

## Сверхпроводящий шар в пульсирующем и вращающемся магнитном поле

**КОВАЛЕВ Л.К., КОВАЛЕВ К.Л., КОНЕЕВ С.-М., СЕМЕНИХИН В.С.**

*Структура современных объемных высокотемпературных сверхпроводящих (ВТСП) материалов представляет собой отдельные сверхпроводниковые (СП) домены (гранулы), разделенные тонкими несверхпроводящими промежутками. Форма, размер и физические характеристики СП доменов определяются типом керамики и технологией ее изготовления. Однако в большинстве случаев при рассмотрении объемного ВТСП во внешнем магнитном поле такие домены можно в первом приближении рассматривать как отдельные ВТСП сфероиды. В статье рассматриваются электродинамические и гистерезисные процессы в ВТСП сфероиде, который находится в переменном магнитном поле. При этом предполагается, что ВТСП сфероид может иметь монодоменную или поликристаллическую структуру. Работа обобщает, уточняет и дополняет результаты исследований ВТСП шара, частично изложенные в [3].*

*Ключевые слова: ВТСП сфероид, магнитное поле, монодоменная и поликристаллическая структура, математическая модель, гистерезисные потери, аналитические и экспериментальные исследования*

Практическое использование высокотемпературных сверхпроводниковых материалов (ВТСП) предполагает создание математических моделей электродинамических и гистерезисных процессов в объемных ВТСП элементах различной конфигурации, в частности математических моделей объемных ВТСП, ограниченных сферой (ВТСП сфероид), находящихся в переменных магнитных полях.

В литературе по прикладной сверхпроводимости опубликовано решение задачи о распределении магнитных и электрических полей в ВТСП сфероиде, находящихся во внешних пульсирующих магнитных полях. В то же время практически отсутствуют результаты исследований магнитных полей в ВТСП сфероиде во внешних вращающихся магнитных полях. Важно также отметить, что в ряде высокотемпературных сверхпроводниковых электрических машин с объемными ВТСП элементами из поликристаллических керамик на отдельные гранулы действуют именно вращающиеся магнитные поля. В таких средах гистерезисные потери и усредненные магнитные поля можно определить на основе модели среды «в среднесферическом» приближении. Данная статья посвящена исследованию ВТСП шара во вращающемся магнитном поле.

**Постановка задачи.** Структура современных объемных ВТСП материалов представляет собой отдельные сверхпроводниковые (СП) домены (гранулы), которые разделены тонкими несверхпроводящими промежутками. Форма, размер и физические характеристики СП доменов определяются типом керамики и технологией ее изготовления. Однако в большинстве случаев при рассмотрении объемного

ВТСП во внешнем магнитном поле такие домены можно в первом приближении рассматривать как отдельные ВТСП сфероиды. Плотности транспортных  $J_t$  и внутридоменных  $J_s$  токов зависят от ориентации и значения напряженности внешнего магнитного поля. Характер электродинамических и гистерезисных процессов в объемных ВТСП обычно зависит от параметра  $\chi = J_t D / J_s a$ , определяющего относительную токонесущую способность ВТСП, где  $D$  и  $a$  – размеры ВТСП образца и СП домена. Для монодоменных ВТСП при  $\chi \gg 1$  электромагнитные и гистерезисные явления достаточно хорошо описываются на основе модифицированных феноменологических моделей критического состояния Бина, Кима-Андерсона и др. [1]. Для поликристаллических ВТСП ( $\chi \ll 1$ ) электромагнитные и гистерезисные явления могут быть определены на основе приближенных феноменологических моделей среды, в которых локальные характеристики СП доменов описываются в «среднесферическом» приближении [2].

В статье рассматриваются электродинамические и гистерезисные процессы в ВТСП шаре, который находится в переменном магнитном поле. При этом предполагается, что ВТСП шар может иметь монодоменную или поликристаллическую структуру. Работа обобщает, уточняет и дополняет результаты исследований ВТСП шара, частично изложенные в [3].

Для монодоменного ВТСП шара ( $\chi \gg 1$ ) при малых глубинах проникновения магнитного поля распределение индукции магнитного поля на поверхности шара с точностью до  $O(d^2)$  совпадает с

распределениями индукции на поверхности идеального диамагнитного шара ( $m_s = 0$ ) [4]:

$$B_r \gg 0(d); B_j \gg 0(d); B_q = kB_c(t) \sin \varphi, \quad (1)$$

где  $B_c(q)$  – мгновенное значение магнитной индукции при  $r \approx 0$ ;  $k = 3/2$  – фактор размагничивания для диамагнитного шара.

Поскольку индукция в (1) направлена по касательной к сферической поверхности, локальные гистерезисные явления при относительной глубине проникновения  $d < 1$  в шаре с точностью до  $0(d^2)$  аналогичны локальным процессам в ВТСП пластине с эллиптической поляризацией приложенного внешнего магнитного поля (рис. 1) [3]. Это позволяет определить относительные гистерезисные потери в шаре за один цикл перемагничивания путем усреднения по объему эквивалентных значений удельной энергии гистерезисных потерь  $q_e$  плоской пластины [5]:

$$q = \frac{1}{V} \oint q_e dV = 3 \int_0^{p/2} q_e d(1 - d - d^2/3) \sin \varphi d\varphi, \quad (2)$$

где  $V = 4/3\pi a^3$  – объем шара радиусом  $a$ ;  $d_q(q)$  – относительная глубина проникновения магнитного поля;  $q_e$  – эквивалентная энергия гистерезисных потерь в пластине, локализованная в пределах  $d_q$ . Сферическая система координат  $r, j, \varphi$  в (2) ориентирована по оси симметрии распределения токов  $J_t$  в объеме шара (в пульсирующем поле ось  $r$  ориентирована по вектору  $B_e$  внешнего поля, во вращающемся поле – перпендикулярно плоскости вращения  $B_e$ , как это показано на рис. 2).

**Процессы в ВТСП пластине в случае эллиптической поляризации внешнего магнитного поля.** В общем случае при эллиптической поляризации внешнего поля  $B$  распределения  $B(B_x, B_y)$  и  $J_t(J_{tx}, J_{ty})$  в

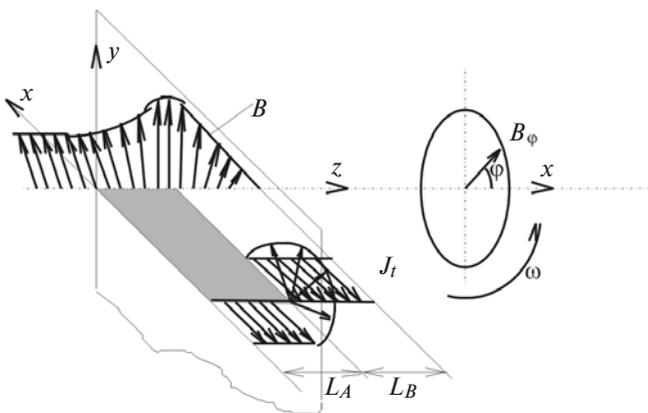


Рис. 1. Распределение магнитной индукции и плотности транспортного тока внутри ВТСП пластины при эллиптической поляризации ( $\chi > 1$ ) внешнего магнитного поля

