

Статистические характеристики частоты узкополосного случайного процесса

РАБИНОВИЧ М.А.

Рассматривается импульсная (переключательная) модель измерений частоты суммы синусоидального сигнала и аддитивного гауссова шума. Приведены основные статистические характеристики (спектральная плотность мощности, распределение аномальных выбросов по длительности и т. д.) случайных колебаний частоты. Частота такого процесса, называемого узкополосным, имеет ряд характерных особенностей, которые обычно не учитываются в задачах электроэнергетики. Дана оценка их влияния на точность измерения частоты в том числе при ее отклонении от номинального значения. Отмечается аналогия в процессах поведения фазы в системах связи и электроэнергетических системах. Приведен простой алгоритм повышения точности измерений частоты.

Ключевые слова: энергосистема, частота, помеха, производная фазы, ошибка измерений, спектральная плотность, скачки фазы

Важный для электроэнергетики класс случайных процессов представляет собой сумму синусоидального сигнала и стационарного случайного шума с нормальным распределением и заданной спектральной плотностью. На практике параметры синусоидального сигнала наблюдают на фоне помех. По существу, все непосредственные измерения тока, напряжения и частоты в сети относятся к этому классу процессов. Этим определяется постоянный интерес к изучению статистических свойств синусоидального сигнала на фоне аддитивного шума. Такие процессы, у которых полоса частот значительно меньше частоты синусоидального процесса, обычно называют узкополосными. Их свойства традиционно используют в задачах релейной защиты (РЗ) и противоаварийной автоматики (ПА), измерительной техники, системах передачи информации и вторичного регулирования частоты в энергообъединениях и т.д.

Отметим, что узкополосный процесс при измерении частоты формируется не только за счет помех измерения, но и за счет естественных флуктуаций нагрузки и генерации в узлах сети, а также переключений коммутационных аппаратов. Все эти возмущения режима вызывают малые отклонения частоты. Отделить влияние режимных флуктуаций частоты от шума измерений достаточно сложно, но и не нужно. И те и другие виды искажений приводят к ошибкам в измерениях частоты. В сложной физической системе, каким является энергообъединение, с множеством источников синусоидальных процессов и множеством помех колебания, частота в узлах сети формируется как результат взаимодействия их всех. Как правило, эти процессы не являются узкополосными. При выполнении

измерений выполняется обработка этих процессов, которая переводит их в разряд узкополосных.

Узкополосные процессы имеют ясную физическую природу. Измерениям параметров синусоидального процесса всегда предшествует его фильтрация узкополосным фильтром, для того чтобы минимизировать помеху, которая искажает измеряемые параметры. Узкополосный фильтр убирает те спектральные компоненты суммы синусоидального процесса и помехи, которые лежат вне полосы пропускания входного фильтра.

Особый интерес к характеристикам синусоидального сигнала на фоне аддитивного гауссова шума проявился в связи с широким распространением синхронизированных измерений модулей и фаз векторных узловых напряжений и токов (phasor measurement units – PMU измерений). Обычно предполагается, что эти измерения выполняются с очень высокой точностью и они могут непосредственно применяться в технологических задачах (оценки состояния (ОС), РЗ и ПА и т.д.). К сожалению, это не всегда так. Измерения параметров синусоидальных процессов практически всегда сопровождаются помехами (систематическими и случайными). Одной из основных задач статьи является оценка спектральной плотности частоты узкополосного процесса для правильной оценки уровня помех в измерениях частоты. Знание характерных особенностей помех при измерениях частоты позволяет значительно снизить их влияние на точность измерений. При этом природа возникновения колебаний частоты (режимные отклонения или помехи измерений) не имеет решающего значения.

Таким образом, рассматривается задача оценки статистических характеристик частоты синусои-

дальнего сигнала на фоне аддитивного гауссова шума. Основной вклад в изучение этих процессов внесли авторы [1–8 и другие].

Изучением статистических характеристик частоты узкополосных процессов в радиотехнике занимаются давно [4–9] и успешно, а аналогичным процессам в задачах электроэнергетики уделяют недостаточно внимания, хотя и те и другие имеют подобные характеристики, поскольку подчиняются одним и тем же законам физики. Это, главным образом, спектральные свойства колебаний частоты суммы синусоидального процесса и гауссова шума, среднее число аномальных выбросов частоты и распределение их по длительности. Обобщение этих вопросов, а также расширение результатов [1, 8] на спектральную плотность процессов с ненулевой частотой является целью статьи. Полное аналитическое решение этой задачи весьма трудоемко, поэтому окончательные результаты представлены в виде графиков энергетического спектра, найденных методами численного интегрирования.

Спектральные характеристики узкополосных случайных процессов необходимы для оценки точности измерений частоты, разработки методов повышения точности измерений, систем РМУ, алгоритмов вторичного регулирования частоты и мощности (АРЧМ) и в задачах РЗ и ПА.

Далее будем различать понятие частоты как производной фазы узкополосного случайного процесса и понятие частоты в спектральном разложении этого параметра (в спектре Фурье, энергетическом спектре и т. д.).

Работы по нахождению корреляционной функции и энергетического спектра производной фазы (частоты) узкополосного процесса развивались в направлении разработки упрощенных моделей шума в измерениях, учитывающих влияние отклонения частоты измеряемого процесса от номинальной (50 Гц). Наиболее известная из них – импульсная модель шума Райса [1], основанная на приближенном выражении для энергетического спектра производной фазы на нулевой частоте спектральной плотности (которая и определяет, главным образом, точность измерения частоты, если принять во внимание действие фильтра нижних частот в измерительном устройстве).

Определение частоты. Строгое определение частоты некоторого сигнала как производной фазы узкополосного процесса применяется, в основном, в теоретических исследованиях. Другие определения частоты (например, как среднее число периодов в единицу времени переменного тока) широко применяются в технических приложениях. Все сигналы ограничены по времени и, кроме того, форма

сигнала (например, переменного тока) содержит искажения, возникающие из-за процессов коммутации в сети, нелинейности нагрузки и основного оборудования, а также других факторов. При измерениях на все процессы накладываются аддитивные и мультипликативные помехи, шумы квантования по времени и по уровню и другие виды помех. Все эти и другие виды искажений синусоидального процесса приводят к ошибкам в оценках его параметров.

Для строго периодического процесса частота обычно определяется как величина, обратная его периоду. Однако строго периодических процессов в природе не бывает (хотя бы из-за их ограниченности во времени).

Обычно под частотой переменного тока понимают число его периодов в единицу времени. Однако этот параметр может меняться во времени. Кроме того, при таком определении сложно измерить частоту на интервале времени менее периода (или полупериода). Иногда под частотой переменного тока понимают частоту его основной гармоники в спектральном представлении. В этом случае при спектральном разложении необходимо правильно выбрать интервал времени для анализа, т.е. по существу заранее знать период анализируемого процесса.

Безусловным достоинством указанных определений частоты является их привычность, интуитивная понятность и простота практической реализации соответствующих измерителей. Основной недостаток – возможность измерений только средних значений частоты на некотором интервале времени.

Среди методов измерения частоты по числу периодов (или полупериодов) необходимо указать следующие:

измерение числа пересечений напряжением нулевого уровня N в единицу времени; если единицей времени служит секунда, то приближенное значение частоты $f = N/2$;

измерение некоторого полного числа пересечений напряжением нулевого уровня в течение интервала времени T и затем определение значения частоты по выражению $f = N/2T$.

Эти два метода отличаются тем, что в первом из них в единицу времени может поместиться неполное число периодов сигнала и это приведет к дополнительной ошибке в оценке частоты. Во втором методе замеряется время T полного числа периодов (или пересечений процессом нулевого значения).

Другое определение частоты переменного тока, наиболее часто применяемое в технических приложениях, связывают с разложением наблюдаемого сигнала в ряд (или интеграл) Фурье. Под частотой

переменного тока понимают частоту основной (обычно максимальной) гармоники в разложении сигнала в ряд Фурье. При этом разложение сигнала в ряд Фурье выполняется на интервале основной частоты (или на кратном интервале). Но такое определение заранее предполагает известную частоту переменного тока, поскольку длительность интервала разложения в ряд кратна периоду основной частоты. Такое определение неправомерно для интервалов времени менее одного периода основной частоты переменного тока. Кроме теоретического интереса к вопросу о понятии частоты для коротких сигналов, на практике встречается ряд задач в системах ПА, характеризующихся достаточно малыми интервалами времени.

Для увеличения точности определения частоты методом разложения в ряд Фурье необходимо увеличивать интервал разложения наблюдаемого процесса. Но в этом случае можно оценить среднее значение частоты на интервале разложения; также несколько гармоник могут оказаться максимальными одновременно, и какая из них определяет значение частоты, определить невозможно. Таким образом, метод определения частоты посредством разложения сигнала в ряд Фурье имеет следующие недостатки:

- оценка частоты зависит от выбранного интервала разложения сигнала в ряд Фурье;

- не решается проблема определения частоты для коротких сигналов (менее одного периода основной частоты);

- практически невозможно выполнить теоретический анализ таких процессов;

- большие затраты времени на вычисление дискретного преобразования Фурье.

