

## Аналитическое решение задачи электростатики для неоднородно деформированного сферического конденсатора

ПОЛЯКОВ П.А., РУСАКОВА Н.Е., САМУХИНА Ю.В.

*Найдена новая форма неоднородного трехмерного конденсатора, допускающая аналитическое решение основной задачи электростатики. Получено аналитическое выражение для распределения поверхностной плотности заряда. Исследована зависимость этой плотности от расстояния между обкладками конденсатора. Показано, что плотность заряда для внутренней фигуры будет иметь максимальное значение в области с минимальным расстоянием между обкладками. Приведена также картина эквипотенциальных поверхностей в конденсаторе.*

**Ключевые слова:** неоднородный трёхмерный конденсатор, проводящая оболочка, распределение плотности заряда, аналитическое решение

Конденсаторы находят широкое применение в установках различного технологического назначения в качестве накопителей электрической энергии [1–7], много работ посвящено вопросу распределения электрического поля на его обкладках [8–12]. Однако существуют единичные примеры геометрических конфигураций конденсаторов, допускающих точное аналитическое решение основной задачи электростатики. Наиболее известными из них являются сферические, бесконечные плоские и цилиндрические конденсаторы. Если же размеры пластин конденсатора ограничены или имеют более сложную форму (например деформированы), т.е. расстояние между ними неоднородно, то распределение электрического поля и плотность зарядов в таких конденсаторах можно рассчитать только численными методами.

В статье рассматривается трёхмерный несимметричный конденсатор, обкладками которого являются фигуры сложной нетривиальной формы. Исследуется распределение заряда по поверхности обкладок такого конденсатора.

Ранее в [13, 14] было показано, что существует точное аналитическое решение задачи электростатики для проводящей оболочки, представляющей собой в сферической системе координат  $(r, q, f)$  фигуру вращения относительно оси  $Oz$  замкнутой кривой, уравнение которой  $r(q)$  имеет вид

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qa_0}{r} \pm \frac{a_1}{r^2} \cos q = j = \text{const}, \quad (1)$$

где  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная;  $q$  – полярный угол;  $j$  – постоянная, равная потенциалу оболочки;  $a_0$  – константа, равная суммарному заряду  $q$  на оболочке (1);  $a_1$  – константа, определяющая асимметрию оболочки.

Эквипотенциальные поверхности электрического поля, создаваемого зарядами  $q$  на фигуре (1), в

сферической системе координат  $(r, q, f)$  задаются уравнением:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qa_0}{r} \pm \frac{a_1}{r^2} \cos q = j, \quad f \in [0; 2\pi]. \quad (2)$$

Если заменить любую эквипотенциальную поверхность тонкой проводящей оболочкой, определяемой вращением замкнутой кривой (1) с меньшим по модулю потенциалом  $j$ , противоположным по знаку зарядом  $q = -a_0$  и отрицательной константой  $-a_1$ , то электрические поля вне этих двух оболочек компенсируются. Тогда электрическое поле сосредоточится между двумя этими оболочками, потенциал которого будет определяться выражением (2) за вычетом постоянного потенциала внешней оболочки. Таким образом, получаем неоднородный трехмерный конденсатор, допускающий точное аналитическое решение задачи электростатики.

Для проведения конкретных расчетов удобно перейти к безразмерным параметрам [13, 14], разделив обе части равенства (2) на значение  $j_0 = \frac{a_0}{4\pi\epsilon_0 r_0}$ , равное значению потенциала проводящей сферы радиусом  $r_0$  с суммарным зарядом  $q = a_0$ . Тогда уравнение поверхности обкладки конденсатора примет безразмерный вид [13, 14]:

$$Y x^2 - k \cos q = 0, \quad (3)$$

где

$$Y = \frac{j}{j_0} = \frac{j}{q / 4\pi\epsilon_0 r_0}, \quad x = r / r_0, \quad k = a_1 / (a_0 r_0). \quad (4)$$

В (4)  $Y$  – безразмерный потенциал, нормированный на потенциал проводящей сферы радиусом  $r_0$  с суммарным зарядом  $q = a_0$ ;  $x$  – радиус-вектор,

