллиптических функций позволяет описать эти основные зависимости. Для заданных значений периода, максимальной и минимальной индуктивности, а также вида исходной зависимости подбирается вид аппроксимирующей функции на основе эллиптических функций Якоби. Применялись эллиптический синус и эллиптическая функция — дельта-амплитуда. Получены расчетные формулы для вычисления параметров аппроксимирующих функций.

Ключевые слова: электрический двигатель, индуктивности обмоток статора, периодические функции, аппроксимация характеристик, эллиптические функции Якоби

Электрические двигатели индукторного типа получили широкое распространение в точных технологических установках, в конструкциях роботов и манипуляторов для обеспечения заданного быстрого действия, точности позиционирования, широкого диапазона регулирования скорости, ограничения пульсаций момента и т.д. Одними из широко используемых в настоящее время являются бесконтактные двигатели постоянного тока, применяемые в вентильно-индукторном электроприводе [1, 2], включающем бесконтактный двигатель постоянного тока, преобразователь частоты на основе управляемых ключей (вентилей) и систему управления. Распространение также получили электрические машины с постоянными магнитами, питаемые от источника постоянного напряжения с инвертором. Машины этого типа используются как для генера-

ции электрической энергии в ветроэнергетических установках, так и в качестве исполнительных и приводных двигателей, что позволяет повысить КПД электрической машины при электромеханическом преобразовании электрической энергии [2–4].

Несмотря на несомненные успехи при проектировании электрических двигателей и их систем управления ряд вопросов требует дальнейшего исследования. Математическое описание характеристик двигателя приобретает особое значение для более точного анализа его электромагнитных процессов, поэтому ряд работ посвящен уточнению магнитных характеристик двигателя. В [5] рассмотрено влияние явления намагничивания на пуск, синхронизацию двигателя, пульсации момента. Влияние на крутящий момент нелинейной зависи-

мости между потокосцеплением и током статора рассмотрено в [6]. Влиянию зубчатости магнитных систем ротора и статора на пульсации момента посвящена работа [7].

В [8, 9] отмечается, что зависимость индуктивности обмоток статора от угла поворота ротора двигателя может отличаться от синусоидальной, и для ее аппроксимации применяются функции, определенные на различных интервалах разными аппроксимирующими выражениями (сплайн-функции). Однако такая аппроксимация требует дополнительного анализа при переходе от одного вида аппроксимирующей функции к другой, а также приводит к скачкообразному изменению значений индуцируемого напряжения на обмотках статора. Учитывая периодичность зависимости индуктивностей обмоток статора от угла поворота ротора, часто используется аппроксимация в виде ряда Фурье [10], но это вызывает дополнительные пульсации электромагнитного момента двигателя при его моделировании.

Одна из проблем при описании характеристик электрического двигателя — выбор подходящей аппроксимирующей функции, вид которой близок к характеристике, полученной экспериментально. Авторы статьи при математическом описании зависимости индуктивностей от угла поворота ротора для бесконтактного электрического двигателя с постоянными магнитами (режим без насыщения) используют эллиптические функции Якоби [11]. Они наиболее адекватно описывают искомую зависимость, что исключает при анализе появление дополнительных пульсаций момента. Функции Якоби могут быть описаны нелинейными дифференциальными уравнениями второго порядка и встроены в математическую модель двигателя. Это дает возможность получить единое аналитическое описание зависимости потокосцепления обмоток ротора на всем интервале изменения углов ротора и использовать его при построении математической модели двигателя.

Как отмечено в [8], магнитная проводимость вдоль зазора (вследствие зубцов статора и ротора) зависит от угла поворота ротора и тока статора, и при увеличении тока ее форма изменяется от синусоидальной к трапециевидной. Эллиптические функции Якоби, которые могут быть использованы для аппроксимации периодических характеристик, согласно [10] запишем в виде:

$$\operatorname{sn}(k\varphi) = \sin y(k\varphi); \quad (1)$$

$$\operatorname{cn}(k\varphi) = \cos y(k\varphi); \quad (2)$$

$$\operatorname{dn}(k\varphi) = \sqrt{1 - m \sin^2 y(k\varphi)}, \quad (3)$$

где $\operatorname{sn}(k\varphi)$ — эллиптический синус; $\operatorname{cn}(k\varphi)$ — эллиптический косинус; $\operatorname{dn}(k\varphi)$ — дельта-амплитуда; φ — угол поворота ротора; k — параметр, определяющий период эллиптической функции Якоби.

