

# Трехмерное математическое моделирование стримерного разряда в воздухе с учетом ветвления: экономичный расчет электрического поля<sup>1</sup>

БЕЛОГЛОВСКИЙ А.А., ВЕРЕЩАГИН И.П.

*Расчет электрического поля, созданного объемным зарядом, вынесенным стримерным разрядом в межэлектродное пространство, является одним из важнейших элементов математического моделирования протекающих в нем физических процессов. Для решения этой задачи предложено использовать итерационный конечно-разностный метод верхней релаксации, обеспечивающий высокую скорость вычислений в сочетании с необходимой точностью определения значений напряженности поля в разрядном промежутке. Показана эффективность применения этого метода в трехмерной математической модели стримерного разряда в воздухе с учетом ветвления.*

**Ключевые слова:** электрическое поле, стримерный разряд, математическое моделирование, расчет

Стримерный электрический разряд сопровождается процессы, протекающие в природе и установках высокого напряжения. Он определяет начальные условия возникновения встречного лидера при поражении наземных объектов молнией. Он влияет на начальные условия пробоя воздушных промежутков. Стримеры являются источниками сильного электрического поля, в котором образуются активные частицы, участвующие затем в химических реакциях в устройствах для очистки воздуха от газообразных примесей, синтеза озона и т.п. Поэтому математическое моделирование стримерного разряда — одна из теоретических основ расчетов в молниезащите, электрической прочности воздушной изоляции энергетического оборудования, электро-разрядных технологий и других разделов техники высоких напряжений.

Известно, что основной особенностью пространственной структуры стримерного разряда является ее сложный трехмерный характер [1]. Он обусловлен одновременным развитием в разрядном промежутке множества стартовавших с коронирующего электрода стримеров и их ветвей. Поэтому лишь трехмерная (3D) модель, в которой напряженность поля, концентрации электронов и ионов

*Calculation of the electric field created by the bulk charge brought by streamer discharge into the interelectrode space is one of the most important components of mathematical simulation of the physical processes occurring in this space. It is proposed to use the iteration finite-element overrelaxation method for solving this problem, the application of which makes it possible to ensure high speed of calculations in combination with the required accuracy of determining the electric field intensity in the discharge gap. The effectiveness of using this method in a 3D mathematical model of streamer discharge in air taking its branching into account is demonstrated.*

**Key words:** streamer discharge, mathematical simulation, electric field, calculation

являются функциями трех пространственных координат и времени, согласуется с экспериментальными данными о структуре стримерного разряда. Возможности построения 3D моделей стримерного разряда в воздухе ограничиваются недостатком вычислительных ресурсов (производительности и оперативной памяти) даже на современных компьютерах [1]. В значительной мере это связано с тем, что в процессе расчёта необходимо многократно вычислять параметры 3D электрического поля с объемным зарядом с высокой точностью (в значениях напряженности поля допускаются погрешности не более 1%). Это требует примерно до 90% вычислительных ресурсов [2]. Следовательно, возникает необходимость создания чрезвычайно быстродействующих вычислительных алгоритмов расчета трехмерных полей с объемным зарядом. На основе анализа литературных источников и собственных работ (см. [3]) авторы пришли к заключению, что подобный алгоритм можно построить на основе конечно-разностного (КР) метода верхней релаксации (МВР).

Статья посвящена оценке эффективности МВР при расчете 3D полей с объемным зарядом, определению его оптимальных параметров.

**Модельная задача.** Простейшим разрядным промежутком является пространство между двумя параллельными плоскостями, к одной из которых приложено напряжение, а другая заземлена. Неод-

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ.

нородность поля определяется распределением объемного заряда в межэлектродном пространстве.

Расчетная модель системы показана на рис. 1. Расчетная область (РО) – это прямоугольный параллелепипед размером  $L_x \times L_y \times D$ . Начало декартовой системы координат находится в середине его нижней стороны.

К нижней плоскости ( $z=0$ ) приложено напряжение  $U > 0$ , потенциал верхней плоскости ( $z=D$ ) равен нулю. Расчетная область ограничена фиктивными границами  $x=L_x/2$ ,  $x=-L_x/2$ ,  $y=L_y/2$  и  $y=-L_y/2$ , параллельными оси  $z$ . Полагается, что на них потенциал изменяется по линейному закону  $j(z)=(1-z/D)U$ . Значения  $L_x$  и  $L_y$  выбираются так, чтобы фиктивные границы не влияли на значение и распределение поля в области, где вычисляются его параметры, т.е. вблизи оси  $z$ .

В середину области помещен сферический объемный заряд радиусом  $R_0$  и центром в точке  $(0; 0; D/2)$ ; плотность заряда внутри сферы равна  $\rho_0$ , а вне ее – нулю; среда – воздух ( $\epsilon=1$ ).

Распределение потенциала в РО описывается уравнением Пуассона  $\nabla^2 j = -\rho/\epsilon_0$  [4] относительно потенциала электрического поля  $j$  в виде:

$$\frac{\partial^2 j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 j}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (1)$$

где  $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$  Ф/м – электрическая постоянная;  $\rho$  – плотность объемного заряда определяется