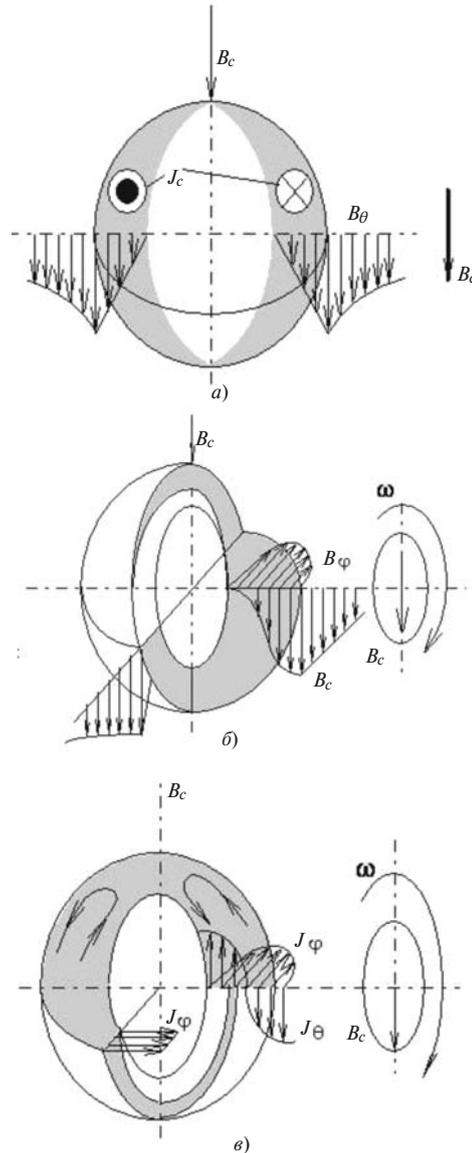


Рис. 2. Распределение магнитной индукции и плотности транспортного тока при  $\chi > 1$  в ВТСП шаре в полях различной поляризации: а – линейной; б – круговой; в – эллиптической

предположении  $J_t = \text{const}$  можно найти из решения уравнений Максвелла [4]:

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} = m_0 J_{ty}; \quad (3)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial z} = m_0 J_{tx};$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = - \frac{\partial B_y}{\partial t}; \quad (4)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial B_x}{\partial t};$$

$$J_{tx} = J_1 \cos j J; \quad (5)$$

$$J_{ty} = J_1 \sin j J,$$

где  $E_x, E_y$  – компоненты вектора напряженности электрического поля;  $j J$  – угол поворота вращаю-

щихся векторов  $J_t$  и  $B_j$  относительно оси  $x$  (рис. 1).

Граничные условия для уравнений (3), (4):

$$B = B_c, J_t \frac{\partial B}{\partial t} = 0 \text{ при } z = 0; \quad (6)$$

$$E = 0, B_A = B_r \text{ при } z = L_A; \quad (7)$$

$$B = 0 \text{ при } z = dD. \quad (8)$$

Здесь  $L_A$  – координата, определяющая зону движения магнитного потока;  $dD$  – координата, определяющая зону стационарного магнитного потока.

Условия (6) соответствуют непрерывности индукции магнитного поля и ортогональности приращения векторов  $\partial \mathbf{B} / \partial t$  и  $J_t$  на СП границе. Условия (7) определяют отсутствие электрического поля и непрерывность магнитной индукции на подвижной границе  $L_A$ , отделяющей активную зону  $0 \leq z \leq L_A$ , где происходит движение магнитного потока в текущем цикле перемагничивания, от «реликтовой» зоны  $L_A \leq z \leq dD$ , занятой стационарным магнитным полем  $\mathbf{B}(z)$  предыдущих циклов перемагничивания. Распределение магнитной индукции в пластине при эллиптической поляризации внешнего магнитного поля представлено на рис. 1.

Условие (8) соответствует полному затуханию магнитного поля на глубине проникновения. Компоненты магнитной индукции внешнего эллиптически поляризованного поля могут быть представлены в виде  $B_z = B_1 \cos \omega t$ ,  $B_y = B_2 \sin \omega t$ , где  $B_1$  и  $B_2$  – амплитуды магнитной индукции по осям  $x$  и  $y$  ( $B_2 \geq B_1$ ),  $\omega$  – угловая частота. Приближенное аналитическое решение задачи (3)–(8) строится при допущении, что фаза  $Y$  магнитного поля  $B(Y)$  в основной зоне проникновения является линейной функцией от  $z$  вида  $Y = \omega t - z / c(t)$ , где функция  $c(t)$  определяется из решения задачи. С учетом сделанных замечаний аналитические решения задачи при  $B_2 > B_1$  записываются в виде [3]:

$$J_{tx} = \frac{J_t B_2 \cos[\omega t - z / c_i(t)]}{[B_2^2 \cos^2(\omega t - z / c_i) + B_1^2 \sin^2(\omega t - z / c_i)]^{1/2}}; \quad (9)$$

$$J_{ty} = \frac{J_t B_1 \sin[\omega t - z / c_i(t)]}{[B_2^2 \cos^2(\omega t - z / c_i) + B_1^2 \sin^2(\omega t - z / c_i)]^{1/2}};$$

$$B_x = B_1 \cos \omega t + \frac{c_i m_0 J_t B_1}{\sqrt{B_2^2 - B_1^2}} \operatorname{Arsh} \frac{\sqrt{B_2^2 - B_1^2}}{B_1}.$$

$$\cos \omega t - \frac{z}{c_i} \operatorname{Arsh} \frac{\sqrt{B_2^2 - B_1^2}}{B_1} \cos \omega t;$$

$$B_y = B_2 \sin \omega t + \frac{c_i m_0 J_t B_2}{\sqrt{B_2^2 - B_1^2}} \operatorname{Arsh} \frac{\sqrt{B_2^2 - B_1^2}}{B_2}. \quad (10)$$

$$\cos \omega t - \frac{z}{c_i} \operatorname{Arsh} \frac{\sqrt{B_2^2 - B_1^2}}{B_2} \cos \omega t.$$

В (9) и (10)  $c_i$  – значения констант в активной ( $i=1$ ) и «реликтовой» ( $i=2$ ) зонах, соответственно, которые определяются из граничных условий задачи (7), (8). В «реликтовой» зоне распределения поля (10) стационарны и соответствуют амплитуде  $B_2$  на поверхности ВТСП пластины. Значения  $c_2$  и  $d$  в этой зоне определяются из условия (8) при  $\omega t = \pi / 2$ :

$$c_2 = dD / \rho; \quad (11)$$

$$d = \frac{\rho \sqrt{B_2^2 - B_1^2}}{2 m_0 J_t D \operatorname{Arsh}(\sqrt{B_2^2 - B_1^2} / B_2)}. \quad (12)$$

Мгновенные значения  $c_i(t)$  и  $L_A(t)$  определяются из системы уравнений, учитывающих граничное условие (7).