Функция $y(k\varphi)$, называемая амплитудой $k\varphi$,

$$k\varphi = \int_0^y \frac{dx}{\sqrt{1 - m \sin^2 x}}.$$

Период эллиптических функций, а также их форма, определенные выражениями (1)–(3), зависят от параметров k и m . Параметр m лежит в интервале $[0, 1)$, при $m=0$ эллиптический синус и косинус превращаются в обычные тригонометрические функции, а функция дельта-амплитуда в этом случае равна константе. При увеличении параметра m эллиптические функции преобразуются к трапециевидным, а при стремлении m к единице — к прямоугольным или импульсным функциям. Период, определяемый параметрами k и m , эллиптических функций $\operatorname{sn}(k\varphi)$ и $\operatorname{cn}(k\varphi)$ равен

$$W_{\Pi} = 4 \int_0^y \frac{dx}{\sqrt{1 - m \sin^2 x}}. \quad (4)$$

Период функции $\operatorname{dn}(k\varphi)$ дельта-амплитуда равен $W_{\Pi} / 2$, период W_{Π} при замене переменных $t = \sin(x)$ можно вычислить с помощью следующего интеграла:

$$W_{\Pi} = 4 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-mt^2)}}. \quad (5)$$

Интеграл (5) представляет собой эллиптический интеграл первого рода.

Если по углу поворота ротора φ задан период q_{Π} , то параметр k с учетом (4) вычисляется для функций $\operatorname{sn}(k\varphi)$ и $\operatorname{cn}(k\varphi)$ следующим образом:

$$k = \frac{4}{q_{\Pi}} \int_0^y \frac{dx}{\sqrt{1 - m \sin^2 x}}, \quad (6)$$

а для функции $\operatorname{dn}(k\varphi)$ дельта-амплитуда

$$k = \frac{2}{q_{\Pi}} \int_0^y \frac{dx}{\sqrt{1 - m \sin^2 x}}. \quad (7)$$

Таким образом, используя формулы (6), (7) и вычисляя параметр k , можно обеспечить одно и то же значение периода по углу φ при различных значениях параметра m . При изменении параметра m при постоянстве периода меняется форма периодической функции. Вид эллиптических функций для различных значений параметра m и периода по углу φ при $q_{\Pi} = 2\pi / 6 = 60^\circ$ приведен на рис. 1.

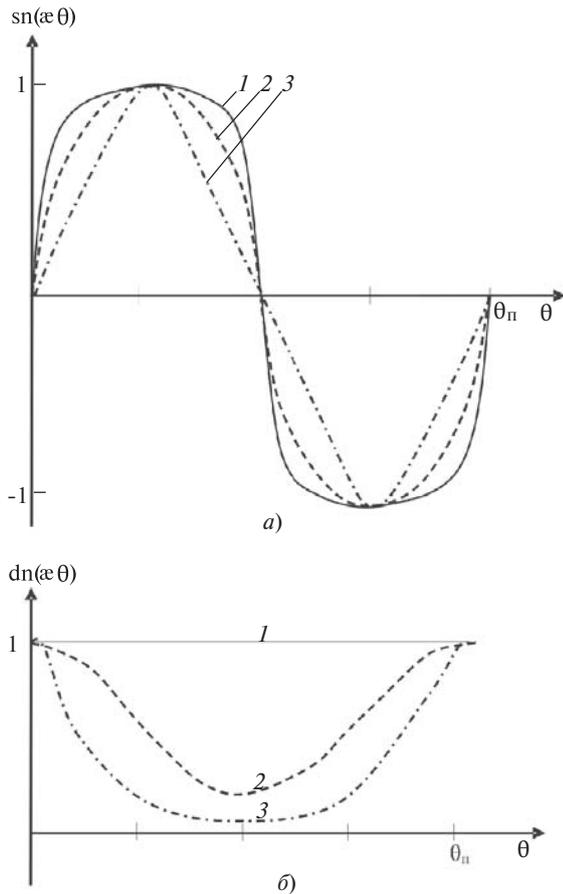


Рис. 1. Эллиптические функции Якоби $sn(kq)$, $dn(kq)$: 1 – $m = 0$; 2 – $m = 0,95$; 3 – $m = 0,999$

Индуктивности обмоток статора исполнительных синхронных или вентильных двигателей являются периодическими функциями угла поворота ротора q и в случае зубчатой магнитной системы имеют трапецевидный характер [8]. Период индуктивностей статора определяется числом полюсов ротора и может быть вычислен по формуле $q_{\pi} = p / p$, где p – число пар полюсов ротора. Для аппроксимации функции $L(q)$, имеющей вид трапеции, выберем аппроксимирующее выражение. Исходя из вида функции $L(q)$ можно использовать в аппроксимирующем выражении эллиптический синус $sn(kq)$ или функцию дельта-амплитуда $dn(kq)$.