В некоторой степени указанные проблемы можно решить, используя интеграл Фурье вместо ряда Фурье или алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ). В этом случае частотой рассматриваемого сигнала можно назвать значение частоты максимального коэффициента Фурье. Однако вычисление (тем более в темпе реального времени) интеграла Фурье требует огромных вычислительных затрат. Даже при нынешнем состоянии вычислительной техники это сложная задача. И, наконец, в теории сигналов [10–12] известно, что встречающийся в технических приложениях (электроэнергетика, радиотехника, связь, медицина и т.д.) случайный процесс может быть представлен в виде

$$x(t) = R(t)\cos(\omega_0 t + Y(t)), \quad (1)$$

где $R(t)$, $Y(t)$ – огибающая и фаза сигнала соответственно; $\omega_0 = 2\pi f_0$ – несущая круговая частота процесса $x(t)$ (в электроэнергетике – это обычно час-

тота переменного тока, а в радиотехнике и теории связи – несущая частота сигнала в канале связи).

Практически любой сигнал в электротехнике и радиотехнике можно представить выражением (1). Известным свойством такого представления сигналов в электротехнических приложениях (т.е. для узкополосных сигналов) является то, что их огибающая и фаза оказываются медленными по сравнению с ω_0 -функциями. Что касается произвольных сигналов (например при коммутациях в сети), то выражение (1) справедливо и для них, однако огибающая и фаза в этих случаях могут быть произвольными функциями (а не только медленными).

Используя представление сигнала в виде (1), можно дать математически корректное определение круговой частоты $\omega(t)$ сигнала $x(t)$ в виде производной полной фазы, т.е.

$$\omega(t) = \omega_0 + Y'(t). \quad (2)$$

Напомним, что круговая частота ω отличается от общепринятой f множителем 2π . Таким образом, круговая частота узкополосного процесса $x(t)$ представляет собой сумму несущей частоты $\omega_0 = 2\pi f_0$ и производной фазы $Y'(t)$. В случае переменного тока несущая частота $f_0 = 50$ Гц, а производная фазы $Y'(t)$ представляет собой отклонение круговой частоты ω от номинального значения. Поскольку в практических задачах основной интерес представляют характеристики отклонения частоты от номинального значения, то достаточно изучать поведение производной фазы $Y'(t)$. Преимущества определения частоты в виде производной фазы сигнала очевидны:

- корректность определения частоты для любого времени (даже менее одного периода) наблюдения сигнала;

- то же для любого (а не только узкополосного) сигнала;

- возможность учета изменений частоты во времени;

- возможность применения понятия частоты в теоретических исследованиях.

К недостаткам приведенного определения относятся трудности в непосредственном измерении частоты согласно (2). Как указано ранее, в большинстве случаев частоту измеряют с помощью подсчета числа импульсов от кварцевого генератора между пересечением нулей измеряемого процесса. Существуют также альтернативные методы измерения частоты частотными или фазовыми дискриминаторами, которые также имеют свои достоинства и недостатки.

Даже при нормальном функционировании электроэнергетической системы (ЭЭС) в спек-

тральных составляющих режимных параметров (в первую очередь напряжения) возникают кроме основной частоты, близкой в условиях России к 50 Гц, другие спектральные компоненты, состав и мощность которых существенно зависят от текущего режима. Это явление иногда называют несинусоидальностью параметра режима, что, конечно же, неверно (поскольку практически любой процесс, получаемый в физической системе, можно представить интегралом Фурье или в отдельных случаях рядом Фурье), и, следовательно, он содержит множество синусоидальных компонент. Под этим явлением обычно понимают наличие множества спектральных составляющих в представлении рассматриваемого режимного параметра. Далее также будем применять термин «несинусоидальный», понимая под ним сложный спектральный состав параметров режима ЭЭС и энергообъединений.

Наличие несинусоидальности вызвано рядом причин:

изменениями основной частоты ЭЭС, вызванные небалансами мощности в узлах сети;

аддитивными помехами, действующими в каналах связи;

нелинейностью нагрузок в сети;

нелинейностью основного оборудования ЭЭС;

бросками напряжения импульсного типа, вызванного включением (отключением) основного оборудования, систем РЗ и ПА;

изменениями (модуляцией) основной частоты, вызванными системами первичного регулирования частоты на электростанциях, а также системами АРЧМ.

Приведенное относится к так называемому одночастотному режиму работы энергообъединения, т.е. его работе с единственной общей частотой во всех узлах сети. При этом пренебрегаем малыми колебаниями частоты, вызванными изменениями нормального режима. Однако существуют аварийные режимы, в результате которых возникают многочастотные режимы в разных частях энергообъединения. Обычно эти режимы сопровождаются асинхронным режимом работы энергообъединения и значительными возмущениями в сети. В этом многочастотном случае рассматриваемые процессы не являются узкополосными в указанном ранее смысле. Таким образом, приведенные далее результаты относятся только к узлам сети с единой частотой, т.е. находящимся в одночастотном нормальном режиме.

При делении энергообъединения на части, работающие отдельно, выводы об узкополосных процессах применимы к каждой из частей объединения. Эти части не влияют друг на друга и могут

рассматриваться отдельно. Результаты одночастотного режима полностью применимы для каждой отдельной синхронной части сети. Рассмотрим далее некоторые особенности поведения узкополосных сигналов.

Переключательная модель случайных колебаний частоты суммы синусоидального сигнала и гауссова шума. Рассмотрим сумму модулированного по частоте сигнала и гауссова шума (см. рис. 1, а, где по осям ординат и абсцисс отложены действительная и мнимая составляющие комплексной амплитуды соответственно):

$$x(t) = Q \cos(\omega_0 t + F(t)) + n(t) = R(t) \cos[\omega_0 t + F(t) + Y(t)], \quad (3)$$

где Q – амплитуда модулированного по частоте сигнала; $\omega_0 = 2\pi f_0$ – его несущая круговая частота; $F(t)$ – передаваемое сообщение при модуляции сигнала по фазе и $F(t)$ – передаваемое сообщение при модуляции сигнала по частоте; $R(t)$ – огибающая суммы сигнала и шума; $Y(t)$ – фазовая ошибка (ошибка производной фазы $Y(t) = u(t)$ называется случайными колебаниями частоты).

От исходного выражения (3) отличается учетом отклонения частоты $F(t)$ от номинального значения ω_0 .

При дальнейшем рассмотрении безразличен вид модуляции сигнала, но для определенности рассматриваются случайные колебания частоты в $x(t)$.

Основным параметром, характеризующим сумму $x(t)$ модулированного по частоте сигнала $Q \cos(\omega_0 t + F(t))$ и гауссова шума $n(t)$, является отношение мощности синусоидального процесса к мощности шума $\gamma = Q^2 / 2s_n^2$ [1, 3]. Этот параметр

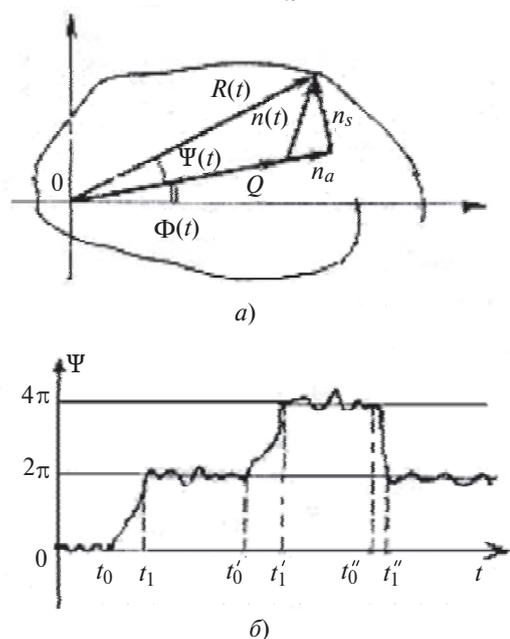


Рис. 1. Векторная диаграмма (а) и фазовая траектория (б) узкополосного случайного процесса

характеризует отклонение реального процесса $x(t)$ от идеальной синусоиды. Область значений γ , близких к 1, называют пороговой. В надпороговой области $\gamma \gg 1$ вероятность переходов фазы между уровнями $\pm 2\pi$ крайне мала (практически таких переходов нет). В подпороговой области ($\gamma \ll 1$), напротив, переходы фазы случаются достаточно часто. Далее показано, что переходы фазы между уровнями $\pm 2\pi$ приводят к значительному (на несколько порядков) снижению точности измерения частоты.

Как упоминалось, представление (3) отличается тем, что практически в большинстве случаев в электроэнергетике и радиотехнике рассматриваются узкополосные процессы (относительно несущей частоты ω_0), и в этих случаях огибающая $R(t)$ и фаза $Y(t)$ являются медленными по сравнению с ω_0 -функциями времени. При этом изучение поведения быстрого процесса $x(t)$ можно заменить изучением более медленных огибающей $R(t)$ и фазы $Y(t)$ (что можно выполнить значительно проще).