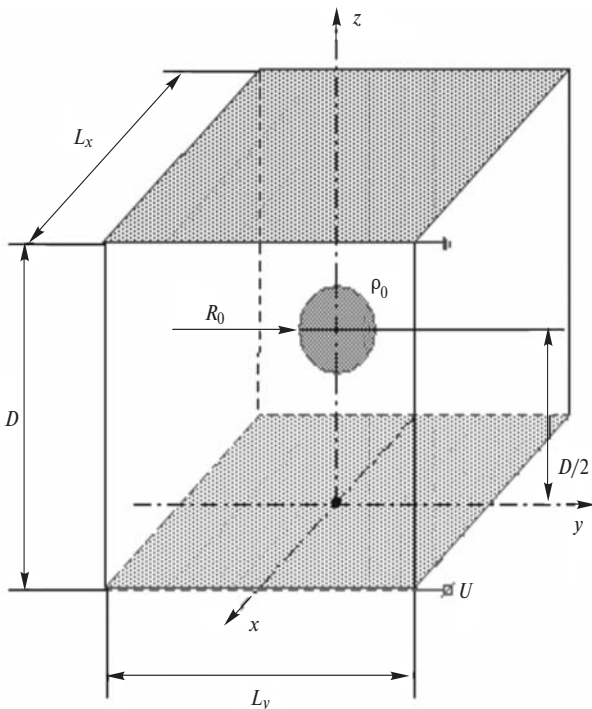


Рис. 1. Расчетная область

в зависимости от координат  $x$ ,  $y$  и  $z$  соотношением:

$$\rho = \begin{cases} \rho_0, & \text{если } r \leq R_0; \\ 0, & \text{если } r > R_0. \end{cases}$$

Здесь  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - D/2)^2}$ .

Уравнение (1) дополняется граничными условиями на границах РО:

$$\begin{aligned} j|_{z=0} &= U; \quad j|_{z=D} = 0; \quad j|_{x=-L_x/2} = j|_{x=L_x/2} = \\ &= j|_{y=-L_y/2} = j|_{y=L_y/2} = (1-z/D)U. \end{aligned} \quad (2)$$

Распределение в РО напряженности электрического поля  $\vec{E}$  связано с распределением потенциала  $j$  уравнением связи  $\vec{E} = -\text{grad}(j)$  [4], которое в данном случае принимает вид

$$\vec{E} = -\vec{i} \frac{\partial j}{\partial x} - \vec{j} \frac{\partial j}{\partial y} - \vec{k} \frac{\partial j}{\partial z}, \quad (3)$$

где  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  – три элементарных вектора декартовой системы координат.

**Решение уравнения Пуассона методом верхней релаксации.** Чтобы решить уравнение Пуассона (1), введем в расчетной области КР сетку с постоянным шагом  $h$  по всем осям. Для этого создадим множество узловых точек  $(i, j, k)$  с координатами  $x_i = -L_x/2 + (i-1)h$ ,  $i=1,2,\dots,n_x$ ;  $y_j = -L_y/2 + (j-1)h$ ,  $j=1,2,\dots,n_y$ ;  $z_k = (k-1)h$ ,  $k=1,2,\dots,n_z$ ; где  $n_x = L_x/h + 1$ ,  $n_y = L_y/h + 1$ ;  $n_z = D/h + 1$  ( $h$  – параметр). Решение задачи сводится к отысканию сеточной функции узловых потенциалов  $j_{i,j,k}$  в  $(x_i, y_j, z_k)$ , которая определена во всех узлах  $\{j_{i,j,k}\}$ ,  $(i=1, n_x, j=1, n_y, k=1, n_z)$ . Значения  $j_{i,j,k}$  определяются из системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), полученной заменой входящих в (1) производных соответствующими разностными отношениями [5]:

$$\begin{aligned} &\frac{j_{i-1,j,k} - 2j_{i,j,k} + j_{i+1,j,k}}{h^2} + \frac{j_{i,j,k-1} - 2j_{i,j,k} + j_{i,j,k+1}}{h^2} + \\ &+ \frac{j_{i,j,k-1} - 2j_{i,j,k} + j_{i,j,k+1}}{h^2} = -f(i,j,k), \\ &i=2,3,\dots,n_x-1; \quad j=2,3,\dots,n_y-1; \quad k=2,3,\dots,n_z-1. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $f_{i,j,k} = \rho(x_i, y_j, z_k)/\epsilon_0$ .

Система (4) дополняется граничными условиями (2).

Алгоритм итерационного решения системы (4) с учетом (2). Система (4) решается путем последовательных приближений. Пусть в (4) значения  $j_{i,j,k}^{(m)}$ ,  $j_{i-1,j,k}^{(m)}$ ,  $j_{i,j-1,k}^{(m)}$  и  $j_{i,j,k-1}^{(m)}$  относятся к новому искомому  $(m)$ -му приближению, а  $j_{i+1,j,k}^{(m)}$ ,  $j_{i,j+1,k}^{(m)}$  и  $j_{i,j,k+1}^{(m)}$  – к старому известному  $(m-1)$ -му. Тогда выражения для  $\{j_{i,j,k}^{(m)}\}$  следующие:

$$\begin{aligned}
 j_{i,j,k}^{(m)} &= (j_{i-1,j,k}^{(m)} + j_{i,j-1,k}^{(m)} + j_{i,j,k-1}^{(m)} + j_{i+1,j,k}^{(m)} + j_{i,j+1,k}^{(m)} + j_{i,j,k+1}^{(m)} + h^2 f_{i,j,k})/6, \\
 i &= 2,3,\dots,n_x - 1; \quad j = 2,3,\dots,n_y - 1; \quad k = 2,3,\dots,n_z - 1; \\
 j_{1,j,k}^{(m)} &= j_{n_x,j,k}^{(m)} = (1 - z/D)U, \quad j = 1,2,\dots,n_y; \\
 k &= 1,2,\dots,n_z; \\
 j_{i,1,k}^{(m)} &= j_{i,n_y,k}^{(m)} = (1 - z/D)U, \quad i = 1,2,\dots,n_x; \\
 k &= 1,2,\dots,n_z; \\
 j_{i,j,1}^{(m)} &= U; \quad j_{i,j,n_z}^{(m)} = 0, \quad i = 1,2,\dots,n_x; \quad j = 1,2,\dots,n_y.
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Первая формула из (5) получена из уравнения (4), остальные – из (2). Порядок определения значений сеточной функции  $\{j_{i,j,k}\}$ ,  $(i \hat{=} \overline{1, n_x}, j \hat{=} \overline{1, n_y}, k \hat{=} \overline{1, n_z})$  из соотношений (5) следующих. Расчет начинается с задания начального приближения  $\{j_{i,j,k}^{(1)}\}$ ,  $(i \hat{=} \overline{1, n_x}, j \hat{=} \overline{1, n_y}, k \hat{=} \overline{1, n_z})$ , отвечающего граничным условиям. В данном случае оно может быть нулевым:

$$\begin{aligned}
 j_{i,j,k}^{(1)} &= 0, \quad i = 2,3,\dots,n_x - 1; \quad j = 2,3,\dots,n_y - 1; \\
 k &= 2,3,\dots,n_z - 1; \\
 j_{1,j,k}^{(1)} &= j_{n_x,j,k}^{(1)} = (1 - z/D)U, \quad j = 1,2,\dots,n_y; \\
 k &= 1,2,\dots,n_z; \\
 j_{i,1,k}^{(1)} &= j_{i,n_y,k}^{(1)} = (1 - z/D)U, \quad i = 1,2,\dots,n_x; \\
 k &= 1,2,\dots,n_z; \\
 j_{i,j,1}^{(1)} &= U, \quad j_{i,j,n_z}^{(1)} = 0, \quad i = 1,2,\dots,n_x; \\
 j &= 1,2,\dots,n_y.
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Затем по (5) вычисляются второе приближение  $\{j_{i,j,k}^{(2)}\}$ , третье приближение  $\{j_{i,j,k}^{(3)}\}$  и т.д. Вычисления продолжают до тех пор, пока во всех внутренних узлах КР сетки, т.е. при  $i = 2,3,\dots,n_x - 1$ ,  $j = 2,3,\dots,n_y - 1$ ,  $k = 2,3,\dots,n_z - 1$ , не будет выполнено условие

$$\left| \frac{j_{i,j,k}^{(m)} - j_{i,j,k}^{(m-1)}}{j_{i,j,k}^{(m)}} \right| \leq d_{\max}, \tag{7}$$

где  $d_{\max}$  – заданное (в отн. ед.) предельное расхождение между узловыми потенциалами  $j_{i,j,k}$  на  $(m-1)$ -й и  $(m)$ -й итерациях ( $d_{\max} \ll 1$ ).

Для улучшения сходимости выполняется релаксация приближений [5]. Пусть на основе  $(m-1)$ -го приближения  $\{j_{i,j,k}^{(m-1)}\}$  вычисляется  $m$ -е приближение для  $\{j_{i,j,k}^{(m)}\}$ , тогда его можно уточнить с использованием  $(m-1)$ -го приближения:

$$\begin{aligned}
 j_{i,j,k}^{(m)} &= [j_{i,j,k}^{(m)} - (1 - 1/w)j_{i,j,k}^{(m-1)}]w, \\
 i &= 2,3,\dots,n_x - 1; \quad j = 2,3,\dots,n_y - 1; \quad k = 2,3,\dots,n_z - 1,
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

где  $w$  – коэффициент релаксации ( $1 < w < 2$ ).

После определения узловых потенциалов  $\{j_{i,j,k}\}$  в соответствии с уравнением связи (3) рассчитываются значения напряженности поля в узлах КР сетки  $\{E_{i,j,k}\}$ ,  $(i \hat{=} \overline{1, n_x}, j \hat{=} \overline{1, n_y}, k \hat{=} \overline{1, n_z})$ . Для вычисления частных производных потенциала по координатам в (3) применяются центральные КР аппроксимации производных второго порядка точности [5].

**Результаты расчета параметров электрического поля и их анализ.** Далее представлены результаты расчета электрического поля в расчетной области, показанной на рис. 1, полученные описанным методом верхней релаксации. В качестве характерного примера приведены данные для  $L_x = L_y = D = 1$  см и  $R_0 = 0,1, 0,2$  и  $0,3$  см при  $U = 0$  (последнее обусловлено желанием изучить работу МВР при расчете поля объемного заряда).

Выбор значений  $R_0$  определяется необходимостью сравнить результаты численных расчетов с аналитическим решением для уединенного сферического заряда. Сопоставим расчетные значения максимальной напряженности поля  $E_{\max}$  с ее значением, вычисляемым аналитически:  $E_{\max}^{(a)} = R_0 r_0 / (3\epsilon_0)$ . Тогда погрешность расчета  $E_{\max}$  можно оценить по формуле

$$dE_{\max} = \left| \frac{E_{\max}^{(a)} - E_{\max}}{E_{\max}^{(a)}} \right|. \tag{9}$$

Шаг  $h$  КР сетки варьировался в пределах от 0,005 до 0,02 см, а число ее шагов  $N = n_x = n_y = n_z$  изменялось от 201 до 51. При конечно-разностном расчете полей для получения заданной точности расчета важны не столько значения  $h$  и  $N$ , сколько

отношение шага сетки к геометрическому параметру, характеризующему степень неоднородности поля. В данном случае это радиус сферического заряда  $R_0$ . Соответствующие указанным значениям  $h$  отношения  $R_0/h$  для  $R_0 = 0,1$  см менялись от 20 до 5, для  $R_0 = 0,2$  см — от 40 до 10, для  $R_0 = 0,3$  см — от 60 до 15.