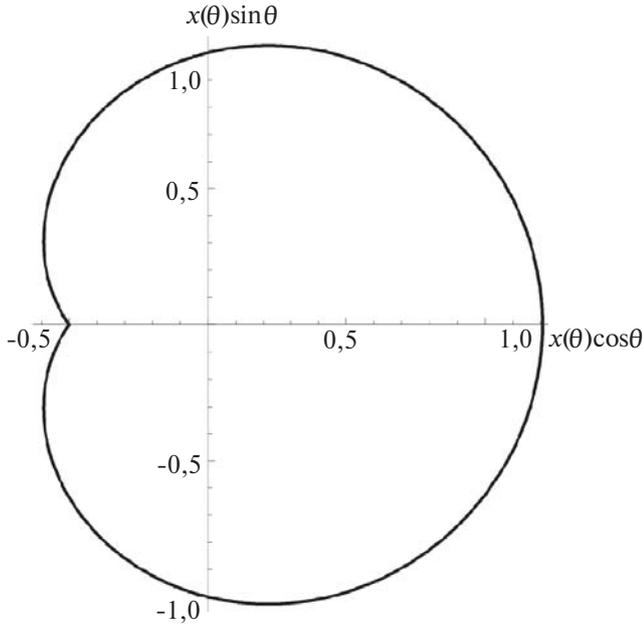


Рис. 1. Форма поверхности фигуры, симметричной относительно оси z нормированный на радиус этой сферы; k – безразмерный коэффициент.

При выборе знаков имеем две идентичные фигуры, зеркально симметричные относительно друг друга. Для определённости ограничимся знаком «минус».

Из двух корней уравнения (3) физический смысл имеет только один. В результате из (3) получим уравнение поверхности в ранее введённых безразмерных координатах:

$$x(q) = \frac{1 + \sqrt{1 + 4Yk \cos q}}{2Y}, \quad q \in [0; 2\pi]. \quad (5)$$

Следуя работам [3, 4], введём безразмерную плотность заряда  $\tilde{s} = s / s_0$ , где  $s_0 = q / 4\pi r_0^2$  – плотность распределения заряда по поверхности сферического проводника радиусом  $r_0$ . Тогда согласно [13, 14] выражение для безразмерной поверхностной плотности распределения заряда будет иметь аналитический вид:

$$\tilde{s} = \sqrt{\frac{\frac{1}{x^2} + \frac{2k \cos q}{x^3} + \frac{k \sin^2 q}{x^3}}{\frac{1}{x^2} + \frac{2k \cos q}{x^3} + \frac{k \sin^2 q}{x^3}}}, \quad (6)$$

с учетом (5)

$$\tilde{s} = \sqrt{\frac{64Y^6 k^2 \sin^2 q}{(1 + \sqrt{1 + 4Yk \cos q})^6} + \frac{16Y^3 k \cos q}{(1 + \sqrt{1 + 4Yk \cos q})^3} + \frac{4Y^2}{(1 + \sqrt{1 + 4Yk \cos q})^6}}. \quad (7)$$

На рис. 1 и 2 показаны форма поверхности (5) и распределение заряда (7) на внутренней обкладке

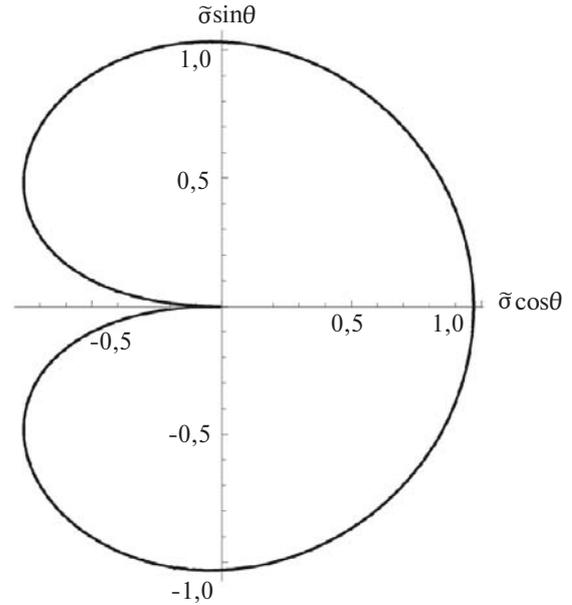


Рис. 2. Распределение заряда по поверхности фигуры, симметричной относительно оси z

конденсатора при  $Y = 1$  и  $k = 0,25$  в сечении плоскостью, перпендикулярной плоскости  $Oxy$  (ось  $z$  на рисунках горизонтальна). Если произведение параметров  $Yk_1$  превышает 0,25, полученная поверхность будет разрывной, и решение не подходит.