Отметим, что узкополосные процессы возникают на практике в процессе измерений параметров фазы, частоты и амплитуды, когда на входе измерительного устройства стоит узкополосный полосовой фильтр для снижения уровня помех. При воздействии на основной процесс (1) помехи $n(t)$ вектор $R(t)e^{iY(t)}$, как правило, флуктуирует (см. рис. 1,а) в области конца вектора амплитуды полезного сигнала, но может совершать и полный оборот вокруг начала координат, в результате чего фаза $Y(t)$ меняется на $\pm 2\pi$. При этом производную фазовой ошибки $\dot{Y}(t)$, которая имеет вид импульса площадью 2π , называют аномальным выбросом частоты. Типичная траектория фазовой ошибки $Y(t)$ приведена на рис. 1,б, где начало и конец аномального выброса отмечены точками t_0 и t_1 . При больших значениях $\gamma \gg 1$ случайные колебания частоты имеют нормальное распределение и малую интенсивность. Аномальные выбросы частоты происходят крайне редко (см. далее). Шум в измерениях частоты как бы переключается с малого (нормального) на большой (аномальный) в моменты перехода фазы между уровнями $\pm 2\pi$.

Примером из электроэнергетики может служить взаимодействие двух узлов с генерацией, объединенных слабой связью. Моделирование этой системы в динамике с очень слабой связью при случайных колебаниях нагрузки приводит к колебаниям фаз и частоты напряжений узлов, напоминающих соответствующие колебания в каналах связи (см. рис. 1,б). Временная потеря синхронизма в этом случае является аналогом аномальных выбросов частоты в системах связи.

Строго говоря, такой режим нельзя назвать односторонним, поскольку во время переходов фазы на $\pm 2\pi$ частоту энергообъединения нельзя считать единой. Тем не менее, переключательная модель поведения частоты позволяет рассмотреть этот случай. Переходы фазы в отдельных узлах сети в нормальном режиме происходят достаточно редко, и поэтому их можно считать неперекрывающимися.

Важнейшая статистическая характеристика случайного процесса — его энергетический спектр. Наиболее распространенные в настоящее время статистические модели суммы синусоидального сигнала и гауссова шума удовлетворительно описывают энергетический спектр колебаний частоты только вблизи области порога (и выше). Напомним, что надпороговой областью называют такую область, где наблюдается гауссовый (нормальный) характер поведения колебаний частоты под воздействием аддитивного шума. Это только малые колебания частоты, которые имеют нормальное распределение.

Наибольший интерес представляет подпороговая область поведения случайных колебаний частоты, где кроме нормальных колебаний возникают аномальные помехи (при передаче информации) или явления нарушения синхронной работы (при изучении поведения ЭЭС). Эти явления связаны с изменениями фазы результирующего вектора на $\pm 2\pi$. По существу, шум в оценке частоты переключается с нормального на импульсный в моменты перехода фазы на $\pm 2\pi$.

Экспериментальные значения энергетического спектра шума для глубоко подпороговой области входного отношения сигнал/шум γ плохо согласуются с теоретическими результатами, полученными из импульсной модели [8]. В дальнейшем (см. [1]) предложено представлять колебания частоты в виде выходного сигнала составного источника (так называемая «переключательная» модель шума). Далее проведен статистический анализ переключательной модели колебаний частоты в предположении, что рассматривается модулированный по частоте сигнал и аддитивный гауссов шум с энергетическим спектром, определяемым частотной характеристикой входного полосового фильтра.

Далее будем различать понятие частоты $u(t) = \omega_0 + F(t) + Y(t)$ узкополосного процесса и понятие частоты f как аргумента в спектральной плотности этого сигнала. Представим случайные колебания частоты в виде суммы двух статистически независимых составляющих [7, 8] гауссовой и импульсной:

$$u(t) = h(t) + p(t) = a(t)h_0(t) + [1 - a(t)]p_0(t), \quad (4)$$

где $h_0(t)$ и $p_0(t)$ – порождающие процессы для гауссовой и импульсной составляющих шума соответственно; $a(t)$ – независимый от них переключаемый (точечный) случайный процесс:

$$a(t) = \begin{cases} 1 & \text{при гауссовой составляющей колебаний} \\ 0 & \text{астоты;} \\ 0 & \text{при импульсной.} \end{cases}$$

Энергетический спектр шума $j(f)$ запишем в виде

$$S_u(f) = S_p(f) + 2S_{hp}(f) + S_h(f), \quad (5)$$

где $S_h(f)$ и $S_p(f)$ – энергетические спектры гауссовой и импульсной составляющих шума; $S_{hp}(f)$ – их взаимный энергетический спектр.

Энергетический спектр импульсной составляющей шума в первом приближении находим по известной формуле [1]:

$$S_p(f) = 4\rho^2(N_+ + N_-) \text{ при } -\pi < f < \pi, \quad (6)$$

где N_{\pm} – среднее число скачков фазы суммы узкополосного процесса на $\pm 2\pi$ соответственно.

Последнее выражение предполагает, что спектр импульсной составляющей равномерный и с учетом независимости возникновения импульсов представляет собой сумму спектров от всех импульсов. Равномерность спектра импульсной составляющей определяется малой длительностью аномальных выбросов.

Полагаем, что гауссова составляющая колебаний частоты действует в те отрезки времени, когда вектор суммы принимаемого сигнала и шума попадает в круг радиуса Q с центром в точке 0 (рис. 1,а). Можно показать [6–8], что в этом случае среднее значение переключаемого процесса

$$a_0(r) = 1 - e^{-r}. \quad (7)$$

В [7] получена спектральная плотность колебаний частоты узкополосного сигнала по переключаемой модели в виде

$$S_u(f) = 4\rho^2(N_+ + N_-) + \frac{(1 - e^{-r})}{2r} (2\rho f)^2 S_{вх}(f + f_c) - 2(2\rho)^2 (1 - e^{-r}) f b_1 S_{вх}(f + f_c) \quad (8)$$

при $-\pi < f < \pi$.

Из (8) следует, что кроме параболического спектра, характерного для колебаний частоты при ее малых (гауссовых) колебаниях и равномерного спектра импульсной составляющей сигнала существует еще слагаемое с линейной функцией частоты, возникающее вследствие взаимной корреляции гауссовой и импульсной составляющих шума. От-

метим, что третье слагаемое отлично от нуля только при наличии модулирующего сигнала (т.е. при отклонении частоты от номинального значения). Эти теоретические результаты получены для упрощенной (переключательной) модели колебаний частоты.

На рис. 2 приведены теоретические и экспериментальные результаты для прямоугольного спектра помехи. Точками отмечены экспериментальные значения энергетического спектра случайных колебаний частоты при постоянной расстройке основной частотной составляющей процесса относительно частоты симметрии входного прямоугольного

$$\text{фильтра } \left. \frac{Df}{Df_{вх}} \right|_0 = 0,25 \frac{\Delta f}{\Delta f_{вх}}$$

Штриховые линии на рис. 2 соответствуют значению, определяемому импульсной моделью [1] (с учетом подавления гауссовой составляющей шума).

Выражение (8) для энергетического спектра при постоянном отклонении частоты от номинального значения можно использовать для оценки энергетического спектра колебаний частоты при медленно изменяющемся отклонении с плотностью распределения $w(b_1)$. Считаем, что при наличии модуляции энергетический спектр $S_M(f)$ этих колебаний является суперпозицией спектров при различных расстройках, взятых с их вероятностями:

$$S_M(f) = \int_{-\pi}^{\pi} S_{и}(f/b_1) w(b_1) db_1,$$

где $S_{и}(f/b_1)$ вычисляется по (8).

В результате вычислений (см. Приложение) находим при $|f| \ll 1$:

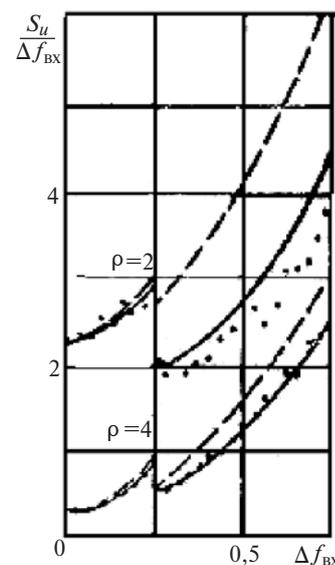


Рис. 2. Оценки спектральной плотности колебаний частоты для значений нормированной расстройки $l = 0,25$; $r = 2$ и 4 : $\times \times \times$ – эксперимент; — — предлагаемая теория 1, формула (8); - - - классическая теория

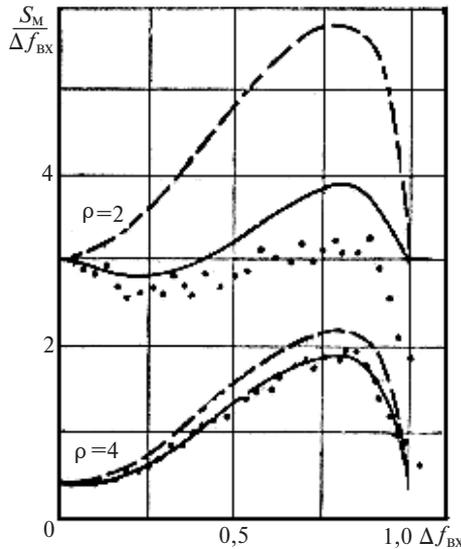


Рис. 3. Нормированная спектральная плотность колебаний частоты при ее синусоидальной модуляции: . . . – экспериментальные значения энергетического спектра; - - - – спектр, полученный по модели [1] с учетом подавления гауссовой составляющей шума; — – по (9)

$$S_M(f) = 4p^2(N_+ + N_-) + \frac{(1 - e^{-r})^2}{4pr} \cdot [p - 2\arcsin(-1 + 2|f|)](2p). \quad (9)$$

Рассмотрим в качестве примера синусоидальное изменение частоты с размахом $Df_{BX} / 2$. При таком процессе

$$w(l_1) = \frac{2}{p\sqrt{1 - (2l_1)^2}},$$

где $l_1 = -b_1 / Df_{BX}$.