Основным параметром МВР, влияющим на его сходимость, является коэффициент релаксации  $w$ . Поэтому в первую очередь рассмотрим его влияние на число итераций  $N_{\text{ит}}$ , требующееся для выполнения условия сходимости (7) при  $d_{\text{max}} = 10^{-7}$  (в [3] было показано, что это значение  $d_{\text{max}}$  обеспечивает погрешность в напряженности поля на уровне 1% и менее при корректном выборе остальных влияющих параметров). Соответствующие данные представлены на рис. 2. Легко видеть, что зависимость  $N_{\text{ит}}(w)$  имеет единственный минимум, причем чем больше  $R_0/h$  (и, соответственно, чем больше  $N$ ), тем больше значение  $w^*$ , при котором он достигается (рис. 3). Анализ полученных данных показал, что при любых значениях  $N$ , необходимых для расчета параметров трехмерного поля, значение  $w^*$  лежит в пределах  $1,9 < w < 2,0$ .

Необходимо отметить две важные особенности зависимости  $w^*(N)$  (см. рис. 3). Во-первых, она растет медленнее, чем линейная зависимость. Во-вторых, она очень слабо зависит от  $R_0$ , т.е. от распределения объемного заряда в промежутке.

Последний результат особенно важен по причине, связанной с необходимостью предварительного выбора коэффициента релаксации перед началом моделирования разряда. Слабая зависимость  $w^*$  от распределения  $\rho$  в пространстве дает возможность однажды выбрать значение коэффициента релаксации (например, для электростатического поля или поля с неким характерным распределением объемного заряда), сохраняя его неизменным в дальнейшем. Поскольку продолжительность решения уравнения (1) прямо пропорциональна значению  $N_{\text{ит}}$ , то выбор  $w \approx w^*$  позволяет минимизировать время счета.

Теперь оценим погрешности численного расчета напряженности поля в рассматриваемой модельной задаче. Для любых КР методов они в первую очередь зависят от размера шага сетки  $h$  и его отношения к геометрическим параметрам, определяющим неоднородность поля [5]. В данном случае таким параметром является радиус сферического заряда  $R_0$ .

На рис. 4 показаны зависимости вычисленных по (9) погрешностей  $dE_{\text{max}}$  максимального значения напряженности поля в системе (9) от значений  $R_0/h$ . Легко видеть, что значения  $dE_{\text{max}}$  быстро

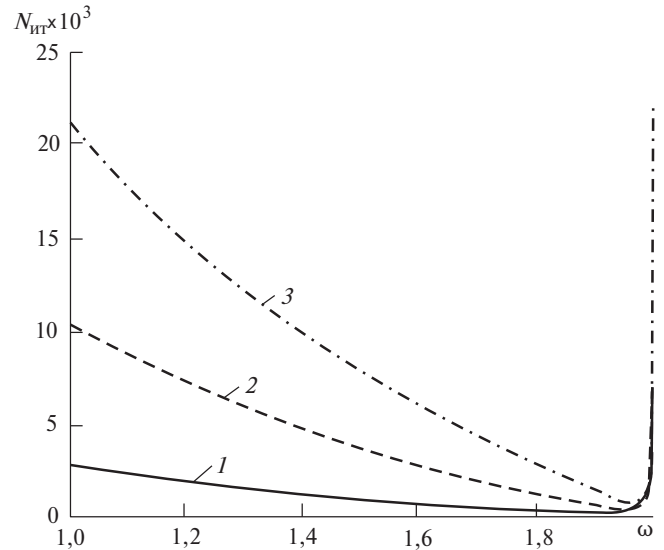


Рис. 2. Зависимости  $N_{\text{ит}}(w)$  при  $L_x = L_y = D = 1$  см,  $R_0 = 0,1$  см,  $\rho_0 = 10^{-10}$  Кл/см<sup>3</sup> и  $U = 0$ : 1 —  $R_0/h = 5$  ( $N = 51$ ); 2 — 10 ( $N = 101$ ); 3 — 15 ( $N = 151$ )

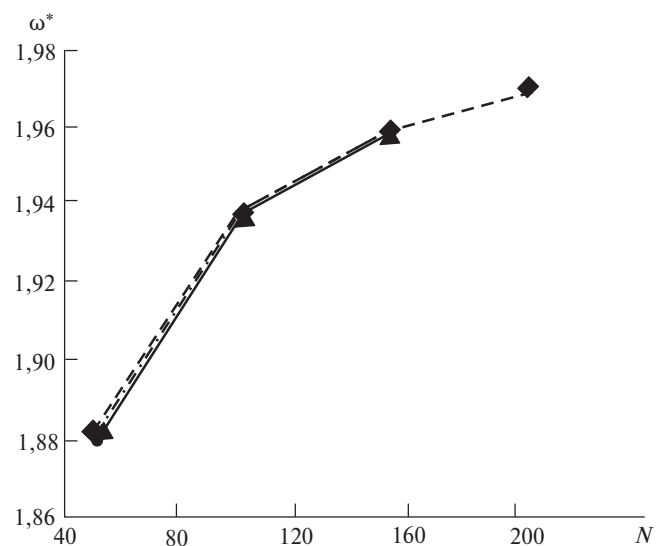


Рис. 3. Зависимости  $w^*(N)$  при  $L_x = L_y = D = 1$  см,  $\rho_0 = 10^{-10}$  Кл/см<sup>3</sup> и  $U = 0$ : ● —  $R_0 = 0,1$  см; ◆ — 0,2 см; ▲ — 0,3 см

уменьшаются с ростом отношения  $R_0/h$ . Для снижения  $dE_{\text{max}}$  до 2% достаточно  $R_0/h \gg 10$ , а до 1% —  $R_0/h \gg 20$ .