Аппроксимация эллиптическим синусом. Аппроксимируем индуктивность обмотки статора $L(q)$ функцией

$$L_{as}(q) = L_0 + L_m sn(kq). \quad (8)$$

Функция $L_a(q)$ определяется четырьмя независимыми параметрами L_0 , L_m , m , k . Для ее определения необходимо задаться условиями. Одним из них является требование: период этой функции по углу q должен быть равен q_{π} . Другое условие требует совпадения минимальных и максимальных значений функции $L(q)$ и аппроксимирующего вы-

ражения $L_a(q)$. Тогда функция $L_a(q)$ должна удовлетворять условиям:

$$L_0 + L_m sn(k \frac{q_{\pi}}{4}) = L_{max};$$

$$L_0 + L_m sn(k \frac{3q_{\pi}}{4}) = L_{min}.$$

В точке $q=0$ учтем крутизну трапецевидного импульса

$$L_m = \frac{\frac{\partial sn(kq)}{\partial q} \big|_{q=0}}{\frac{\partial L(q)}{\partial q} \big|_{q=0}}. \quad (9)$$

Поскольку

$$sn(k \frac{q_{\pi}}{4}) = 1, \quad sn(k \frac{3q_{\pi}}{4}) = -1,$$

с учетом условий (7), (8) получаем

$$L_0 + L_m = L_{max}; \quad L_0 - L_m = L_{min},$$

тогда

$$L_0 = \frac{L_{max} + L_{min}}{2}, \quad (9a)$$

$$L_m = \frac{L_{max} - L_{min}}{2}. \quad (9b)$$

Производная функции $sn(kq)$ равна

$$\frac{d(sn k q)}{dq} = k sn(kq) dn(kq),$$

и при $q=0$ получаем

$$\frac{d(sn k q)}{dq} = k.$$

Параметр k зависит от значения параметра m , поэтому можно записать

$$L_m k = \frac{4L_m}{q_{\pi}} \int_0^{p/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - m \sin^2 x}},$$

при этом должно выполняться

$$L_m k = \frac{\partial L(q)}{\partial q} \big|_{q=0} = L'(0).$$

Для определения параметра m необходимо решить нелинейное уравнение

$$L'(0) = \frac{4L_m}{q_{\pi}} \int_0^{p/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - m \sin^2 x}}. \quad (10)$$

Найдем параметр m с помощью итерационного алгоритма решения уравнения (10):

1) зададим нижнее и верхнее граничные значения для параметра m :

$$M_i = 0, \quad M_s = 1, \quad m_0 = 1, \quad k = 1;$$

2) вычислим приближение

$$m_k = (M_s + M_i) / 2;$$

3) определяем

$$L_k(0) = \frac{4L_m}{q_{\Pi}} \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - m_k \sin^2 x}}$$

4) если $L_k < L_k(0)$, то $M_i = m_k$;

если $L_k > L_k(0)$, то $M_s = m_k$;

5) в случае $|M_s - M_i| \leq \epsilon_3$ параметр m с заданной

точностью ϵ_3 вычислен, иначе переходим к п. 2.

После вычисления параметра m параметр k аппроксимирующей функции (8) определяем по (6).

Аппроксимация функцией dn. Для аппроксимации индуктивности обмотки статора в зависимости от угла поворота ротора можно использовать также функцию дельта-амплитуда. Она имеет период, вдвое меньший, чем у эллиптического синуса и косинуса, и изменяется от максимального положительного значения $dn(0) = 1$ до минимального положительного значения $dn(q_{\Pi}/4) = \sqrt{1 - m}$. Аппроксимируем индуктивность обмотки $L(q)$ функцией вида

$$L_{ad}(kq) = L_m dn(kq). \tag{11}$$

Определим параметры аппроксимирующей функции из условий:

$$L_m dn(0) = L_{\max}; \tag{12}$$

$$L_m dn\left(k \frac{q_{\Pi}}{4}\right) = L_{\min}. \tag{13}$$

Из (12) следует

$$L_m = L_{\max}. \tag{14}$$

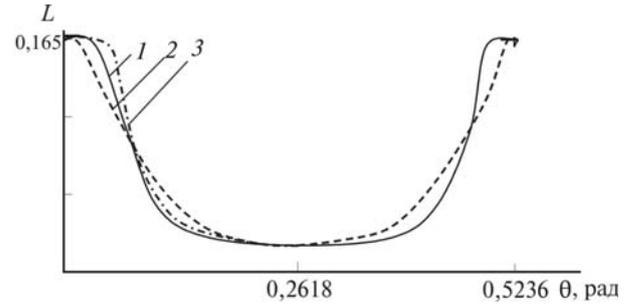


Рис. 2. Аппроксимация индуктивности обмотки статора: 1 — экспериментальные данные; 2 — аппроксимация функцией дельта-амплитуда; 3 — аппроксимация с использованием эллиптического синуса