Результаты теоретических и экспериментальных исследований для этого случая приведены на рис. 3.

Экспериментальные значения энергетического спектра в рассматриваемом случае найдены цифровым моделированием колебаний частоты узкополосного случайного процесса с использованием алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ) [14].

Таким образом, модернизированная переключаемая модель с учетом взаимной корреляции нормальной и импульсной составляющих шума является приближенной, но достаточно хорошо описывает энергетический спектр колебаний частоты узкополосного процесса до отношений сигнал/шум на его входе, близких к единице.

Полная модель случайных колебаний частоты суммы синусоидального сигнала и гауссова шума. Далее решается задача нахождения корреляционной функции и энергетического спектра производной фазы модулированного по частоте сигнала и аддитивного гауссова шума. Рассматривается простейшая модуляция частоты в виде ее постоянного

отклонения от номинального значения. Полное аналитическое решение этой задачи весьма трудно, поэтому окончательные результаты представлены в виде графиков энергетического спектра, найденных методами численного интегрирования.

Наиболее полно и строго корреляционная функция и энергетический спектр производной фазы (частоты) сигнала и аддитивного гауссова шума изучались в [3, 8]. Для частных случаев (при отсутствии модулирующего сигнала) получена корреляционная функция частоты в явном виде, позволившая найти энергетический спектр численными методами. Попытки воспользоваться этими результатами для оценки помехоустойчивости приема модулированных по частоте сигналов в гауссовом шуме показали значительное расхождение теоретических и экспериментальных данных, особенно в области малых значений отношения сигнал/шум.

В [9] для общего случая узкополосного процесса с отклонением частоты от номинального значения получено выражение корреляционной функции частоты (производной фазы) узкополосного случайного процесса в виде

$$R(t) = \frac{1}{2p} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} (g^n \cosh - h^n \sinh) \frac{e^{-D}}{L} + [\sin 2y (g \cosh + h \cosh)^2 + 2b_1 (h \cosh + g \sinh)] \frac{e^{-D} (1-D)^y}{L^2} dy dh, \quad (10)$$

где $D = (1 + \sin^2 y \cosh)r / 2L$;

$L = 1 + g \sin^2 y \cosh - h \sin^2 y \sinh$ (принимается $b_1 = 1$ и $r = Q^2 / 2b_0$).

В дальнейшем ограничимся модуляцией сигнала по частоте в виде постоянного отклонения от номинального значения (постоянной расстройки Df относительно частоты симметрии в энергетическом спектре входного гауссова шума):

$$w(f) = \frac{1}{s\sqrt{2p}} e^{-\frac{(f-f_0)^2}{2s^2}}. \quad (11)$$

Пусть также энергетический спектр шума $w(f)$ имеет гауссову форму, тогда

$$g(t) = e^{-2(pst)^2} \cos 2ptDf;$$

$$h(t) = e^{-2(pst)^2} \sin 2ptDf.$$

Для простоты полагаем $s = 1/p$, тогда после несложных вычислений получим:

$$b_0 = 1; \quad b_1 = 2pDf;$$

$$g \cosh - h \sinh = 2e^{-2t^2} [2t \cos 2pDft + pDft \sin 2pDft];$$

$$g_{\phi} = e^{-2t^2} \{ [16t^2 - 4 - (2pDf)^2] \cos 2pDft + 16Dfpt \sin 2pDft \};$$

$$h_{\phi} = 2e^{-2t^2} [2t \sin 2pDft - pDf \cos 2pDft];$$

$$h_{\phi} = e^{-2t^2} \{ [16t^2 - 4 - (2pDf)^2] \sin 2pDft - 16Dfpt \cos 2pDft \}.$$

Энергетический спектр производной фазы можно найти как преобразование Фурье ее корреляционной функции $R(t)$:

$$W(f) = 4 \int_0^{\infty} R(t) \cos 2pft dt. \quad (12)$$

Результаты численного интегрирования (10) и (12) представлены на рис. 4 для значений расстройки сигнала, равных $Df = 0$ и $Df = 0,25r$ в зависимости от ширины среднеквадратичной полосы частот гауссова шума и различных отношений сигнал/шум γ . На рис. 5 представлены значения спектральной плотности частоты узкополосного процесса $W(0)$ для четырех значений отклонений частоты $Df = 0; 0,25r; 0,5r$ и r в зависимости от отношения сигнал/шум γ .

Отметим, что спектральная плотность $W(0)$ для точной модели колебаний частоты (10) и (12) достаточно хорошо (1–2%) совпадает со значениями приближенной переключательной модели (8) и (9).

Еще раз подчеркнем важность оценки значений спектральной плотности частоты $W(0)$. Этот параметр определяет точность оценки производной фазы (частоты) в условиях действия помех и последующего его сглаживания фильтром низких частот. Отметим, что при отклонении частоты от номинального значения спектральная плотность производной фазы $W(0)$ значительно возрастает (см. рис. 5), т.е. при отклонении измеряемой частоты от номинального значения количество переходов фазы на $\pm 2\pi$ резко возрастает, что приводит к снижению точности ее измерений.

Распределение длительности аномальных выбросов частоты и нули гауссовского случайного процесса. Распределение аномальных выбросов частоты по длительности рассмотрено в [2]. Под длительностью аномального выброса (скачка фазы на $\pm 2\pi$) принимался отрезок времени, равный удвоенному времени изменения фазы $j(t)$ от $\pi/2$ до $3\pi/2$. При этих предположениях найдено приближение для плотности распределения скачков фазы на $\pm 2\pi$ по длительности. Подобные результаты получены и в [5], но там под длительностью аномального выброса понимается время изменения фазы $j(t)$ от $\pi/2$ до $3\pi/2$.

Далее под длительностью аномального выброса частоты понимается время изменения фазы узко-

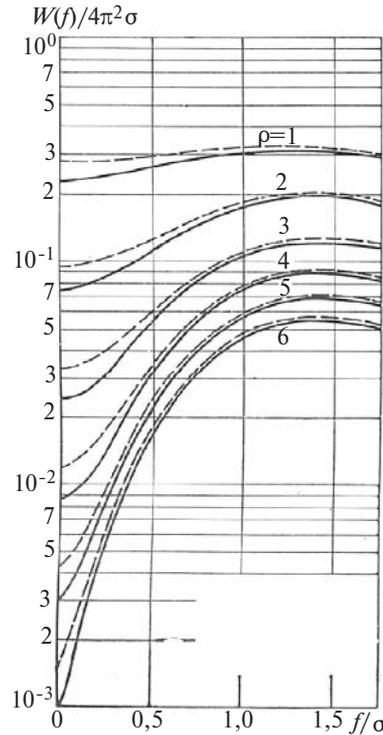


Рис. 4. Спектральная плотность производной фазы для гауссовой формы спектра шума: — $Df = 0$; - - - $Df = 0,25r$

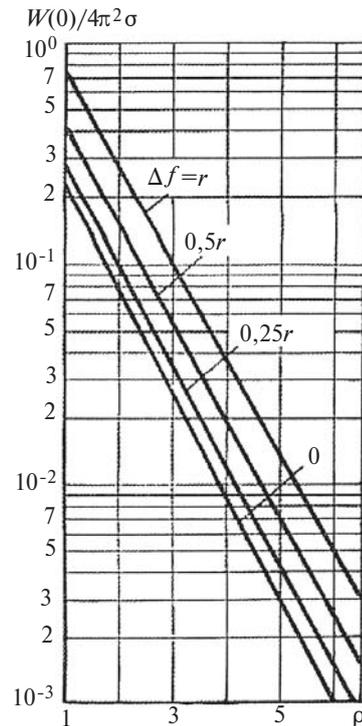


Рис. 5. Спектральная плотность колебаний частоты $W(0)/4\pi^2\sigma$ полосного процесса (3) на $\pm 2\pi$ (см. рис. 1,б). В [5] предполагается, что распределение аномальных выбросов частоты по длительности существенно зависит от распределения интервалов между нулями квадратурной составляющей шума и обращается внимание на его слабую зависимость от γ .

Плотность распределения интервалов между нулями гауссовского процесса. Рассмотрим плотность

распределения интервалов между ближайшими нулями гауссовского случайного процесса, производные в которых имеют одинаковый знак [5, 15]. Все приведенные далее результаты экспериментальной оценки $w(t)$ получены цифровым вероятностным моделированием гауссовских стационарных случайных процессов с прямоугольным энергетическим спектром в полосе частот $Df_{\text{ВХ}}$.