Аналогичного вида кривые  $N_{\text{ит}}(w)$ ,  $w^*(N)$  и  $dE_{\text{max}}(R_0/h)$  были получены в [6] для системы электродов «стержень—плоскость» с резконеоднородным электростатическим полем (в этом случае  $R_0$  — радиус кривизны поверхности сферически закругленного стержня длиной  $D/2$ ). При прочих равных условиях в этой системе оптимальные значения коэффициента релаксации  $w^*$  оказались на 1,2% ниже, чем в системе рис. 1, в которой неоднородность электрического поля создается лишь объемным зарядом. Чем больше число узлов КР сетки  $N$ , тем меньше эта разница.



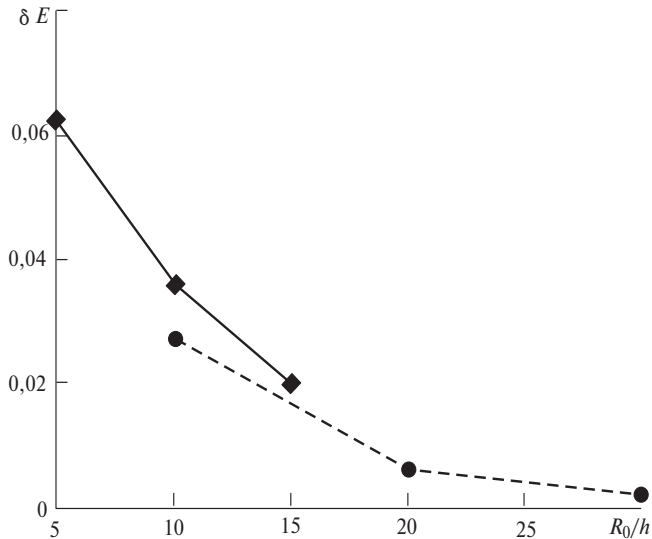


Рис. 4. Зависимость  $dE_{\max}(R_0/h)$  при  $L_x = L_y = D = 1$  см,  $\gamma_0 = 10^{-10}$  Кл/см<sup>3</sup> и  $U = 0$ : ● —  $R_0 = 0,1$  см; ◆ —  $R_0 = 0,2$  см (при  $R_0 = 0,1$  см  $E_{\max}^{(a)} = 37,665$  В/м, при  $R_0 = 0,2$  см  $E_{\max}^{(a)} = 75,330$ )

**Моделирование ветвления катодонаправленного стримера в воздухе.** Приведенные результаты характеризуют эффективность применения метода верхней релаксации при однократном расчете трехмерного электрического поля. Математическое моделирование разрядных явлений требует многократного расчета поля в итерационном процессе совместного решения системы дифференциальных уравнений (см. [1]). Помимо уравнения Пуассона (1) в нее входят уравнения неразрывности потока заряженных частиц, описывающие их появление, движение и исчезновение в разрядной плазме. Численное решение уравнений неразрывности также сопровождается затратами вычислительных ресурсов. Приведенный далее материал иллюстрирует результирующую экономию времени счета  $T_{сч}$ , которой удастся добиться, применяя МВР при  $w = w^*$ , в модели стримерной стадии электрического разряда в воздухе.

**Математическая модель.** Рассмотрим математическую модель ветвления положительного (катодонаправленного) стримера в воздухе. Для этого воспользуемся классической концепцией ветвления [7], заключающейся в том, что к ветвлению приводит развитие крупной лавины электронов в сильном поле головки и канала стримера.

Используем математическое описание разряда в воздухе, в котором учитывается взаимодействие в разрядной плазме трех видов заряженных частиц: свободных электронов и обезличенных положительных и отрицательных ионов [1]. Оно учитывает рождение, гибель и дрейф этих частиц в электрическом поле и основано на гидродинамической модели движения заряженных частиц [1], которая

включает в себя уравнения неразрывности потока заряженных частиц, описывающие их баланс, и уравнение Пуассона для расчета поля:

$$\partial N_i / \partial t + \text{div}(N_i \vec{v}_i) = S_i; \quad (10)$$

$$\tilde{\nabla}^2 j = -r / \epsilon_0. \quad (11)$$

Система (10) и (11) дополняется известным уравнением связи (3) между вектором напряженности электрического поля  $\vec{E}$  и его потенциалом  $j$ . Уравнения (10) записываются для свободных электронов ( $i = 'e'$ ), а также положительных ( $i = '+'$ ) и отрицательных ( $i = '-'$ ) ионов. Таким образом, в модель входят три уравнения неразрывности (10), где  $N_i$  — концентрации названных заряженных частиц;  $\vec{v}_i$  — их скорости;  $r = e(N_+ - N_e - N_-)$  — плотность объёмного заряда;  $e = 1,6 \times 10^{-19}$  Кл — элементарный заряд;  $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$  Ф/м — электрическая постоянная.

Правые части  $S_i$  уравнений определяют число частиц (электронов, положительных и отрицательных ионов), появившихся в единице объема в единицу времени благодаря процессам ударной ионизации, фотоионизации, прилипания электронов, развала отрицательных ионов, ионно-ионной и электронно-ионной рекомбинации. Зависимости интенсивности указанных процессов и скоростей частиц от напряженности приняты в соответствии с данными в [8] рекомендациями. Концентрации частиц, потенциал и напряженность поля являются функциями времени и трех пространственных координат.

Модель реализована в расчётной области, представляющей прямоугольный параллелепипед размером  $L_x \times L_y \times D$ , показанный на рис. 1. Граничные условия на границах этой РО имеют вид (2).

Начальные условия для концентраций  $N_+$ ,  $N_e$  и  $N_-$  соответствуют допущению: до приложения напряжения  $U$  в большей части промежутка присутствуют лишь электроны и положительные ионы с концентрацией  $N_0$ , а отрицательные ионы отсутствуют.