дуктивности $L_{\max} = 0,165$, $L_{\min} = 0,015$. Аппроксимируем эту функцию выражением (11) и, используя (12)–(15), вычисляем параметры:

$$L_m = 0,165; m = 1 - 0,015^2 / 0,165^2 = 0,991735.$$

Параметр k для значения $m = 0,991735$ равен 0,7238. На рис. 2 приведен график функции $L_{ad}(q)$.

Зависимость $L(q)$ можно аппроксимировать также функцией $L_{as}(q)$ (8) с использованием эллиптической функции $sn(kq)$. Применяя (9)–(10), вычисляем параметры аппроксимирующей функции:

$$L_0 = \frac{0,165 + 0,015}{2} = 0,09; L_m = \frac{0,165 - 0,015}{2} = 0,075.$$

Параметры m и k вычислялись на основе уравнения (10), $L_k(q_{\Pi}/4) = 1,4511$. Решив это уравнение, получим $m = 0,9585$, $k = 11,4526$. График функции $L_{as}(q)$ приведен на рис. 2, ниже — результаты расчетов периодической индуктивности:

q	0	0,1309	0,2618	0,3927	0,5236	0,6545	0,7854	0,9163	1,0472
L(q)	0,165	0,1275	0,039	0,015	0,015	0,015	0,039	0,1275	0,165
L _{ad} (q)	0,165	0,1117	0,0497	0,0222	0,015	0,0222	0,0497	0,1117	0,165
L _{as} (q - q _Π /4)	0,165	0,1584	0,09	0,0216	0,015	0,0216	0,09	0,1584	0,165

Используя условие (13), запишем

$$L_{\max} \sqrt{1 - m} = L_{\min}$$

и, определяя из этого уравнения параметр m , получаем

$$m = 1 - L_{\min}^2 / L_{\max}^2. \tag{15}$$

После этого параметр k определяется по (7).

Пример. Типовая зависимость $L(q)$ для двигателя с зубчатой магнитной системой приведена на рис. 2 (сплошная линия), ротор имеет три пары полюсов. Период этой функции $q_{\Pi} = 60^\circ$ ($q_{\Pi} = 1,047$ рад). Максимальное и минимальное значения ин-

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аракелян А.К., Афанасьев А.А. Вентильные электрические машины и регулируемый электропривод. — М.: Энергоатомиздат, 1997, 498 с.
2. Баранов М.В., Бродовский В.Н., Зимин А.В., Каржавов Б.Н. Электрические следящие приводы с моментным управлением исполнительными двигателями. — М.: Изд-во Московского государственного технического университета (МГТУ) им. Н.Э. Баумана, 2006, 240 с.
3. Шумов Ю.Н., Сафонов А.С. Сверхскоростные и ультраскоростные синхронные машины с возбуждением от постоянных магнитов (обзор зарубежных публикаций). — Электричество. 2014, № 3. с. 35 — 42.
4. Ковалев Л.К., Ковалев К.Л., Тулинова Е.Е., Иванов Н.С. Многополюсные синхронные генераторы с постоянными магнитами для ветроэнергетических установок. — Электричество, 2013, № 8, с. 2–8.

5. **Isfahani A.H., Vaez-Zadeh S.** Effect of Magnetizing Inductance on start-up and Synchronization of line-start permanent-magnet synchronous motors. – IEEE Transaction on Magnetics, 2011, vol. 47, No. 4, pp. 823–829.

6. **Kuehl S., Kennel R.M.** Measuring magnetic characteristics of synchronous machines by applying position estimation techniques. – IEEE Transaction on Industry Applications, 2014, vol. PP, No. 99, pp. 1–5.

7. **Ki-Chan Kim.** A novel method for minimization of coddling torque and torque ripple for interior permanent magnet synchronous motor. – IEEE Transaction on Magnetics, 2014, vol. 50, No.2, pp. 47–51.

8. **Красовский А.Б.** Имитационные модели в теории вентильно-индукторного электропривода. – Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005, № 3 (18), с. 74–91.

9. **Красовский А.Б., Кузнецов С.А., Трунин Ю.В.** Моделирование магнитных характеристик вентильно-индукторных машин. – Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007, № 4, с. 57–76.

10. **Цаценкин В.К.** Безредукторный автоматизированный электропривод с вентильными двигателями. – М.: Изд-во Московского энергетического института, 1991, 240 с.