При исследовании случая симметричного относительно несущей частоты f_0 спектра шума и постоянной расстройки несущей частоты $l = Df / Df_{\text{ВХ}}$, где $Df = f_0 - f_c$ и f_c – основная частота процесса, считалось, что спектр исследуемого гауссовского процесса равномерен в полосе частот от $-\frac{Df_{\text{ВХ}}}{2}(1-2l)$ до $\frac{Df_{\text{ВХ}}}{2}(1+2l)$. Последовательность случайных чисел с гауссовским распределением и прямоугольным спектром формировалась своими коэффициентами Фурье в частотной области [14]. Длительность реализации – около 10^5 отсчетов, что составило приблизительно $2,5 \times 10^4$ некоррелированных отсчетов. Длительность t нормирована по $Df_{\text{ВХ}}$.

На рис. 6 представлены оценки плотности распределения $w(t)$ для значений нормированной расстройки $l = 0; 0,25; 0,5$ и $r = 2$. С возрастанием значений l распределение $w(t)$ приобретает все более ярко выраженный многомодовый характер, причем локальные максимумы быстро убывают с увеличением t . Временное положение абсолютного макси-

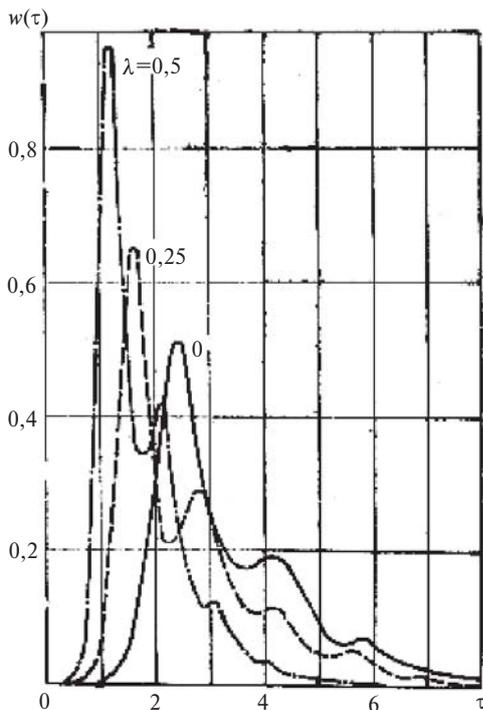


Рис. 6. Оценки плотности распределения длительности аномальных выбросов частоты для разных значений нормированной расстройки l и $r = 2$

муму $w(t)$ определяется выражением $t \approx \frac{4}{\sqrt{3}Df_{\text{ВХ}}(1+2|l|)}$. Соседние локальные максимумы

$w(t)$ разделены временным интервалом

$$Dt \approx \frac{2}{\sqrt{3}Df_{\text{ВХ}}(1+2|l|)}$$

Таким образом, распределение длительности $w(t)$ существенно зависит от значений расстройки l , т.е. от отклонения несущей частоты от средней частоты формирующего фильтра.

Мы оценили путем цифрового моделирования методом статистических испытаний (Монте-Карло) некоторые характеристики длительности интервалов времени между ближайшими нулями гауссовского случайного процесса, производные в которых имеют одинаковый знак. Далее будет показано, что теоретическая модель распределения длительности аномальных выбросов частоты хорошо аппроксимирует приведенные экспериментальные результаты.

Распределение аномальных выбросов частоты по длительности. Обозначим длительность скачка фазы на $\pm 2\pi$ через $t = t_1 - t_0$. Скачок фазы $j(t)$ на $\pm 2\pi$ начинается и заканчивается в моменты времени t_0 и t_1 соответственно, когда квадратурная составляющая шума $n_s(t)$ пересекает нулевой уровень с производной одинакового знака, причем все промежуточные нули $n_s(t)$ имеют место при условии

$$n_s(t) + Q \neq 0 \text{ для } t_0 < t < t_1. \quad (13)$$

В первом приближении для малых t можно предположить, что при скачке фазы на $\pm 2\pi$ имеется только один промежуточный нуль процесса $n_s(t)$, проходящий при условии (13). Дальнейшее приближение состоит в аппроксимации плотности распределения длительности аномальных выбросов частоты для малых t дифференциальной вероятностью $P(t,0)$ пересечений нулевого уровня квадратурной составляющей шума $n_s(t)$ с положительной производной в момент времени $t_0 + t$ при условии, что в момент времени t_0 пересечение нулевого уровня происходило также с положительной производной [15]:

$$P(t,0) = \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty \dot{n}_1 \dot{n}_2 w_4(0, y_1, 0, y_2) dy_1 dy_2}{\int_0^\infty \dot{n} w_2(0, y) dy}$$

где $w_2(x, y)$ – плотность распределения процесса $n_s(t)$ и его производной в один и тот же момент времени; $w_4(x_1, y_1, x_2, y_2)$ – совместная плотность распределения значений процесса $n_s(t)$ и его про-

изводной в моменты времени t_0 и $t_0 + t$ соответственно.

Вычислив интегралы, получим

$$P(t,0) = \frac{\sqrt{-R\phi(0)} D_{33} \sqrt{1-r^2}}{2\rho (1-r^2)^{3/2}} (1 - \text{Harcctg}H), \quad (14)$$

где $R(t)$ – нормированная корреляционная функция гауссовского случайного процесса;

$$D_{33} = 1 - R^2 - R_1^2; \quad r = \frac{D_{34}}{D_{33}}; \quad D_{34} = RR_1^2 - R_2(1 - R^2);$$

$$R_1 = \frac{R\phi(t)}{\sqrt{-R\phi(0)}}; \quad R_2 = \frac{R\phi(t)}{R\phi(0)}; \quad H = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}.$$

Для малых t , разлагая $R(t)$ в ряд Тейлора, легко показать, что $P(t,0) \approx \text{const}^4$.

Сравнение теоретических и экспериментальных результатов. На рис. 7 сравниваются (полученные цифровым моделированием) плотность распределения $w(t)$ и оценки плотности распределения скачков фазы на $\pm 2\rho$ по длительности для $l = 0$. Из рис. 7 видно, что плотность распределения $w(t)$ хорошо аппроксимирует плотность распределения скачков фазы на $\pm 2\rho$. Там же показана дифференциальная вероятность $P(t,0)$, практически совпадающая с экспериментальными результатами для $t \in 3,5$. Полученные экспериментальные результаты и их сравнение с теоретическими для ненулевой расстройки $l = 0,25; 0,5$ имеют аналогичный характер.

Таким образом, из приведенных результатов следует, что плотность распределения длительности аномальных выбросов частоты подчиняется закону, близкому к закону плотности распределения интервалов времени между ближайшими нулями гауссова шума с одинаковым направлением производных [5, 15].

Результаты исследования показывают, что распределение аномальных выбросов частоты по дли-

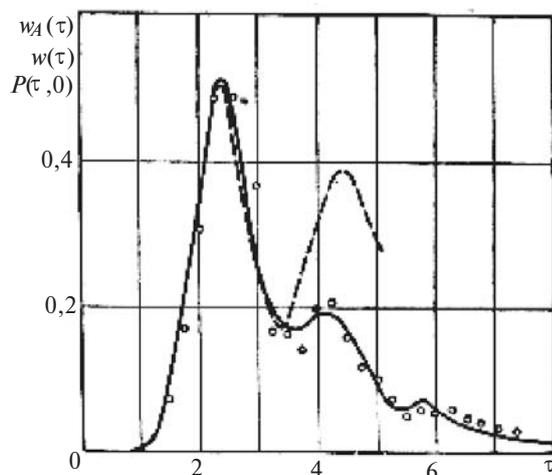


Рис. 7. Плотность распределения $w(t)$ (—) и оценка плотности распределения скачков фазы на $\pm 2\rho$ по длительности (....) для $l = 0$

тельности практически не зависит от входного отношения сигнал/помеха. Приведенные результаты значительно отличаются от аналогичных в [16]. Видимо, это вызвано различием в определении длительности аномального выброса частоты. Полученные выше результаты лучше отражают реальную картину формирования аномальных выбросов частоты, и поэтому их можно использовать в алгоритмах повышения помехоустойчивости и других задачах.

Приведем некоторые результаты моделирования только аномальных выбросов частоты узкополосного процесса (3). Анализируемый процесс формировался только из тех фрагментов, которые образованы переходами фазы на $\pm 2\rho$.

На рис. 8 приведены ожидаемые (средние) значения числа аномальных выбросов частоты суммы синусоидального сигнала и гауссова шума для разных значений отношения сигнал/шум (---). Эти данные сравниваются с теоретически найденными оценками (сплошные линии). Отметим хорошее совпадение этих кривых (особенно при отсутствии модуляции).

Оценивался также энергетический спектр аномальных выбросов для нескольких значений отношения сигнал/шум, который в нормированном виде представлен на рис. 9. Из приведенных оценок следует, что вид (но не их интенсивность) энергетического спектра аномальных выбросов частоты слабо зависит от отношения сигнал/шум и является быстро убывающей функцией частоты. Кроме того, в спектре аномальных выбросов частоты наблюдается значительная (до 10%) равномерная составляющая, практически не зависящая от отношения сигнал/шум. Характер спектра говорит о том, что аномальные выбросы частоты нельзя считать очень короткими импульсами (в отличие от гипотезы С.О. Райса).