Соответствующие распределения электрического поля  $\mathbf{E}$  находятся интегрированием уравнений (3)–(5) с учетом (10). Относительная удельная энергия гистерезисных потерь  $q$  на один цикл перемагничивания определяется из соотношения [5]:

$$q = \frac{2 m_0 Q}{B_p^2} = \frac{2 m_0 T}{B_p^2 D} \int_0^{L_A} \int_0^T \dot{E} J_t dt, \quad (13)$$

где  $B_p$  – магнитная индукция внешнего поля, при которой происходит полное проникновение поля в пластину ( $d=1$ );  $T = 2\pi / \omega$  – период цикла перемагничивания;  $Q$  – энергия удельных гистерезисных потерь на единицу объема.

**Монодоменный сфероид из ВТСП керамики в пульсирующем и вращающемся магнитном поле.** Для линейно поляризованного внешнего поля  $\mathbf{B}_e$  при  $b = B_e / B_p \leq 1$  значение удельных гистерезисных потерь составляет

$$q_e = \frac{2 m_0}{B_p^2} \begin{cases} \frac{2 B_{2q}^3}{3 m_0 l_1 d q a} & \text{при } a(1-d) < r < a; \\ 0 & \text{при } r < a(1-d). \end{cases} \quad (14)$$

В (14)  $B_{2q} = (3/2) B_q \sin q$  – амплитуда индукции магнитного поля на поверхности шара;  $B_p = (2/3) m_0 J_t a$  – амплитуда индукции внешнего поля при его полном проникновении в объем сфероид;  $d_q = b \sin q$  – текущее значение относитель-

ной глубины проникновения поля в точках  $r, j, q$  шара при  $b = B_e / B_p \ll 1$ .

Для вращающихся внешних магнитных полей  $B_e$  значения  $q_e$  и  $d(q)$  определяются на основе соответствующих выражений для пластины в эллиптически поляризованных магнитных полях  $B_{1q} = (3/2)B_e \cos q$ ,  $B_{2q} = (3/2)B_e$  и  $\epsilon = \cos q$  [3]:

$$q_e = \frac{2\mu_0}{B_p^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho B_2^3}{3\mu_0^2 J_t d_{q,a}} (1 + \epsilon + \epsilon^2) \frac{\sin q}{q} \text{ при } a(1-d) < r < a; \quad (15)$$

$$0 \text{ при } r < a(1-d).$$

$$d_q(q) = \frac{3\rho B_c}{4\mu_0^2 J_t a} \frac{\sin q}{q} = b \frac{\sin q}{q}. \quad (16)$$

Амплитуда магнитной индукции внешнего поля  $B_p$ , соответствующая полному проникновению поля в объем сфероид ( $d_q = 1$  при  $q = 0$  и  $d = \rho/2$  при  $q = \rho/2$ ), находится из (16) в виде  $B_p = (4/3\rho)\mu_0 J_t a$ .

Полученные интегрированием (14) с учетом (15), (16) аналитические выражения для удельных потерь  $q$  в объеме ВТСП шара, ограниченном сферой при линейно поляризованных и вращающихся магнитных полях, имеют вид:

$$q = \frac{18ak_s h^2 d^3}{(1+k_s a/2)^2 \epsilon} \left( 1 - \frac{4}{15a} d + \frac{1}{4} d^2 \frac{\ddot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}} \right); \quad b \ll 1; \quad (17)$$

$$q = \frac{18ak_s h^2}{(1+k_s a/2)^2 \epsilon} \left( \frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon} d_m^3 \left( 1 - \frac{4}{15a} d_m + \frac{d_m^2}{4} \frac{\ddot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}} \right) + \frac{b}{h} \frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon} 3d_m^2 - \frac{16}{15a} d_m^3 + \frac{5}{4} d_m^4 \frac{\ddot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}} \right); \quad b > 1. \quad (18)$$

Для случая линейно поляризованных магнитных полей выражения для  $q$  с точностью до 5% совпадают с известными точными решениями для объема, ограниченного сферой в случае полного проникновения магнитного поля [1]. Результаты расчетов мгновенных распределений  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{J}_t$ , полученные при  $d < 1$ , показаны на рис. 2.

Магнитная индукция в зоне проникновения распределена по линейному закону. Распределения  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{J}_t$  в объеме шара при вращающихся магнитных полях существенно усложняются, что сказывается на характере зависимости удельных гистерезисных потерь  $q$  от амплитуды внешнего поля.

Результаты, полученные здесь для ВТСП шара, могут быть использованы при построении феноменологических моделей электромагнитных процессов в полидоменных ВТСП керамиках с параметром  $x < 1$ .

**Намагниченность и гистерезисные потери в монодоменном ВТСП шаре в переменном магнитном поле.** При линейной поляризации внешнего магнитного поля намагниченность  $M_M$  при  $b < 1$  определяется из соотношения [6]:

$$M_M = M_{M.H} - \frac{2}{V} \dot{\epsilon} S_t J_t d N_n = M_{M.H} - M_{ML}, \quad (19)$$

где  $M_{M.H}$  – максимальная намагниченность в предыдущем цикле перемагничивания;  $M_{ML}$  – составляющая намагниченности, определяемая СП токами  $J_t$ , возникающими при текущем цикле перемагничивания;  $V$  – объем ВТСП элемента;  $S_t$  – площадь, охватываемая контурами с элементарными токами  $J_t d N_n$ ;  $S_n$  – площадь, занятая транспортными токами.

Для вращающегося магнитного поля намагниченность ВТСП элемента при  $b < 1$  определяется численно с использованием более общего соотношения [4]:

$$M_M = M_{ML} - \frac{1}{V} \dot{\epsilon} r' J_t d V, \quad (20)$$

где  $r$  – радиус-вектор, направленный из начала координат к элементарному объему  $dV$ .

При  $b^3 \gg 1$  ( $B_c / B_p > 1$ ) и  $J_t = \text{const}$  намагниченность остается постоянной и равной значению  $M_M$  при  $b = 1$ . Для объемов внутри шара аналитические выражения намагниченности  $M_M$  при  $J_t = \text{const}$  получены в [5]:

$$M_s = \mu_0 J_s R d F(d);$$

$$F(d) = 1 - \frac{27\rho}{64} d + \frac{4}{5} d^2 - \frac{15\rho}{256} d^3, \quad b \ll 1; \quad (21)$$

$$M_s = \mu_0 J_s d_m R F(d_m), \quad d_m = 1;$$

$$F(d_m) = F(1) = 0,29, \quad b > 1. \quad (22)$$

Эти выражения использованы при построении интерполяционных зависимостей гистерезисных потерь для ВТСП объемов внутри сфероидов с помощью соотношения [6]:

$$q = \frac{2\mu_0^2}{B_p^2} \dot{\epsilon} M d H. \quad (23)$$

Намагниченность ВТСП сфероидов при  $x > 1$  связана с напряженностью вращающегося магнитного поля  $\mathbf{H}$ , удельным механическим моментом  $m_{\text{мех}}$  и относительными потерями на гистерезис  $q$  соотношением [7]:

$$|\mathbf{M}' \cdot \mathbf{H}_c| = M H_c \sin \alpha_s = m_{\text{мех}} = \frac{B_p^2}{2\mu_0} \frac{q}{2\rho}. \quad (24)$$