Из рис. 1 видно, что поверхность не является центрально-симметричной и по форме напоминает яблоко. Распределение заряда по поверхности обкладки сильно неоднородно, и плотность заряда в области выемки близка к нулю.

На рис. 3 построены эквипотенциальные поверхности внутри конденсатора между обкладками, имеющими безразмерный потенциал  $Y = 1$  и 0,5 при значении безразмерного параметра  $k = 0,25$ . Конту-

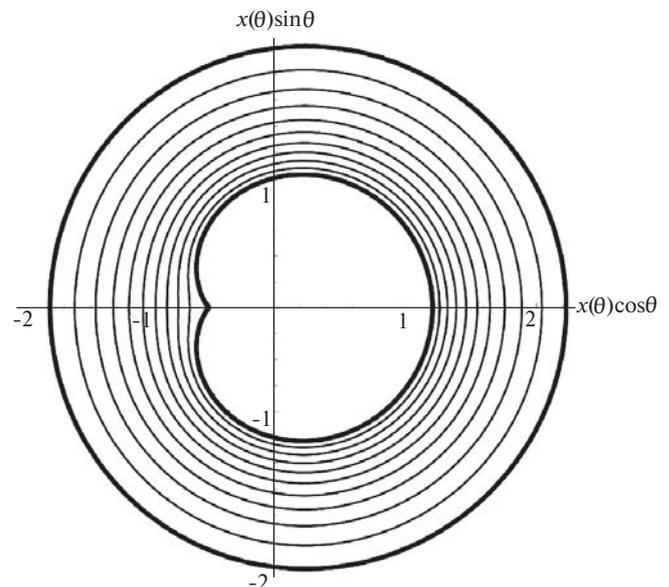


Рис. 3. Формы обкладки конденсатора, симметричной относительно оси z при  $Y = 1; 0,95; 0,9; \dots; 0,5$

рых обкладок выделены жирной линией, эквипотенциальные поверхности обозначены тонкими линиями. Разность потенциалов между соседними эквипотенциальными поверхностями в безразмерных единицах равна 0,05.

Заметим, что на внутренней обкладке конденсатора (при  $Y=1$ ) безразмерная поверхностная плотность заряда достигает максимального значения  $\tilde{s}=1,04$  при  $q=1,87$  рад. Соответственно, при  $q=0$  поверхностная плотность заряда принимает значение  $\tilde{s}=0,97$ ; при  $q=p$  значение  $\tilde{s}=0,22$ . На внешней обкладке (при  $Y=0,5$ ) максимальное значение поверхностной плотности распределения  $\tilde{s}=0,25$  достигается при  $q=1,7$  рад, что не совпадает с аналогичным значением для внутренней обкладки.

На рис. 4 построены эквипотенциальные поверхности внутри конденсатора между обкладками, имеющими безразмерный потенциал  $Y=1$  и  $0,95$  при значении безразмерного параметра  $k=0,25$ . Разность потенциалов между соседними эквипотенциальными поверхностями в безразмерных единицах равна 0,01.

Таким образом, видим, что распределение плотности заряда по поверхностям обкладок неоднородно. С увеличением значения потенциала плотность распределения заряда по поверхности уменьшается. На внешней и внутренней обкладках максимальные значения плотности распределения заряда отличаются друг от друга. Расстояние между обкладками будет минимальным в той области, в которой плотность заряда для внутренней фигуры принимает максимальное значение. Максимальное расстояние наблюдается в области выемки внутренней фигуры.