Развитие разряда начинается с двух малых случайных неоднородностей в распределении электронов, в которых концентрация частиц распределена по нормальному закону. Одна из них (большая) расположена на координатной оси  $z$  на высоте  $z_1$ , максимальная концентрация электронов в ней равна  $N_{\max}^0$ , а скорость спада концентрации в пространстве характеризуется параметром  $r_1$ . Развитие этой неоднородности во внешнем поле дает начало формированию первичного стримера. Другая неод-

нородность (меньшая) с максимальной концентрацией  $N_{\max 2}^0 \ll N_{\max 1}^0$  и параметром спада  $r_2$  помещена в точку с координатами  $(x_2, y_2, z_2)$ . Ее развитие в суммарном поле, созданном поверхностными зарядами на электродах и объемным зарядом первичного стримера, порождает лавину, инициирующую ветвление.

Таким образом, начальные условия для  $N_+$ ,  $N_e$  и  $N_-$  описываются соотношениями:

$$N_e^0(x, y, z) = N_0 + N_{\max 1}^0 \exp\left\{-\frac{x^2 + y^2 + (z - z_1)^2}{r_1^2}\right\} + N_{\max 2}^0 \exp\left\{-\frac{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2}{r_2^2}\right\}$$

$$N_+^0(x, y, z) = N_0;$$

$$N_-^0(x, y, z) = 0;$$
(12)

При этом центры начальных неоднородностей в распределении электронов должны находиться внутри расчетной области, т.е.  $0 < z_1 < D$ ;  $0 < z_2 < D$ ;  $-L_x/2 < x_2 < L_x/2$ ;  $-L_y/2 < y_2 < L_y/2$ .

Граничные условия для  $N_+$ ,  $N_e$  и  $N_-$  соответствуют предположению о том, что на поверхностях электродов нет источников заряженных частиц, а электрическое поле обеспечивает полный унос положительных ионов от анода и электронов и отрицательных ионов — от катода:

$$N_e(x, y, D) = 0, N_+(z, y, 0) = 0, N_-(x, y, D) = 0. \quad (13)$$

Уравнение (11) с условиями (2) решается относительно  $j$  описанным выше методом верхней релаксации. Для вычисления производных потенциала по координатам  $x$ ,  $y$ ,  $z$  в (3) использованы центральные конечные разности второго порядка точности. Уравнения (10) с условиями (12) и (13) решаются относительно  $N_+$ ,  $N_e$  и  $N_-$  явным КР методом первого порядка [5].

*Пример.* Результаты моделирования ветвления катода направленного стримера получены при следующих условиях (12). Вектор напряженности внешнего однородного поля сонаправлен с координатной осью  $z$  (см. рис. 1), а его модуль равен  $E_0 = U/D$ . Неоднородности в начальном распределении электронов расположены в координатной плоскости  $xOz$ , т.е.  $y_1 = y_2 = 0$ , и имеют одинаковый размер, т.е.  $r_2 = r_1$ . Первая неоднородность, с которой начинается формирование первичного стримера, имеет на порядок большую амплитуду, чем вторая, инициирующая его ветвление, т.е.  $N_{\max 1}^0 = 10N_{\max 2}^0$ . Вторая неоднородность смещена

относительно первой на расстояние  $Dx$  вдоль оси  $x$  и на  $Dz$  вдоль оси  $z$ , т.е.  $x_2 = Dx$  и  $z_2 = z_1 + Dz$ . При этом  $z_1 \ll D$ , т.е. первичный стример развивается от нижнего положительного электрода к верхнему заземленному. Концентрация  $N_0$  частиц вне начальных неоднородностей мала, т.е.  $N_0 \ll N_{\max 1}^0$  и  $N_0 \ll N_{\max 2}^0$ .

В качестве характерного примера ниже представлены результаты, полученные для расчетной области с  $D = L_x = L_y = 0,15$  см,  $U = 12$  кВ,  $E_0 = 80$  кВ/см при  $z_1 = 0,03$  см,  $Dz = 0,04$  см (т.е.  $z_2 = 0,07$  см) и  $Dx = 0,030$  см (т.е.  $x_2 = 0,030$  см);  $N_0 = 10^5$  см<sup>-3</sup>,  $N_{\max 1}^0 = 10^{10}$  см<sup>-3</sup>,  $N_{\max 2}^0 = 10^9$  см<sup>-3</sup>,  $r_1 = r_2 = 0,01$  см. Шаг КР сетки  $h = 0,001$  см. Оптимальное значение коэффициента релаксации, определенное для начального распределения объемного заряда, т.е. при  $t = 0$ , составляет  $w^* = 1,94$ .

Вычисления проводились на персональном компьютере с процессором Intel Core 2 Duo T6600 с тактовой частотой 2,2 ГГц и установленной оперативной памятью объемом 3,0 ГБ. Он работал под управлением 32-разрядной операционной системы Windows 7 Домашняя базовая.

Прежде всего рассмотрим зависимость времени счета  $T_{сч}$ , которое затрачивается на получение численного решения системы дифференциальных уравнений (10) и (11) с условиями (12), и (2) для момента времени  $t$  от коэффициента релаксации  $w$ . На рис. 5 показаны кривые  $T_{сч}(w)$ , полученные для  $t = 0,75$  и  $0,90$  нс. Для больших  $t$  значение  $T_{сч}$  при  $w \approx 1$  и  $w \approx 2$  существенно превысило 24 часа, что затруднило расчет кривых  $T_{сч}(w)$  во всем диапазоне значений  $1 < w < 2$ .