Это выражение позволяет найти угол  $\alpha_s$  между направлениями  $\mathbf{H}_c$  и  $\mathbf{M}_M$  в ВТСП элементах при вращающихся магнитных полях:

$$a_s = \arcsin(qB_p^2 / 4\pi_0^2 H_c M_M). \quad (25)$$

В тех случаях, когда известны значения внешнего вращающегося поля  $H_e$ , удельные гистерезисные потери  $Q = qB_p^2 / 2\pi$  а также угол  $a_s$ , из (25) можно найти значение магнитного момента:

$$M = \frac{Q}{2\pi H_e \sin a_s}. \quad (26)$$

**Поликристаллический ВТСП сфероид при  $\chi < 1$  в магнитном поле.** В первом приближении феноменологические модели электромагнитных и гистерезисных процессов в поликристаллических ВТСП шарах при  $\chi < 1$  могут быть построены на основе полученных ранее решений для ВТСП шаров, рассматриваемых как отдельные СП домены. При этом взаимное влияние СП доменов учитывается в приближении Лоренца [4].

Распределение магнитного поля в объеме шара из поликристаллической ВТСП керамики описывается системой уравнений  $\text{div}\mathbf{B} = 0$ ,  $\text{rot}\mathbf{H} = 0$ , и задача сводится к решению уравнения Пуассона для скалярного магнитного потенциала  $j_s$ :

$$\begin{aligned} \Delta j_s &= -\text{div}M_M; \\ H_s &= \text{grad}j_s. \end{aligned} \quad (27)$$

На границах ВТСП среды используются условия непрерывности касательных составляющих  $\mathbf{H}$  и нормальных составляющих  $\mathbf{B}$ . В [5] показано, что для объемов внутри шара  $M_M$  не зависит от пространственных координат, а решение задачи (27) записывается в виде:

$$j_s = r[H_c \sin q + (M_M / l)\sin(q + a_s)], \quad r < r_0; \quad (28)$$

$$j_s = r[H_c \sin q + (M_M / l)(r_0 / r)^l \sin(q + a_s)], \quad r > r_0, \quad (29)$$

где  $l$  – параметр задачи ( $l = 3$  для сфероидов);  $a_s$  – угол между векторами  $\mathbf{H}_s$  и  $\mathbf{M}_M$ . Для вращающихся магнитных полей  $a_s \ll 0$  и определяется из (25) с учетом соотношений для  $M_M$  и  $q$  (21), (17).

На рис. 3 показаны мгновенные значения распределения магнитного поля в поликристаллическом шаре при вращающемся внешнем магнитном поле  $H_c$ .

**Экспериментальные исследования намагниченности монодоменных ВТСП гранул шаровидной формы.** Для определения реальных физических характеристик ВТСП иттриевых керамик (YBCO, соединение 1–2–3) экспериментально исследовался YBCO монодомен, ограниченный сферой диаметром 2,5 мм [7]. Исследования проводились на магнетометре (типа VSM). Схема измерений показана на рис. 4.

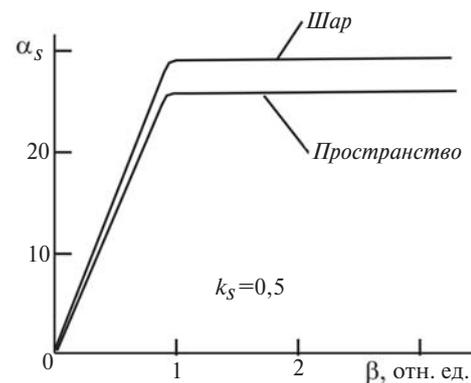
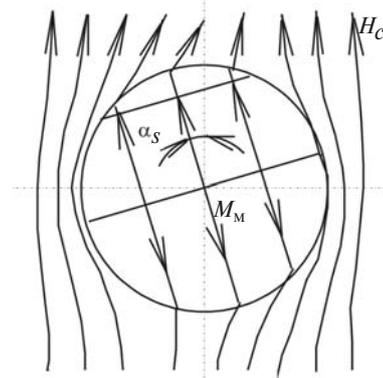


Рис. 3. Распределение параметров магнитного поля в поликристаллическом объемном ВТСП шаре при  $\chi < 1$  во вращающемся внешнем магнитном поле  $H_c$  и зависимость  $a_s$  от параметра  $b = H_{c \max} / H_p$

Измерялась намагниченность шаровидной ВТСП гранулы  $\mathbf{M}(M_x, M_y)$  при воздействии внешнего магнитного поля различной амплитуды ( $B_{em} = 0,1; 0,31$  и  $2,0$  Тл) с линейной поляризацией для следующих случаев: ВТСП гранула охлаждается до температуры 77 и 21 К в нулевом магнитном поле ( $zfc$ -процесс); ВТСП гранула охлаждается до температуры 77 и 21 К в магнитном поле 2 Тл ( $fc$ -процесс). Измерения в пульсирующем магнитном поле проводились при различных углах между внешним полем и осью  $c$  ВТСП гранулы  $n$  ( $n = 0$  и  $60^\circ$ ).

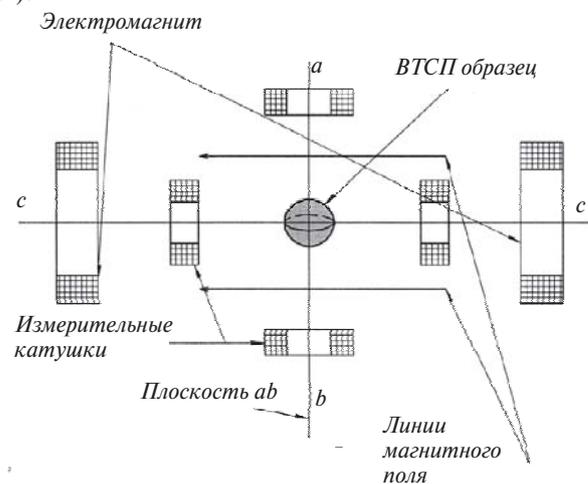


Рис. 4. Схема экспериментальных исследований

Наиболее распространенным способом расчета гистерезисных потерь в сверхпроводящих элементах от воздействия переменного магнитного поля является вычисление площади, ограниченной кривой намагничивания сверхпроводника за период изменения магнитного поля. В этом случае гистерезисные потери  $q$  на единицу объема СП элемента рассчитываются по (23). Намагниченность  $M$  сферической СП гранулы, необходимая для расчета гистерезисных потерь, определяется из (19).

При наличии анизотропии критических токов в шаровидной ВТСП грануле можно выделить два основных направления: плоскость  $ab$ , в которой плотность критического тока максимальна ( $J_{ab} = J_{\max}$ ), и ось  $c$  (перпендикулярная плоскости  $ab$ ), в направлении которой критическая плотность тока минимальна ( $J_c = J_{\min}$ ). Экспериментально получено, что  $k_j = J_{ab} / J_c = 2, 5$  и более.