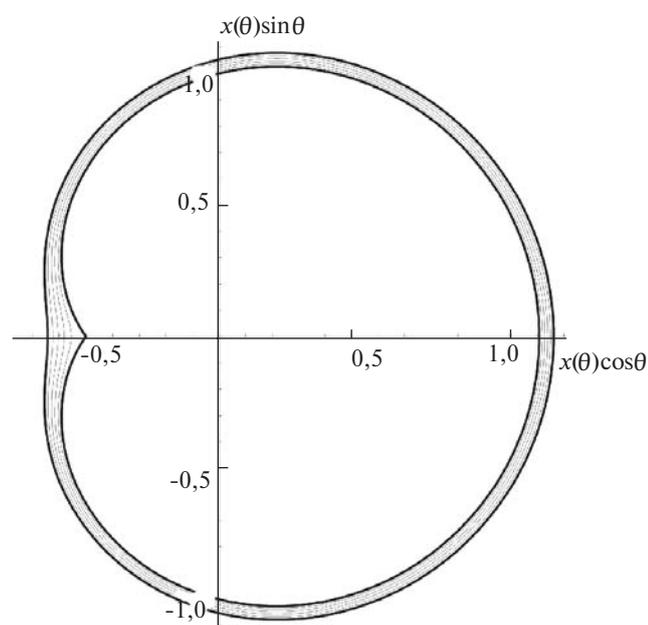


Рис. 4. Форма поверхности фигуры, симметричной относительно оси  $z$  при  $Y=1; 0,99; 0,98; \dots; 0,95$

Отметим, что полученное аналитическое решение может служить тестом для эффективности численных решений задачи электростатики с помощью различных математических пакетов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тамм И.Е. Основы теории электричества, изд. 11-е. — М.: Физматлит, 2003, 616 с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред, изд. 4-е. — М.: Физматлит, 2005, 652 с.
3. Калашников С.Г. Электричество, изд. 6-е. — М.: Физматлит, 2003, 624 с.
4. Кучинский Г.С., Назаров Н.И. Силовые электрические конденсаторы. — М.: Энергоатомиздат, 1992, 320 с.
5. Берзан В.П., Геликман Б.Ю., Гураевский М.Н. Электрические конденсаторы и конденсаторные установки. Справочник. — М.: Энергоатомиздат, 1987, 656 с.
6. Бутырин П.А., Гусев Г.Г., Кужман В.В., Михеев Д.В. Математическое и физическое моделирование фильтрокомпенсирующего устройства. — Электричество, 2014, № 11, с. 58–62
7. Kraus J.K., Fleisch D.A. Electromagnetics with Applications. — New York: McGraw-Hill, 1999, p. 232.
8. Banseviciusa R., Virbalisb J.A. Distribution of electric field in the round hole of plane capacitor. — J. of Electrostatics, 2006, vol. 64, pp. 226–233.
9. Xiang Y. The electrostatic capacitance of an inclined plate capacitor. — J. of Electrostatics, 2006, vol. 64, pp. 29–34.
10. Pillai K.P.P. Fringing field of finite parallel-plate capacitors. — Proc. Inst. Electr. Eng., 1970, vol.117, No. 6, pp. 1201–1204.
11. T.J. Bromwich, Note on Condenser Problems. — Messenger Math., 1902, No. 31, 184–192.
12. Langton N.H. The parallel-plate capacitor with symmetrically placed unequal plates. — J. of Electrostatics, 1981, vol. 9, pp. 289–305.
13. Polyakov P.A., Rusakova N.E., Samukhina Yu.V., Giudjenov I. Surface charge distribution for non-symmetrical conducting body. — Mathematics and Natural Sciences, 2013, vol. 3, pp. 33–38.
14. Поляков П. А., Русакова Н. Е., Самухина Ю.В. О новых точных решениях задачи электростатики проводников. — Вестник Московского университета, сер. 3. Физика. Астрономия, 2014, № 6, с. 57–60.
15. Polyakov P.A., Rusakova N.E., Samukhina Yu.V. New solutions for charge distribution on conductor surface. — J. of Electrostatics, 2015, vol. 77, pp. 147–152, doi:10.1016/j.elstat.2015.08.003.

[21.09.15]

Авторы: Поляков Пётр Александрович окончил физический факультет Московского государственного университета (МГУ) им. М.В. Ломоносова в 1976 г. В 1993 г. в МГУ защитил докторскую диссертацию «Электродинамика плазмы и магнитных сред». Профессор МГУ им. М.В. Ломоносова.

Русакова Наталья Енчуновна окончила физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова в 1999 г. В 2005 г. защитила кандидатскую диссертацию «Электродинамика плазмы» в МГУ им. М.В. Ломоносова. Ассистент кафедры общей физики МГУ им. М.В. Ломоносова.

Самухина Юлия Владимировна окончила физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова в 2013 г. Аспирантка кафедры общей физики МГУ им. М.В. Ломоносова.

*Elektrichestvo (Electricity)*, 2015, No. 11, pp. 63–66.