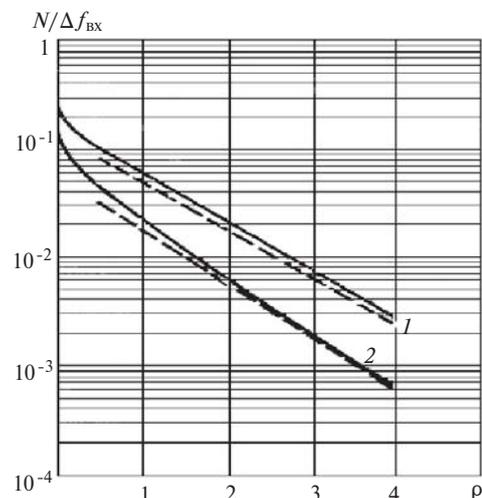


Рис. 8. Ожидаемое число аномальных скачков частоты: 1 – синусоидальная модуляция; 2 – без модуляции

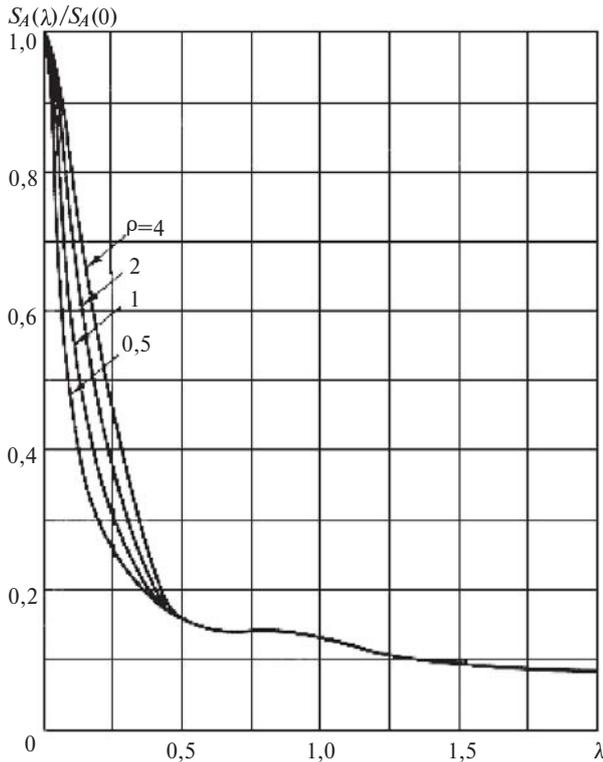


Рис. 9. Спектральная плотность аномальных скачков частоты для прямоугольного входного фильтра (γ – отношение сигнал/помеха)

На рис. 10 приведены [9] оценки спектральной плотности $W(0)$ аномальных выбросов частоты (без модуляции, т.е. без отклонения частоты от номинальной) и теоретические значения спектральной плотности $W(0)$ для гауссовой формы входного

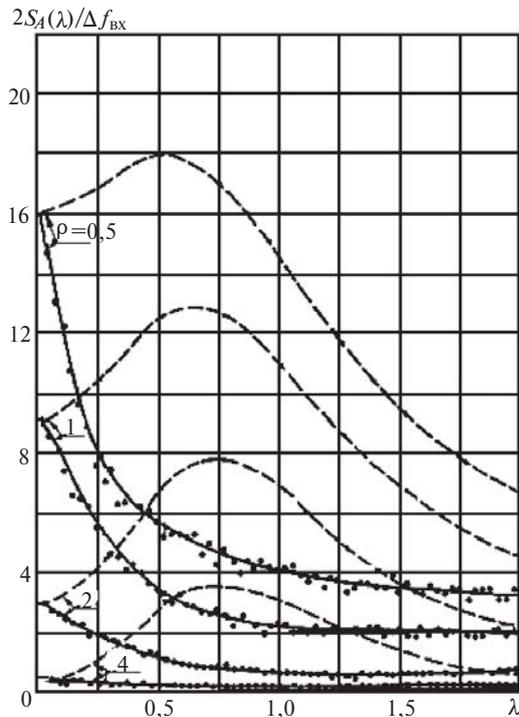


Рис. 10. Спектральная плотность колебаний частоты и аномальных скачков частоты для гауссовой формы входного фильтра

формирующего фильтра помехи. Следует отметить совпадение этих оценок для важной области низких частот спектра (см. рис. 10). Другими словами, основной вклад в шум в подпороговой области вносят аномальные выбросы частоты, вызванные скачками фазы на $\pm 2\rho$, а для нулевого значения частоты спектральной плотности эти оценки совпадают с теоретическими результатами.

Приведенная модель искажений синусоидального процесса помехой справедлива, главным образом, в задачах передачи информации по каналам связи [1, 6, 13], однако применение РМУ измерений показало актуальность приведенных результатов и в задачах электроэнергетики. Так, оценка параметров линий электропередачи существенно зависит от точности используемых значений модулей и фаз режимных параметров, которые можно оценить по спектральным характеристикам.

Энергетический спектр скачков частоты зависит от отношения сигнал/шум γ и является быстро убывающей функцией (рис. 9 и 10). Такой характер спектра свидетельствует о протяженности импульсов во времени. Этот спектр в области низких частот практически совпадает со спектром всех колебаний частоты узкополосного процесса и таким образом определяет точность измерений.

Снижение уровня помех в измерениях частоты. Переключательная модель шума при измерениях частоты узкополосного процесса позволяет предложить эффективный алгоритм для снижения уровня помех в десятки раз в подпороговой области отношений сигнал/шум. Суть этого алгоритма состоит в следующем. На рис. 11 представлены осциллограммы поведения фазы, ее производной и результат фильтрации (сглаживание фильтром нижних частот) больших аномальных ошибок. Мощность помех при измерении частоты определяется заштрихованной областью на рис. 12. Эта область ограничивается на этом рисунке полосой пропускания фильтра нижних частот. Поскольку в рассматриваемой частотной области спектр колебаний частоты (см. рис. 12) практически равномерный (в отличие от параболического спектра помех в надпороговой области), то компенсация аномальных ошибок приведет к переходу этого спектра также в параболическую форму, т.е. к значительному снижению мощности помех. Переход спектра ошибок в параболическую форму легко осуществить добавляя в реализацию процесса (см. рис. 11, а и б) короткие дельта-импульсы площадью 2ρ в направлении, противоположном аномальным выбросам. При этом равномерный спектр помехи в оценке частоты практически превратится (двойная штриховка на рис. 12) в параболический и большие ошибки в измерениях частоты практически полно-

стью устраняются (см. рис. 11, в). Существует некоторая техническая проблема определения момента времени формирования компенсирующего импульса, которая достаточно просто решается. Этот эффект легко получить путем цифрового моделирования упомянутых выше процессов.

Может показаться, что тех же результатов можно достигнуть простым ограничением оценки частоты по амплитуде. Однако таким образом можно снизить уровень больших помех всего в 2–3 раза, поскольку не вся площадь перехода 2π в аномальном выбросе частоты будет скомпенсирована: а именно, энергия, заключенная в площади аномального импульса, вносит максимальный вклад в оценку ее точности.

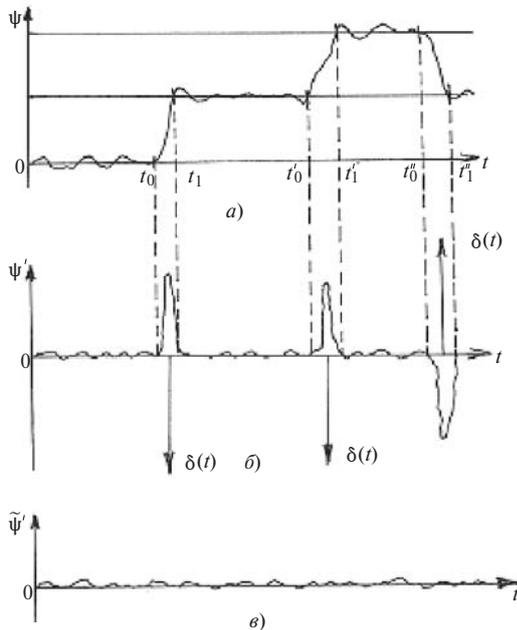


Рис. 11. Этапы фильтрации аномальных ошибок в оценке частоты

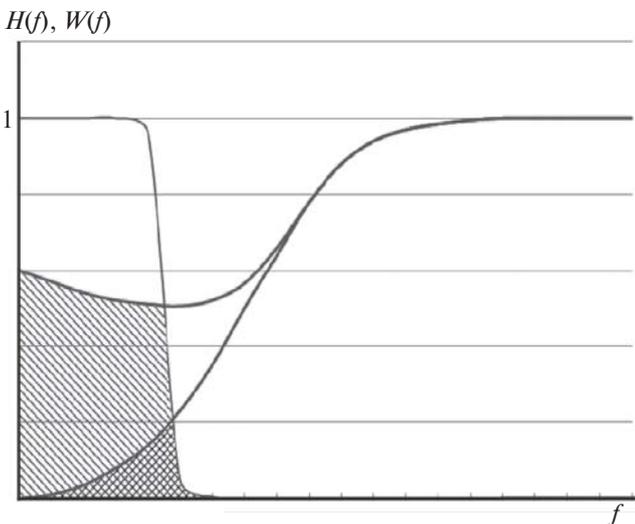


Рис. 12. Спектр колебаний частоты до и после фильтрации аномальных ошибок

Приведенные характеристики случайных колебаний частоты узкополосного процесса (3) справедливы только при условии его стационарности, что на практике встречается редко. Гораздо чаще случайные колебания параметров режима энергообъектов (в том числе и частоты) носят нестационарный характер, вызванный, в основном, периодическим характером энергопотребления и вмешательством оперативного персонала в процесс управления режимом. Приведенные результаты могут служить первым приближением при оценке точности реальных измерений частоты на энергообъектах.