В экспериментах внешнее магнитное поле  $B_e$  было направлено под углом  $\eta$  к направлению  $c$ . При пульсирующем внешнем магнитном поле угол  $\eta = \text{const}$ , а его амплитуда изменяется во времени  $B_{ea} = f(t)$ . В процессе намагничивания внешнее магнитное поле экранируется токами, протекающими в поверхностном слое ВТСП гранулы и равными критическим значениям. Их значение изменяется в зависимости от направления (плоскость  $ab$  или направление  $c$ ) и угла наклона внешнего магнитного поля к оси  $c$ , что, в конечном счете, существенным образом влияет на расчет намагниченности шаровидной ВТСП гранулы. На основе экспериментальных данных о характере изменения критического тока при изменении направления его протекания в диапазоне углов между плоскостью  $ab$  и направлением  $c$  была использована следующая полуэмпирическая зависимость [3]:

$$J_c = 0,5J_{ab}[(1 + k_j) + (1 - k_j)\cos j_j], \quad (30)$$

где  $j_j$  - угол между направлением тока и плоскостью  $ab$  (при  $j_j = 0 - J = J_{ab}$ ;  $j_j = 90 - J = J_c$ ).

В дальнейшем при обработке экспериментальных данных было принято допущение: в первом приближении при расчете зависимости  $M(H)$  и гистерезисных потерь можно воспользоваться принципом суперпозиции, полагая

$$Q = Q_{ab} + Q_c; \quad M = M_{ab} + M_c. \quad (31)$$

Здесь значения гистерезисных потерь и магнитных моментов от токов в плоскости  $ab$  ( $M_{ab}$ ) и в плоскости, перпендикулярной плоскости  $ab$  ( $M_c$ ), определяются по рассмотренным выше моделям для шаровидных ВТСП гранул. Именно этот подход использован ниже при построении расчетных

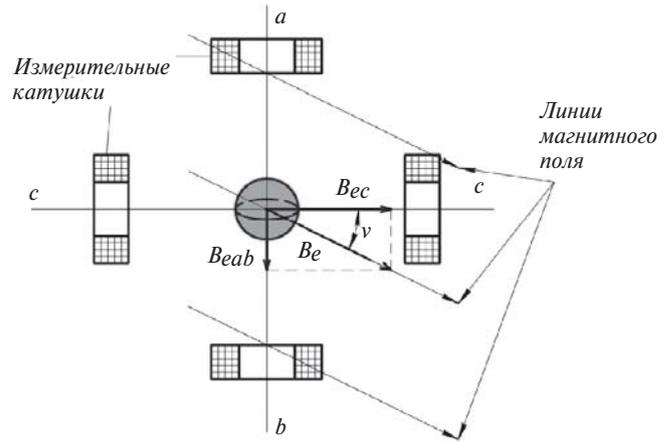


Рис. 5. ВТСП гранула в пульсирующем магнитном поле, ось которого направлена под углом  $\eta$  к оси  $c$

соотношений для обработки экспериментальных данных.

**Основные расчетные соотношения для определения  $M(H)$  и  $Q(H)$ .** Рассматривается ВТСП гранула в форме шара радиусом  $R_a$  в пульсирующем внешнем магнитном поле  $B_e$ , направленном под углом  $\eta$  к оси  $c$  (рис. 5).

Соответствующие компоненты этого поля вдоль осей анизотропии критических токов определяются как

$$B_{eab} = B_e \sin \eta; \quad B_{ec} = B_e \cos \eta. \quad (32)$$

Будем считать, что экранирующие токи  $J_j$ , индуцируемые внешним магнитным полем в поверхностном слое, создают внутри шаровидной гранулы однородное магнитное поле, компоненты которого в направлении  $ab$  и  $c$  равны по значению и противоположны по направлению соответствующим компонентам приложенного внешнего поля. Известно, что в объеме внутри шара такое поле может быть создано за счет распределения токов по поверхности сферы по закону  $\cos Q$ , где  $Q$  – угол, отсчитываемый от соответствующей координатной оси шара.

В рамках модели Бина индуцированное магнитное поле  $B_i$  ( $B_{iab}, B_{ic}$ ) внутри сферы от экранирующих токов  $J_j$  определяется как

$$B_{iab} = \frac{2}{3} \mu_0 d_{mab} J_c R_a; \quad B_{ic} = \frac{2}{3} \mu_0 d_{mc} J_{ab} R_a, \quad (33)$$

где  $d_{mab}$ ,  $J_c$  – максимальная толщина токового слоя и плотность индуцированного критического тока от составляющей внешнего магнитного поля  $B_{eab}$ , направленной вдоль плоскости  $ab$ ;  $d_{mc}$ ,  $J_{ab}$  – соответствующие значения от составляющей  $B_{ec}$ , параллельной направлению  $c$ .

Для упрощения дальнейшего изложения введены следующие обозначения. Обобщенным индексом  $n$  обозначим направление соответствующей ко-

ординаты внешнего магнитного поля, а индексом  $n^*$  – направление, перпендикулярное ему, т.е. при  $n = ab$   $n^* = c$ , а при  $n = c$   $n^* = ab$ . Тогда формулы (33) можно записать следующим образом:

$$B_{in} = \frac{2}{3} \mu_0 (d_m)_n J_{n^*} R_a, \quad (34)$$

где  $n = ab$ ;  $n^* = c$  или  $n = c$ ;  $n^* = ab$ .

Внутри ВТСП гранулы сумма внешнего  $B_e$  и индуцированного  $B_i$  магнитных полей равна нулю. Из этого условия можно определить относительную глубину проникновения соответствующих компонент внешнего магнитного поля ( $B_{en} = \mu_0 H_e$  – компонента внешнего поля):

$$(d_m)_n = \frac{(B_e)_n}{\frac{2}{3} \mu_0 J_{n^*}} = \frac{3 H_{en}}{2 J_{n^*} R_a}. \quad (35)$$

На начальном этапе намагничивания для расчета  $n$ -й компоненты магнитного момента  $M_{mn}$  гранулы, определяемой воздействием внешнего магнитного поля (здесь  $n = ab$  или  $n = c$ ), можно использовать соотношение

$$M_{mn} = - J_{n^*} (d_m)_n R_a \left[ 1 - \frac{27\rho}{64} d_{mn} + \frac{4}{5} d_{mn}^2 - \frac{15\rho}{256} d_{mn}^3 \right] \quad (36)$$

где  $(d_m)_n$  – относительная глубина проникновения  $n$ -й компоненты внешнего магнитного поля.