11. **Лэнг С.** Эллиптические функции. – М.: Наука, 1984, 312 с.

[09.02.15]

Авторы: Енин Виталий Николаевич окончил в 1962 г. факультет «Приборостроение» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Докторскую диссертацию защитил в 1988 г. Профессор кафедры «Промышленная электротехника и электроника» МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Степанов Анатолий Владимирович окончил в 1971 г. факультет «Полупроводники и диэлектрики» Днепропетровского металлургического института. В 1995 г. защитил докторскую диссертацию «Моделирование и анализ режимов сложных электротехнических систем на спектральных моделях» в Институте проблем моделирования в энергетике НАН Украины. Профессор кафедры «Промышленная электротехника и электроника» МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Elektrichestvo (Electricity), 2015, No. 8, pp. 33–37.

About Approximating the Periodic Inductances of Electric Motors by Elliptical Jacobi Functions

V.N. ENIN and A.V. STEPANOV

It is proposed to use elliptical Jacobi functions for approximating the periodic inductances of inductor-type electric motors. The inductances of stator windings as a function of the rotor rotation angle for different types of electric machines may be constant, sine-wave, and periodic ones. For electrical machines with toothed magnetic systems of the rotor and stator, this dependence has a trapezoid shape. The use of elliptic functions allows this main dependences to be described. The kind of approximating function on the basis of elliptic Jacobi functions is selected for the specified values of period, the maximal and minimal inductance, and the kind of initial dependence. The elliptic sine and the delta-amplitude elliptic function were used. Formulas for calculating the parameters of approximating functions are obtained.

Key words: *electric motor, stator winding inductances, periodic functions, approximation of characteristics, elliptic Jacobi functions*

REFERENCES

1. **Arakelyan A.K., Afanas'yev A.A.** *Ventil'nye elektricheskiye mashiny i reguliruemiy elektroprihod* (A converter-fed electrical machines and controlled electric drive). Moscow, Publ. Energoatomizdat, 1997, 498 p.

2. **Baranov M.V., Brodovskii V.N., Zimin A.V., Karzhavov B.N.** *Elektricheskiye sledyashchiye privody s momentnym upravleniyem ispolnitel'nymi dvigatelyami* (Electric servo drives with torque control of actuator motors). Moscow, Publ. of the Bauman Moscow State Technical University (BMSTU), 2006, 240 p.

3. **Shumov Yu.N., Safonov A.S.** *Elektrichestvo – in Russ. (Electricity)*, 2014, No. 3, pp. 35–42.

4. **Kovalev L.K., Kovalev K.L., Tulinova E.E., Ivanov N.S.** *Elektrichestvo – in Russ. (Electricity)*, 2013, No. 8, pp. 2–8.

5. **Isfahani A.H., Vaez-Zadeh S.** Effect of Magnetizing Inductance on start-up and Synchronization of line-start permanent-magnet synchronous motors. – IEEE Transaction on Magnetics, 2011, vol. 47, No. 4, pp. 823 – 829.

6. **Kuehl S., Kennel R.M.** Measuring magnetic characteristics of synchronous machines by applying position estimation techniques. – IEEE Transaction on Industry Applications, 2014, vol. PP, No. 99, pp. 1–5.

7. **Ki-Chan Kim.** A novel method for minimization of coddling torque and torque ripple for interior permanent magnet synchronous motor. – IEEE Transaction on Magnetics, 2014, vol. 50, No.2, pp. 47–51.

8. **Krasovskii A.B.** *Vestnik of the BMSTU – in Russ. (Bulletin of the Bauman Moscow State Technical University)*, 2005, No. 3 (18), pp. 74–91.

9. **Krasovskii A.B.** *Uestnik of the BMSTU – in Russ. (Bulletin of the Bauman Moscow State Technical University)*, 2007, No. 4 (27), pp. 57–76.

10. **Tsatsenkin V.K.** *Bezreduktorny avtomatizirovannyi elektroprihod s ventil'nymi dvigatelyami* (Gearless automated electric drive with a converter-fed motors). Moscow, Publ. of the Moscow Power Engineering Institute, 1991, 240 p.

11. **Leng S.** *Ellipticheskiye funktsii* (Elliptical functions). Moscow, Publ. Nauka, 1984, 312 p.

Authors: Enin Vitalii Nikolayevich (Moscow, Russia) – Dr. Sci. (Eng.), Professor, the Bauman Moscow State Technical University (BMSTU).

Stepanov Anatolii Vladimirovich (Moscow, Russia) – Dr. Sci. (Eng.), Professor, BMSTU.