Приложение. Взаимная корреляция шума с гауссовой составляющей в оценке частоты. Второе и третье слагаемые в (5) удобно найти, вычислив корреляционные функции $R_h(t)$ и $R_{hp}(t)$, а затем выполнив преобразование Фурье для получения спектральной плотности. Для корреляционной функции гауссовой составляющей шума

$$R_h(t) = \overline{a(t)a(t+t)h_0(t)h_0(t+t)} = -R_a(t) \frac{g\alpha(t)}{Q^2}, \quad (\text{П-1})$$

где $R_a(t) = \overline{a(t)a(t+t)}$ – корреляционная функция переключательного процесса $a(t)$; $g(t)$ – корреляционная функция квадратурной составляющей входного шума; Q – амплитуда модулированного по частоте синусоидального процесса (см. рис. 1, а).

Рассмотрим далее взаимно корреляционную функцию

$$\begin{aligned} R_{hp}(t) &= \overline{[u(t) - a(t)h_0(t+t)]h_0(t+t)a(t+t)} = \\ &= R_a(t) \frac{g\alpha(t)}{Q^2} + a_0 \overline{u(t)h_0(t+t)}. \end{aligned} \quad (\text{П-2})$$

В [4] (см. также далее) найдено, что

$$\overline{u(t)h_0(t+t)} = \frac{g\alpha(t)}{Q^2}(1 - e^{-\tau}) - \frac{b_1 h \phi}{b_0^2} e^{-\tau}, \quad (\text{П-3})$$

где

$$\begin{aligned} b_0 &= (2\pi)^n \int_0^\infty S_{\text{вх}}(f)(f - f_c)^n df; \\ g(t) &= \int_0^\infty S_{\text{вх}}(f) \cos 2\pi(f - f_c)t df; \\ h(t) &= \int_0^\infty S_{\text{вх}}(f) \sin 2\pi(f - f_c)t df; \end{aligned}$$

$S_{\text{вх}}(f)$ – энергетический спектр узкополосного входного шума.

Природа узкополосного шума может быть совершенно различной. В случае передачи информации – это обычный шум канала связи. В случае функционирования ЭЭС – это результат естественного шума нагрузки, а также систем регулирования и ПА.

Полагаем, что гауссовая составляющая колебаний частоты действует в те отрезки времени, когда вектор суммы принимаемого узкополосного процесса попадает в круг радиусом Q с центром в точке 0 (рис. 1, а). Легко показать, что в этом случае

$$a_0(\tau) = 1 - e^{-\tau}. \quad (\text{П-4})$$

В представляющих интерес случаях корреляционная функция $R_a(t)$ переключающего процесса $a(t)$ является слабо убывающей функцией t и в первом приближении равна

$$R_a(t) \approx R_a(\infty) = (1 - e^{-\gamma t})^2, \quad (\text{П-5})$$

поскольку значениями переключающего процесса могут быть только 0 и 1. Аппроксимация (П-5) оправдана для достаточно больших γ и означает, что энергетический спектр переключающего процесса $a(t)$ сосредоточена в области низких частот.

Из (П-1) после вычисления преобразования Фурье и подстановки в (8) получаем

$$S_{ii}(f) = 4p^2(N_+ + N_-) + \frac{(1 - e^{-\gamma})}{2\gamma} (2pf)^2 S_{\text{вх}}(f - f_c) - 2(2p)^2(1 - e^{-\gamma})e^{-\gamma} f b_1 S_{\text{вх}}(f - f_c) \quad (\text{П-6})$$

при $- \infty < f < \infty$.

При исследовании статистических характеристик шума на выходе частотного дискриминатора часто предполагают статистическую независимость шума и его гауссовой составляющей. Отказавшись от этого предположения, в отдельных случаях можно получить значительно лучшее совпадение теоретических и экспериментальных результатов в подпороговой области значений входного отношения сигнал/шум γ .

Далее приведено выражение взаимно корреляционной функции $R_{uh}(t)$ шума $u(t)$ и его гауссовой составляющей $h(t)$, которое использовано для нахождения взаимного энергетического спектра $S_{uh}(f)$.

Случайные колебания частоты $u(t)$ в модели (3) можно записать в виде

$$u(t) = \frac{[x(t) + Q]y(t) - y(t)x(t)}{[x(t) + Q]^2 + y^2(t)}, \quad (\text{П-7})$$

где $x(t)$ и $y(t)$ – синфазная и квадратурная составляющие входного нормального процесса; Q – амплитуда модулированного по частоте сигнала (гауссовая составляющая равна $h(t) = y(t)/Q$ [1]).

Представим взаимно корреляционную функцию $R_{uh}(t)$ суммой двух слагаемых:

$$R_{uh}(t) = \overline{u(t)h(t-\tau)} = R_1(t) - R_2(t), \quad (\text{П-8})$$

$$\text{где } R_1(t) = \frac{1}{Q} \frac{[x(t) + Q]y(t)y(t+\tau)}{[x(t) + Q]^2 + y^2(t)};$$

$$R_2(t) = \frac{1}{Q} \frac{y(t)x(t)y(t+\tau)}{[x(t) + Q]^2 + y^2(t)}.$$

Рассмотрим первое слагаемое $R_1(t)$. Матрица моментов M_1 четырех случайных величин $x(t)$, $y(t)$, $y(t+\tau)$, $y(t+\tau)x(t)$ имеет вид

$$M_1 = \begin{pmatrix} b_0 & 0 & b_1 & h\phi \\ 0 & b_1 & 0 & g\phi \\ b_1 & 0 & b_2 & -g\phi \\ h\phi & g\phi & -g\phi & b_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{П-9})$$

где $b_0 = x_1^2$; $h = x_1 y_{t+\tau}$; $b_1 = x_1 y_\tau$; $g = x_1 x_{t+\tau}$; $b_2 = x_\tau^2$.

При вычислении $R_1(t)$ удобно перейти от плотности распределения к характеристической функции. Запишем характеристическую функцию совместного распределения четырех случайных величин – $x(t) = x_1$; $y(t) = y_1$; $y(t+\tau) = y_2$; $y(t+\tau)x(t) = y_3$:

$$F_1 = (z_1, z_2, z_3, z_4) = \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^4 a_{rs} z_r z_s \right\} = \exp\left\{ -\frac{1}{2} [b_0(z_1^2 + z_2^2) + b_2(z_3^2 + z_4^2) + 2b_1 z_1 z_3 + 2h\phi z_1 z_4 + 2g\phi z_2 z_4 - 2g\phi z_3 z_4] \right\}.$$

Тогда для корреляционной функции $R_1(t)$ получим:

$$R_1(t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \dots \int \exp\{-iz_1 x_1 - iz_2 y_1 - iz_3 y_2 - iz_4 y_3 - \frac{1}{2} [b_0(z_1^2 + z_2^2) + b_2(z_3^2 + z_4^2) + 2b_1 z_1 z_3 + 2h\phi z_1 z_4 + 2g\phi z_2 z_4 - 2g\phi z_3 z_4]\} \frac{(x_1 + Q)y_2 y_3}{(x_1 + Q)^2 + y_1^2} dx_1 dy_1 dy_2 dy_3 dz_1 dz_2 dz_3 dz_4. \quad (\text{П-10})$$

Выражение (П-10) можно преобразовать:

$$R_1(t) = \frac{1}{2\pi Q} \int \int \exp\{-iQz_1 - \frac{1}{2} [b_0(z_1^2 + z_2^2)]\} \frac{z_1 g\phi + b_1 h\phi z_1^3 + b_1 g\phi z_2 z_1^2}{z_1^2 + z_2^2} dz_1 dz_2. \quad (\text{П-11})$$

Рассмотрим теперь второе слагаемое $R_2(t)$. Матрица моментов M_2 четырех случайных величин – $x(t) = x_1$; $y(t) = y_1$; $x(t) = x_2$; $y(t) = y_2$ имеет вид

$$M_2 = \begin{pmatrix} b_0 & 0 & 0 & h\phi \\ 0 & b_0 & -b_1 & g\phi \\ 0 & -b_1 & b_2 & -h\phi \\ h\phi & g\phi & -h\phi & b_3 \end{pmatrix}$$

Выражение для $R_2(t)$ в этом случае приводится к виду:

$$R_2(t) = \frac{1}{2\pi Q} \int \int \exp\{-iQz_1 - \frac{1}{2} [b_0(z_1^2 + z_2^2)]\} \frac{b_1 h z_1 z_2^2 + b_1 g z_2^2 - z_2 h\phi}{z_1^2 + z_2^2} dz_1 dz_2.$$

При замене $z_1 = R \cos \phi$, $z_2 = R \sin \phi$, $dz_1 dz_2 = R dR d\phi$ – имеем:

$$R(t) = R_1(t) - R_2(t) = \frac{1}{2\pi Q} \int \int \exp\{iQR \cos \phi - \frac{b_0 R^2}{2} \} [b_1 h \cos \phi + b_1 g \sin \phi + g\phi \cos \phi - h\phi \sin \phi] R dR d\phi. \quad (\text{П-12})$$

Вычислив (П-12), получаем формулу для взаимно корреляционной функции шума и его гауссовой составляющей:

$$R_{uh}(t) = R_1(t) - R_2(t) = -g\phi(1 - e^{-\gamma t}) - \frac{b_1 h\phi}{b_0^2} e^{-\gamma t}.$$

Выполнив преобразование Фурье взаимно корреляционной функции $R_{uh}(t)$, находим формулу для взаимного энергетического спектра:

$$S_{uh}(f) = \frac{1 - e^{-\tau}}{2\tau} (2\pi f)^2 S_{вх}(f - f_c) - 2(2\pi)^2 f b_1 e^{-\tau} S_{вх}(f - f_c)$$

при $-\frac{\tau}{2} < f < \frac{\tau}{2}$, где $S_{вх}(f)$ — энергетический спектр шума колебаний частоты узкополосного процесса.