Соотношения (35) и (36) позволяют рассчитать процесс первичного намагничивания ВТСП гранулы (при  $J_c = \text{const}$ ), когда внешнее магнитное поле меняется от 0 до максимального значения  $B_{em}$ . При уменьшении магнитного поля от  $B_{em}$  до 0 и далее до  $-B_{em}$  экранирующие токи в наружной поверхностной области ВТСП гранулы меняют знак. Получающееся распределение токов и полей можно представить в виде суперпозиции исходного токового слоя толщиной  $d_{mn}$  с плотностью тока  $J_{n^*}$  и нового поверхностного слоя с плотностью тока  $2J_{n^*}$  и толщиной  $d_{mn^*}$ . Значение  $d_{mn}$  определяется из условия компенсации изменения внешнего магнитного поля  $DH_e$  токами двойной плотности в этом слое. Таким образом, аналогично (35) можно записать:

$$(d_{rm})_n = \frac{DH_{en}}{\frac{2}{3} 2 J_{n^*} R_a} = \frac{3 DH_{en}}{4 J_{n^*} R_a}. \quad (37)$$

С учетом (36) магнитный момент ВТСП гранулы, обусловленный токами с плотностью  $2J_{n^*}$  в слое  $d_{rm}$ , определяется соотношением [7]:

$$M_{rm} = - 2 J_{n^*} d_{rm} R_a \left[ 1 - \frac{27\rho}{64} d_{rm} + \frac{4}{5} d_{rm}^2 - \frac{15\rho}{256} d_{rm}^3 \right] \quad (38)$$

Результирующая намагниченность ВТСП гранулы при перемагничивании определяется из (19):

$$M_n = M_{rm} - M_{mn}, \quad (39)$$

где  $M_{mn}$  – значение намагниченности, когда все экранирующие токи текут в одном направлении (при амплитудном значении внешнего магнитного поля  $H_e = \pm H_{e0}$ ). При этом полное проникновение магнитного поля наступает при  $d_{rm} = 1$ . Далее с ростом  $DH$  значение намагниченности определяется только плотностью токов. Формула (39) позволяет рассчитать зависимость  $M_n = f(H_{en})$ , т.е. петлю гистерезиса. Гистерезисные потери энергии за один цикл перемагничивания в единице объема [7]:

$$Q_{rn} = \oint M dH = 2 \int_0^{H_m} M_n dH_e - 2 M_{an} H_m, \quad (40)$$

где  $H_m = 2 H_{ea}$  – двойная амплитуда внешнего магнитного поля.

При вычислении интеграла в (40) зависимость намагниченности ВТСП гранулы от внешнего магнитного поля, т.е.  $M_n = f(H_{en})$ , определяется с учетом (34)–(36).

При  $J_c = \text{const}$  (модель Бина) можно получить выражения удельных гистерезисных потерь для  $b = d^* = H_{ea} / H_{ep} < 1$ :

$$Q_{rn} = \frac{B_{en}^2}{2 \mu_0} q_1 \quad \text{при } b = H_{ea} / H_{ep} \leq 1; \quad (41)$$

$$Q = Q_p + 4 M_p (H_m - H_p) - \frac{B_e^2}{2 \mu_0} q_2$$

при  $b = H_{ea} / H_{ep} > 1$ ,  
где

$$q_1 = 18 a \left[ 1 - \frac{4}{15 a} d + \frac{1}{5} d^2 \right], \quad a = \frac{3\rho}{32} \gg 0,2944; \quad (42)$$

$$q_2 = \frac{3,4952}{b} - \frac{1,6718}{b^2}, \quad Q_p = Q_{rn} (b = 1) \gg 1,82 H \frac{B_{en}^2}{2 \mu_0}. \quad (43)$$

Суммарные гистерезисные потери вычисляются путем аддитивного сложения составляющих  $Q_{ab}$  и  $Q_c$ :

$$Q_S = \sum_{n=ab}^c Q_{rn}. \quad (44)$$

Получение аналитических соотношений для расчета гистерезисных потерь при иных, чем  $J = \text{const}$ , зависимостях  $J = J(B)$  критической плотности тока от внешнего переменного магнитного поля достаточно сложно. Однако при программной реализации описанного здесь алгоритма учесть зависимость  $J = J(B)$  достаточно просто в процессе

проведения численных расчетов. В дальнейшем зависимость критической плотности тока от внешнего магнитного поля аппроксимировалась так:

$$J_n = J_{n0} \quad \text{при} \quad |b_e| \leq b_{e0};$$

$$J_n = \frac{J_{n0}}{(B_e / B_{кр})^a b} \quad \text{при} \quad |b_e| > b_{e0}. \quad (45)$$

**Сопоставление расчетных и опытных данных.** На основе изложенного выше была разработана программа численного расчета магнитного момента ВТСП шара и гистерезисных потерь в нем при воздействии пульсирующего переменного магнитного поля. В расчетах принималось, что радиус СП шара  $r_a = 0,00125$  м, амплитуда внешнего магнитного поля изменялась в диапазоне 0,1, 2 Тл, угол  $\theta$  его наклона к направлению  $c$  варьировался в диапазоне 0, 75°. Характерная критическая плотность тока в плоскости  $ab$  равна  $J_{ab0} \gg 2 \cdot 10^8$  А/мм<sup>2</sup>, в на-

правлении  $c$  плотность тока в  $k_I$  раз меньше, т.е.  $J_{c0} = J_{ab0} / k_I$ .