Из графиков, показанных на рис. 5, видно, что обе полученные зависимости  $T_{сч}(w)$  имеют минимум при  $w \approx w^* = 1,94$ . Это подтверждает высказанное ранее соображение о слабой зависимости  $w^*$  от распределения объемного заряда в межэлектродном пространстве: за 0,15 нс, разделяющие два момента времени  $t$ , головки стримеров ощутимо перемещаются к катоду.

Вторая особенность зависимостей  $T_{сч}(w)$  заключается в увеличении с ростом  $t$  расхождения между  $T_{сч}(w^*)$  и  $T_{сч}(1)$ . Так, для  $t = 0,75$  нс  $T_{сч}(w^*) \approx 7,02$  ч,  $T_{сч}(1) \approx 11,15$  ч, а для  $t = 0,90$  нс  $T_{сч}(w^*) \approx 10,8$  ч,  $T_{сч}(1) \approx 20,3$  ч. Следовательно, при увеличении  $t$  с 0,75 до 0,90 нс отношение  $T_{сч}(1)/T_{сч}(w^*)$  увеличивается примерно с 1,59 до 1,88. При увеличении  $t$  еще на 0,15 нс оно превышает 3.

Таким образом, благодаря применению МВР время счета при  $w \approx w^*$  меньше в 2—3 раза (и бо-

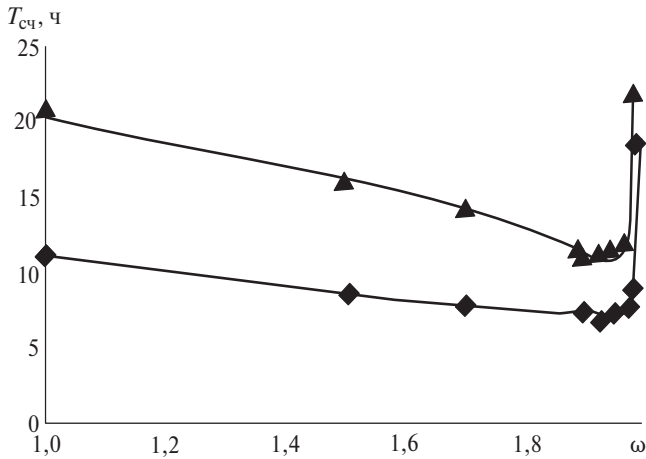


Рис. 5. Зависимость времени счета  $T_{сч}$ , затрачиваемого на получение результатов математического моделирования для момента времени  $t$ , от значения коэффициента релаксации  $w$ :  $\blacklozenge$  —  $t=0,75$  нс;  $\blacktriangle$  —  $0,90$  нс

лее) по сравнению со случаем  $w=1$  (что эквивалентно отсутствию релаксации), причем экономия времени растет с увеличением  $t$ , для которого вычисляется решение. Экономия меньше, чем можно было ожидать исходя из кривых  $N_{ит}(w)$  на рис. 2, поскольку время счета определяется вычислительными затратами на решение уравнения Пуассона и уравнений неразрывности. Последнее включает в себя расчет правых частей уравнений, а в них используются достаточно сложные аппроксимации зависимостей скорости реакций от напряженности поля [8], и потому их расчет требует значительного объема вычислений.

Вместе с тем, необходимо отметить, что уменьшение времени счета даже в 2,3 раза является весьма существенным. Дело в том, что  $T_{сч} \sim N^3$ , где  $N$  — число узлов конечно-разностной сетки. Поэтому при ее фиксированном шаге  $h$  значения  $T_{сч}$  варьируются от нескольких часов для коротких промежутков длиной 0,1, 0,2 см до сотен часов для промежутков около 1 см.

Теперь кратко охарактеризуем результаты трехмерного моделирования разряда.

На рис. 6 виден сформировавшийся разветвленный катодонаправленный стример, распространяющийся снизу вверх. Просматриваются каналы первичного стримера (слева) и его ветви (справа), в которых по сравнению с окружающим пространством снижена напряженность поля (рис. 6,а), а вблизи их осей концентрируются электроны (рис. 6,б). Выделяются две стримерные головки, перед которыми поле усилено, а позади — резко ослаблено (рис. 6,а). Максимальная напряженность поля в головке ветви достигает » 220 кВ/см, а минимальная в ее канале » 20 кВ/см. Наибольшее значение концентрации электронов близко к  $5,2 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ .

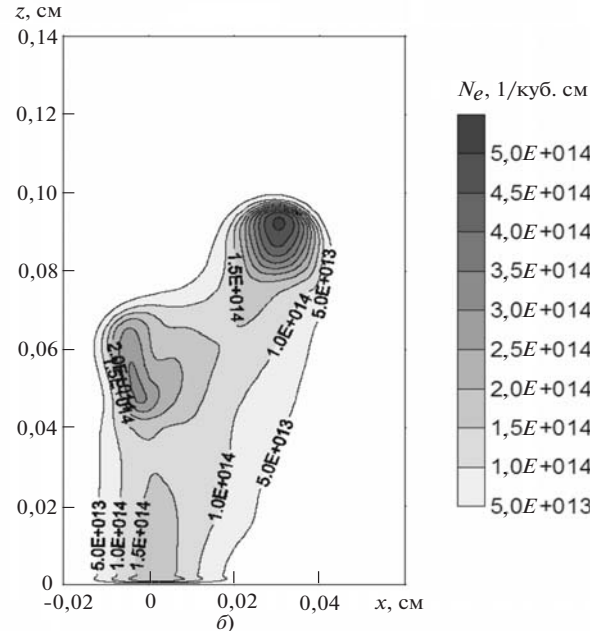
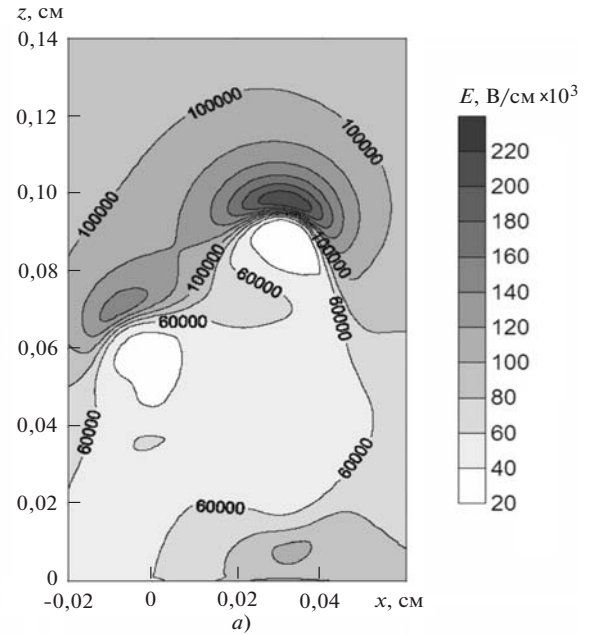