Таким образом, взаимный энергетический спектр случайных колебаний частоты состоит из суммы двух составляющих, одна из которых имеет параболический характер, другая — линейный. Учет взаимной корреляции гауссовой и импульсной составляющих в колебаниях частоты позволяет значительно улучшить совпадение с экспериментальными оценками спектральной плотности колебаний частоты (см. рис. 2).

Заключение. На основе приведенной приближенной переключательной модели шума в измерениях частоты получено выражение для спектральной плотности колебаний частоты узкополосного случайного процесса. Эта модель содержит нормальную и импульсную составляющие, а также взаимный энергетический спектр, что дает хорошее совпадение по спектральной плотности шума частоты по сравнению с точной моделью. Эта модель позволяет получить спектр колебаний частоты и оценку интенсивности помех в измерениях частоты.

Для частных случаев (отклонения частоты процесса от номинального значения) найдено обобщение точных результатов [1] по спектральной плотности колебаний частоты. Приведенные статистические характеристики колебаний частоты позволяют оценить точность измерений частоты в том числе средствами РМУ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rice S.O. Time Series Analysis/Edit. by M. Rosenblatt. — New-York: John Wiley, 1963.
2. Тихонов В.И. Выбросы случайных процессов — М.: Наука, 1970, 392 с.

3. Малолепший Г.А. Материалы конференции по теории кодирования и передачи информации. Москва—Горький, ГПИ, 1972.

4. Рабинович М.А. О взаимной корреляции шума и его гауссовской составляющей в оценке частоты частотным дискриминатором. — Радиотехника, 1974, т. 29, № 7.

5. Андронов А.А., Рабинович М.А. Распределение длительности аномальных выбросов частоты и нули гауссова случайного процесса. — Радиотехника, 1978, т. 33, №8, с. 72—75.

6. Rabinovich M., Yaroslavsky L. Results of Noise Statistics Measurements in FM Receiver. 2 nd Intern. Sym. on Information Theory Akademiai, Kiado, Budapest, 1972, pp. 375—386.

7. Рабинович М.А. О статической модели шума на выходе частотного дискриминатора. — Радиотехника, 1975, No. 4, с. 88—90.

8. Rice S.O. «BSTJ», 1948, vol. 27, № 1.

9. Рабинович М.А. Корреляционная функция и энергетический спектр производной фазы модулированного по частоте сигнала и аддитивного гауссова шума. — Радиотехника, 1977, No. 5, с. 48—52.

10. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. — М.: Наука, 1976, 494 с.

11. Горяинов В.Т., Журавлев А.Г., Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. Примеры, задачи. — М.: Советское радио, 1980, 554 с.

12. Возенкрафт Дж., Джекобс И. Теоретические основы техники связи. — М.: Мир, 1969, 640 с.

13. Жуков В.П. Методы помехоустойчивого приема ЧМ и ФМ сигналов. — М.: Советское радио, 1972,

14. Миркин Л.И., Рабинович М.А., Ярославский Л.П. Метод генерирования коррелированных гауссовских псевдослучайных чисел. — ЖВМ и МФ, 1972, т. 12, No. 5.

15. Андронов А.А., Рабинович М.А. О распределении длительности аномальных выбросов частоты. Тезисы докладов на всесоюзной конференции по теории кодирования и передачи информации. — Вильнюс, 1978.

16. Дорофеев В.М. Труды НИИ Радиотехники, 1970, вып. 3.

[26.10.15]

Автор: Рабинович Марк Аркадьевич окончил факультет радиотехники и кибернетики Московского физико-технического института (МФТИ) в 1969 г. В 2005 г. защитил докторскую диссертацию «Цифровая обработка, анализ и отображение оперативной информации в задачах АСДУ энергосистем и энергообъединений» во ВНИИЭ. Главный эксперт отдела Системного моделирования ПАО «НТЦ ФСК ЕЭС».

Elektrichestvo (Electricity), 2016, No. 5, pp. 13—27.

Static Characteristics of Frequency Narrowband Randon Process

RABINOVICH Mark Arkad'yevich (Public Company «Scientific Technical Centre of Federal Grid Company of Unified Energy System», Moscow, Russia) — Chief Expert of the System Modeling Department, Dr. Sci. (Eng.)

An impulse (switched) model for sum of a sine-wave signal and additive Gaussian noise frequency measurements is considered. The main statistical characteristics (spectral density of power, distribution of abnormal spikes in duration, etc.) of random frequency fluctuations are presented. The frequency of such process, which is called a narrow-band one, has a number of characteristic features, which are usually not taken into consideration in problems related to electric power engineering. The effect these processes have on the frequency measurement accuracy—including the cases when it deviates from its nominal value—is estimated. An analogy between the phase behavior in communication systems and in electric power systems

is pointed out. A simple algorithm for improving the frequency measurement accuracy is given.

Key words: power system, frequency, noise, phase derivative, measurement error, spectral density, phase steps

REFERENCES

1. **Rice S.O.** Time Series Analysis/Edit.by M. Rosenblatt – New-York: John Wiley, 1963.
2. **Tikhonov V.I.** *Vybrasy sluchainykh processov* (Emissions of random processes). Moscow, Publ. «Nauka», 1970, 392 p.
3. **Malolepsii G.A.** *Materialy Konferentsii po teorii kodirovaniya i peredachi informatsii* (Proc. of the conf. on the theory of coding and transmission of information). Moscow-Gorkii, Gor'kii Polytechnic Institute, 1972.
4. **Robinovich M.A.** *Radiotekhnika – in Russ. (Radio Engineering)*, 1977, vol. 29, No. 7.
5. **Andronov A.A., Rabinovich M.A.** *Radiotekhnika – in Russ. (Radio Engineering)*, 1978, vol. 33, No. 8, pp. 72–75.
6. **Rabinovich M., Yaroslavsky L.** Results of Noise Statistics Measurements in FM Receiver. 2nd Intern. Sym. on Information Theory Akademiai, Kiado, Budapest, 1972, pp. 375–386.
7. **Rabinovich M.A.** *Radiotekhnika – in Russ. (Radio Engineering)*, 1975, No. 4, pp. 88–90.
8. **Rice S.O.** «BSTJ», 1948, vol. 27, № 1.
9. **Rabinovich M.A.** *Radiotekhnika – in Russ. (Radio Engineering)*, 1977, No. 5, pp. 48–52.
10. **Rytov S.M.** *Vvedeniye v statisticheskuyu radiofiziku* (Introduction in Statistical Radiophysics). Moscow, Publ. «Nauka», 1976, 494 p.
11. **Goryainov V.T., Zhuravlev A.G., Tikhonov V.I.** *Statisticheskaya radiotekhnika. Primery, zadachi* (Statistical Radio Engineering. Examples, Problems). Moscow, Publ. «Sovetskoye radio», 1980, 554 p.
12. **Rosenkraft J., Jacobs I.** *Teoreticheskiye osnovy tekhniki svyazi* (Theoretical Foundations of Communication Technology). Moscow, Publ. «Mir», 640 p.
13. **Zhukov V.P.** *Metody pomekhoustoichivogo priyema ChM i FM signalov* (The Methods of Error-Correcting Receiving). Moscow, Publ. «Sovetskoye radio», 1972.
14. **Mirkin L.I., Rabinovich M.A., Yaroslavskii L.P.** *Zhurnal vysshei matematiki i matematicheskoi fiziki – in Russ. Journal of Higher Mathematics and Mathematical Physics*, 1972, vol. 12, No. 5.
15. **Andronov A.A., Rabinovich M.A.** *Tezisy dokladov Vsesoyuznoi konferentsii po teorii kodirovaniya i peredachi informatsii – in Russ.* (Abstracts of the All-Union Conf. on Coding Theory and Information Transfer). Vilnius, 1978.
16. **Dorofeyev V.M.** *Trudy NIIR – in Russ.* Proc of the Scientific and Research Radio Engineering Institute, 1970, iss. 3.