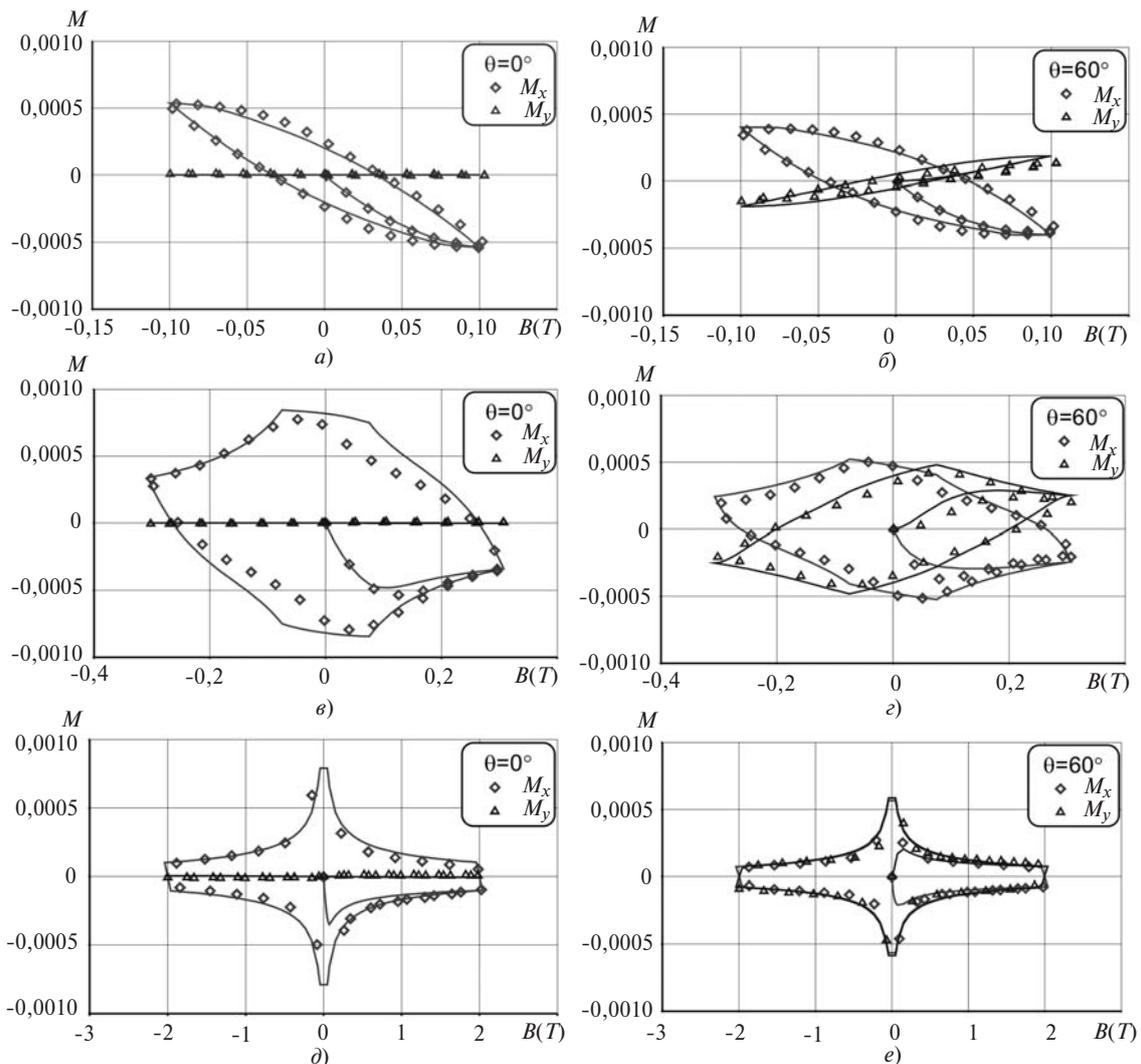
На рис. 6, а–е представлены экспериментальные и расчетные зависимости магнитных моментов СП гранулы вдоль направления магнитного поля  $M_x$  и в перпендикулярном ему направлении  $M_y$  от внешнего магнитного поля  $B_e$ . Значения  $M_x$  и  $M_y$  рассчитывались по выражениям:

$$M_x = [M_{ab} \sin \eta + M_c \cos \eta] V_{гр}; \quad (46)$$

$$M_y = [M_{ab} \sin \eta - M_c \cos \eta] V_{гр},$$

где  $V_{гр} = 4/3 \pi R_a^3$  – объем гранулы.

На рис. 6, а и б показаны зависимости  $M_x(B_e)$  и  $M_y(B_e)$  при  $B_{ea} = 0,1$  Тл;  $J_{ab0} = 2,3 \cdot 10^8$  А/мм<sup>2</sup>;  $k_I = 2,5$ ;  $B_{кр} = 0,075$ ;  $a_b = 0,25$  для двух значений угла  $\theta = 0$  и 60°. Как видно, расчетные и экспериментальные кривые совпадают с достаточно высокой точностью, кроме того, используемые парамет-



**Рис. 6.** Зависимость составляющих магнитного момента от внешнего пульсирующего магнитного поля при различных углах наклона его оси к плоскости  $ab$ ; значками отмечены экспериментальные данные, сплошные линии – расчет по предложенным алгоритмам; а и б –  $B_{\max} = 0,1$  Тл; в и г –  $B_{\max} = 0,31$  Тл; д и е –  $B_{\max} = 2$  Тл

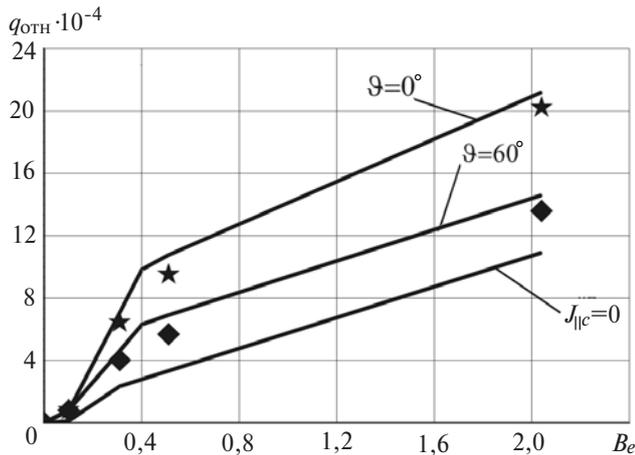


Рис. 7. Удельные гистерезисные потери в ВТСП YBCO грануле (значки — экспериментальные данные, сплошные линии — расчет по предложенным алгоритмам) при различных значениях угла наклона оси внешнего пульсирующего магнитного поля к плоскости  $ab$

ры магнитного поля ( $B_{ea} \gg 0,1$  Тл) близки к значениям, при которых происходит полное проникновение магнитного поля в ВТСП гранулу.

На рис. 6, в и г представлены соответствующие зависимости для  $B_{ea} = 0,31$  Тл, на рис. 6, д и е — для  $B_{ea} = 2$  Тл при тех же исходных данных, кроме  $J_{ab0}$ . В данном варианте расчета удовлетворительное совпадение кривых потребовало уменьшения  $J_{ab0}$  до  $2 \times 10^8$  А/мм<sup>2</sup> при  $B_{ea} = 0,31$  Тл и до  $1,5 \times 10^8$  А/мм<sup>2</sup> при  $B_{ea} = 2$  Тл.

На рис. 7 показано изменение относительных значений гистерезисных потерь  $q$  в грануле шаровидной формы в зависимости от значения амплитуды внешнего магнитного поля  $V_{em}$  при различных значениях угла  $\vartheta$ . Видно, что при увеличении  $V_{em}$  гистерезисные потери при пульсирующем магнитном поле заметно возрастают, причем тем сильнее, чем меньше угол между магнитным полем и направлением  $c$ . Сопоставление опытных зависимостей  $M$  и  $q$  с рассчитанными по предложенным теоретическим моделям показало, что при правильной аппроксимации  $J_c(H)$  они находятся в приемлемом соответствии.