Рис. 6. Расчётные распределения  $E(x,z)$  (а) и  $N_e(x,z)$  (б) в момент  $t = 0,85$  нс в координатной плоскости  $xOz$  рис. 1 (результаты моделирования ветвления стримера при  $Dz = 0,04$  см,  $Dx = 0,03$  см в поле с  $E_0 = 80$  кВ/см)

Приведенные данные о распределениях напряженности поля и концентрации электронов, об их наибольших значениях хорошо согласуются с расчетными и экспериментальными данными, полученными другими авторами (см., например, [9]). Это подтверждает корректность примененной математической модели стримерного разряда и выполненных расчетов.

**Выводы.** 1. Использование метода верхней релаксации требует предварительного исследования зависимости числа итераций, требующихся для выполнения условий сходимости (7), от коэффициента релаксации  $w$  на предмет отыскания минимизи-

рующего ее оптимального значения  $w^*$ . При расчете трехмерного поля значение  $w^*$  лежит в пределах  $1,9 < w^* < 2,0$ . Затраты машинного времени на решение уравнения Пуассона при  $w = w^*$  сокращаются на 1,2 порядка по сравнению со случаем  $w = 1$ .

2. Оптимальное значение  $w^*$  слабо зависит от распределения объемного заряда в межэлектродном пространстве. Это позволяет однажды определить его, впоследствии сохраняя неизменным на последующих итерациях совместного решения уравнений разряда, несмотря на то, что в процессе развития разряда распределение объемного заряда существенно изменяется.

3. Погрешности расчета поля зависят от отношения геометрических параметров, определяющих неоднородность поля, к шагу КР сетки. Чтобы снизить погрешности в значениях напряженности поля до 2%, нужно, чтобы это отношение было не меньше 10, а до 1% — не менее 20.

4. Метод верхней релаксации можно применять для решения уравнения Пуассона в трехмерной математической модели стримерного разряда в воздухе, при этом сокращаются суммарные затраты машинного времени (в 2—3 раза) на получение результатов моделирования по сравнению со случаем итерационного КР решения уравнения Пуассона без релаксации. Чем длиннее разрядный промежуток и чем глубже в него продвигается стример, тем больше экономия времени.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белогловский А.А. Трехмерное математическое моделирование стримерного разряда в воздухе: проблемы и пути их решения. — Электричество, 2011, № 3.

2. Пашинин И.В. Усовершенствование методов расчета поля и движения частиц в задачах импульсной стримерной короны: Дис. ... канд. техн. наук. — М.: МЭИ (ТУ), 2007.

3. Павленко А.М., Белогловский А.А. Об экономичной методике расчета самосогласованных электрических полей с объемным зарядом. — Электричество, 2009, № 5.

4. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле. — М.: Высшая школа, 1978.

5. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.

6. Карасева Д.В., Белогловский А.А. Расчет трехмерных электрических полей методом верхних релаксаций. — Тезисы докладов Семнадцатой МНТК студентов и аспирантов «Радиоэлектроника, электротехника и энергетика». — М.: Издат. дом МЭИ, 2011, т. 3.

7. Gallimberti I. The mechanism of the long spark formation. — Journal de physique: Colloque C7, 1979, vol. 40, № 7.

8. Соколова М.В., Сергеев Ю.Г. Обобщенные данные по коэффициентам элементарных процессов разрядов в газе. Теория и практика электрических разрядов в энергетике/Под ред. А.Ф. Дьякова. — Пятигорск: Изд-во ЮЦПК РП «Южэнерготехнадзор», 1997.

9. Kulikovskiy A.A. Positive streamer between parallel plate electrodes in atmospheric pressure air. — J. Phys. D: Appl. Phys., 1997, vol. 30.

*А в т о р ы: Белогловский Андрей Анатольевич окончил электроэнергетический факультет (ЭЭФ, ныне Институт электроэнергетики) Московского энергетического института (МЭИ) в 1989 г. В 1994 г. защитил кандидатскую диссертацию «Разработка метода расчета электрического поля коронного разряда в системах электродов сложной конфигурации» в МЭИ. Доцент кафедры техники и электрофизики высоких напряжений (ТЭВН) МЭИ.*

*Верещагин Игорь Петрович окончил ЭЭФ МЭИ в 1955 г. В 1975 г. защитил докторскую диссертацию «Методы расчета электрического поля и поведения частиц при униполярном коронном разряде» в МЭИ. Профессор кафедры ТЭВН МЭИ.*