## Example of an Electrostatic Problem for Non-uniformly Deformed Spherical Capacitor with Analytical Solution

**POLYAKOV Peter Aleksandrovich** (*Moscow State University (MSU), Moscow, Russia*) – Professor, Dr. Sci. (Eng.)

**RUSAKOVA Natal'ya Yenchunovna** (*MSU, Moscow, Russia*) – Assistant of the Department, Cand. Sci. (Eng.)

**SAMUKHINA Yuliya Vladimirovna** (*MSU, Moscow, Russia*) – Ph.D. Student

*In the paper new form of non-uniform three-dimensional capacitor that enables an exact analytical solution of the electrostatic problem is computed. Hitherto only few analytical solutions of electrostatic problems are known for single geometric forms of capacitors. An analytical solution for the surface charge density distribution is obtained. The dependence of the density on a spacing between the capacitor arms is derived. Its maximum is shown to be at the region where the spacing between the capacitor plates is minimum. The analytical solution derived in the paper can be used as a test for efficiency of numerical solutions of electrostatics problem by means of different software packages. A plot of the equipotential surfaces is also represented in the work.*

**Key words:** *inhomogeneous three-dimensional capacitor, non-uniform three-dimensional capacitor, conducting shell, charge density distribution, analytical solution*

### REFERENCES

1. **Tamm I.E.** *Osnovy teorii elektrichestva, izd. 11-ye* (Principles of electricity theory, publ. 11th ). Moscow, Publ. «Fizmatlit», 2003, 616 p.
2. **Landau L.D., Lifshits E.M.** *Elektrodinamika sploshnykh sred, izd. 4-ye* (Electrodynamics of continuous medium, publ. 4th). Moscow, Publ. «Fizmatlit», 2005, 652 p.
3. **Kalashnikov S.G.** *Elektrichestvo, izd. 6-ye* (Electricity, publ. 6th). Moscow, Publ. «Fizmatlit», 2003, 624 p.
4. **Kuchinskii G.S., Nazarov N.I.** *Silovye elektricheskiye kondensatory* (Electrical power capacitors). Moscow, Publ. «Energoatomizdat», 1992, 320 p.
5. **Berzan V.P., Gelikman B.Yu., Gurayevskii M.N.** *Elektricheskiye kondensatory i kondensatornye ustanovki: Spravochnik* (Electrical capacitors and capacitor installations. Handbook). Moscow, Publ. «Energoatomizdat», 1987, 656 p.
6. **Butyrin P.A., Gusev G.G., Kuzhman V.V., Mikheyev D.V.** *Elektrichestvo (Electricity)*, 2014, No. 11, pp. 58–62.
7. **Kraus J.K., Fleisch D.A.** *Electromagnetics with Applications*. – New York: McGraw-Hill, 1999, p. 232.
8. **Bansevicusa R., Virbalisb J.A.** Distribution of electric field in the round hole of plane capacitor. – J. of Electrostatics, 2006, vol. 64, pp. 226–233.
9. **Xiang Y.** The electrostatic capacitance of an inclined plate capacitor. – J. of Electrostatics, 2006, vol.64, pp. 29–34.
10. **Pillai K.P.P.** Fringing field of finite parallel-plate capacitors. – Proc. Inst. Electr. Eng., 1970, vol.117, No. 6, pp. 1201–1204.
11. **Bromwich T.J.** Note on Condenser Problems. – Messenger Math., 1902, No. 31, pp. 184–192.
12. **Langton N.H.** The parallel-plate capacitor with symmetrically placed unequal plates. –J. of Electrostatics, 1981, vol. 9, pp. 289–305.
13. **Polyakov P.A., Rusakova N.E., Samukhina Yu.V., Giudjenov I.** Surface charge distribution for non-symmetrical conducting body. – Mathematics and Natural Sciences. 2013, vol. 3, pp. 33–38.
14. **Polyakov P.A., Rusakova N.E., Samukhina Yu.V.** *Vestnik Moskovskogo universiteta, ser. 3. Fizika. Astronomiya (Bulletin of the Moscow University, ser. 3. Physics. Astronomy)*, 2014, No. 6, pp. 57–60.
15. **Polyakov P.A., Rusakova N.E., Samukhina Yu.V.** New solutions for charge distribution on conductor surface. – J. of Electrostatics, 2015, vol. 77, pp. 147–152. doi:10.1016/j.elstat.2015.08.003