Проведенное в статье исследование объемного ВТСП шара может быть использовано для уточнения и дальнейшего развития методов расчета и проектирования различных сверхпроводниковых устройств.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Charles P. Pools, Horacio A. Farach, Richard J. Creswick. Superconductivity. — Academy Press, 1995, 620 p.
2. Физические свойства высокотемпературных сверхпроводников/Под ред. Д.М. Гинзберга. — М.: Мир, 1990, 543 с.
3. Ковалев Л.К., Пенкин В.Т., Ковалев К.Л., Конеев С.М.-А., Полтавец В.Н., Ильясов Р.Н., Дежин В.С. Электрические машины и устройства на основе массивных высокотемпературных сверхпроводников. — М.: Физматлит, 2010, 396 с.
4. Mayergoyz I. Nonlinear Diffusion of Elektromagnetic Fields (with applications to eddy currents and superconductivity).— Academic press Ltd, 1998, 412 p.
5. Бертинов А.И., Алиевский Б.Л., Илюшин К.В., Ковалев Л.К., Семенихин В.С. Сверхпроводниковые машины, электрические машины и магнитные системы/Под ред. Б.Л. Алиевского. — М.: Изд-во Московского авиационного института (МАИ), 1993, 340 с.
6. Уилсон Н. Сверхпроводящие магниты. — М.: Мир, 1985, 406 с.
7. Тамм И.Е. Основы теории электричества. — М.: Наука, 1966.
8. Зенкевич В.Б., Сычев В.В., Альтов В.А., Кремлев М.Г. Стабилизация сверхпроводящих магнитных систем. — М.: Издательский дом Московского энергетического института, 2008, 464 с.
9. Ковалев Л.К., Ковалев К.Л., Конеев С.М.-А. Электромеханические преобразователи на основе массивных высокотемпературных сверхпроводников. — М.: Изд-во МАИ (Принт), 2008, 440 с.
10. Гуревич А.В., Минц Р.Г., Рахманов А.Л. Физика композитных сверхпроводников. — М.: Наука, 1987, 240 с.
11. High temperature superconductors (HTS) for energy application/ Edit. by Ziad Melhem. — Woodhead Publishing Ltd, 2013, 403 p.

[28.12.15]

*А в т о р ы: Ковалев Лев Кузьмич окончил факультет «Энергомашиностроение» Московского высшего технического училища им. Баумана в 1964 г. и механико-математический факультет Московского государственного университета в 1968 г. В 1996 г. защитил докторскую диссертацию по авиационно-космической электроэнергетике в Московском авиационном институте (МАИ). Скончался в 2014 г.*

*Ковалев Константин Львович окончил в 1993 г. факультет «Экспериментальная и теоретическая физика» Московского инженерно-физического института (МИФИ). В 2005 г. защитил докторскую диссертацию по сверхпроводниковым электрическим машинам. Профессор, заведующий кафедрой «Электроэнергетические, электромеханические и биотехнические системы» МАИ.*

*Конеев Сулейман Мухамед-Алимович окончил факультет «Системы автоматического управления и приборостроения летательных аппаратов» МАИ в 1966 г. В 1986 г. защитил в МАИ кандидатскую диссертацию по авиационно-космической энергетике. Старший научный сотрудник кафедры «Электроэнергетические, электромеханические и биотехнические системы» МАИ.*

*Семенихин Валерий Сергеевич окончил в 1965 г. электромеханический факультет Московского энергетического института (МЭИ). В 1980 г. защитил кандидатскую диссертацию. Старший научный сотрудник кафедры «Электроэнергетические, электромеханические и биотехнические системы» МАИ.*

## A Superconducting Spheroid in Pulsating and Rotating Magnetic Field

**KOVALEV Lev Kuz'mich** (Moscow Aviation Institute (MAI), Moscow, Russia) – Dr. Sci. (Eng.). He died in 2014

**KOVALEV Konstantin L'vovich** (MAI, Moscow, Russia) – Professor, Head of the Department, Dr. Sci. (Eng.)

**KONEYEV Suleiman Mukhamed-Alimovich** (MAI, Moscow, Russia) – Senior Scientist, Cand. Sci. (Eng.)

**SEMENIKHIN Valerii Sergeyevich** (MAI, Moscow, Russia) – Senior Scientist, Cand. Sci. (Eng.)

*Structurally, modern bulk high-temperature superconducting (HTSC) materials contain individual superconducting (SC) domains (granules) separated by thin nonsuperconducting gaps. The shape, size, and physical characteristics of SC domains are determined by the type of ceramics and by its manufacturing technology. However, in analyzing a bulk HTSC placed in an external magnetic field, such domains can in a first approximation be regarded in the majority of cases as separate HTSC spheroids. The article considers electrodynamic and hysteresis processes in an HTSC spheroid placed in alternating magnetic field. It is supposed in the analysis that an HTSC spheroid may have a single-domain or polycrystalline structure. The article generalizes, refines, and supplements the results from the investigations of an HTSC ball that are partially presented in [3].*

*Key words; HTSC spheroid, magnetic field, single-domain and polycrystalline structure, mathematical model, hysteresis losses, analytic and experimental investigations*

### REFERENCES

1. **Charles P. Pools, Horacio A. Farach, Richard J. Creswick.** Superconductivity. – Academy Press, 1995, 620 p.
2. **Fizicheskiye svoystva vysokotemperaturnykh sverkhprovodnikov/Pod red. D.M. Ginzberga** (Physical characteristics of high-temperature superconductors/Edit. by D.M. Ginzberg). Moscow, Publ. «Mir», 1990, 543 p.
3. **Kovalev L.K., Penkin V.T., Kovalev K.L., Koneyev S.M.-A., Poltavets V.N., Il'yasov R.I., Dezhin D.S.** *Elektricheskiye mashiny i ustroystva na osnove massivnykh vysokotemperaturnykh sverkhprovodnikov* (Electrical machines and devices on the basis of bulk high-temperature superconductors). Moscow, Publ. Fizmatlit, 2010, 396 p.
4. **Mayergoyz I.** Nonlinear Diffusion of Elektromagnetic Fields (with applications to eddy currents and superconductivity). – Academic press Ltd, 1998, 412 p.
5. **Bertinov A.I., Aliyevskii B.L., Ilyushin K.V., Kovalev L.K., Semenikhin V.S.** *Sverkhprovodnikovyye mashiny, elektricheskiye mashiny i magnitnyye sistemy/Pod red. B.L. Aliyevskogo* (Superconducting machines, electrical machines and magnetic systems/Edit. by B.L. Aliyevskii). Moscow, Publ. Moscow Aviation Institute, 1993, 340 c.
6. **Uilson N.** *Sverkhprovodyashchiye magnity* (Superconducting magnets). Moscow, Publ. «Mir», 1985, 406 p.
7. **Tamm I.E.** *Osnovy teorii elektrichestva* (Basis of electricity theory). Moscow, Publ. «Nauka», 1966,
8. **Zenkevich V.B., Sychev V.V., Al'tov V.A., Kremlev M.G.** *Stabilizatsiya sverkhprovodyashchikh magnitnykh sistem* (Stabilization of superconducting magnetic systems). Moscow, Publ. House of the Moscow Power Engineering Institute, 2008, 464 p.
9. **Kovalev L.K., Kovalev K.L., Koneyev A.M.-A.** *Elektromekhanicheskiye preobrazovateli na osnove massivnykh vysokotemperaturnykh sverkhprovodnikov* (Electromechanical converters on the basis of bulk high-temperature superconductors). Moscow, Publ. Moscow Aviation Institute (Print), 2008, 440 p.
10. **Gurevich A.V., Mints R.G., Rakhmanov A.L.** *Fizika kompozitnykh sverkhprovodnikov* (Physics of composite superconductors). Moscow, Publ. «Nauka», 1987, 240 p.
11. **High temperature superconductors (HTS) for energy application/** Edit. by Ziad Melhem. – Woodhead Publishing Ltd, 2013, 403 p.