

# Оптимизация электромагнитных процессов в асинхронной машине с короткозамкнутым ротором

ФИЛЮШОВ Ю.П.

*Рассмотрены предельные режимы работы асинхронной короткозамкнутой машины, при которых электромагнитный момент может формироваться при минимуме напряжения, подводимого к обмоткам двигателя, или максимуме  $\cos\phi$ , при минимальном токе статора или минимуме тепловых потерь. Определены управляющие воздействия, обеспечивающие в условиях ограничения задания электромагнитного момента оптимальный переход системы из начального состояния изображающих векторов в конечное, при котором осуществляется один из предельных энергетических режимов работы электрической машины; критерием оптимальности является время.*

**Ключевые слова:** электропривод переменного тока, электромагнитные процессы, оптимальное управление

Появление новых методов оптимизации переходных процессов в теории автоматического управления способствовало разработке ряда инженерных методов проектирования. Широкое распространение получили релейные системы оптимизации по быстрдействию. Вместе с тем, оптимизация процессов в электрической машине при ограничении напряжения и, следовательно, алгоритм управления зависят от нагрузки (возмущений). При этом характер изменения возмущений во времени не известен [1]. Это обстоятельство, несмотря на востребованность методов аналитического синтеза систем управления по заданным критериям качества, резко снизило интерес к практическому применению математических методов оптимального управления.

Представленный в [2] метод синтеза системы управления многоканальным объектом, каким является обобщенная электрическая машина, призван исправить это положение. Метод основан на оптимизации управляющих воздействий по быстрдействию не в условиях существующих энергетических ограничений, а в условиях минимизации напряжения, мощности или тепловых потерь, что, не меняя по существу задачи управления, упрощает ее решение.

По предлагаемой методике оптимизирована работа синхронной машины с электромагнитным возбуждением [3] и синхронной машины с постоянными магнитами [4].

В данной работе ставится задача оптимизировать работу асинхронной машины с короткозамк-

*The limiting operating modes of a squirrel-cage induction machine in which the electromagnetic torque can be generated at the minimal voltage applied to the motor windings, maximal  $\cos\phi$  with the minimal stator current, or at the minimal heat losses are considered. The control inputs are determined the application of which at a limited preset value of electromagnetic torque makes it possible to ensure the optimal transition of the system from the initial state of imaging vectors to the final state in which one of the limiting operating modes of the electric machine is implemented; time is used as the optimality criterion.*

**Key words:** AC electric drive, electromagnetic processes, optimal control

нутым ротором (АКЗР). Критерием оптимальности является время. Система управления при оптимизации электромагнитных процессов в электрической машине должна формировать электромагнитный момент в условиях ограничения его задания при минимуме напряжения, подводимого к обмоткам машины, или максимуме  $\cos\phi$ , при минимуме тока статора или минимуме тепловых потерь.

Представим уравнения Кирхгофа, математически описывающие вектор состояния АКЗР в системе вращающихся со скоростью  $\omega_1$  координат  $dq$ :

$$\begin{aligned} U_d &= \frac{d\Psi_d}{dt} + Ri_d - \omega_1 \Psi_q; & \frac{d\Psi_{rd}}{dt} + R_r i_{rd} &= \omega_0 \Psi_{rq}; \\ U_q &= \frac{d\Psi_q}{dt} + Ri_q - \omega_1 \Psi_d; & \frac{d\Psi_{rq}}{dt} + R_r i_{rq} &= \omega_0 \Psi_{rd}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\omega_1$  – угловая скорость вращения поля статора;  $\omega$  – угловая скорость вращения ротора;  $\omega_0 = \omega_1 - \omega$  – абсолютное скольжение;  $i_d, i_q, i_{rd}, i_{rq}, \Psi_d, \Psi_q, \Psi_{rd}, \Psi_{rq}$  – соответствующие токи и потокосцепления статора и ротора в системе вращающихся координат;  $R, R_r$  – активные сопротивления обмоток двигателя. Для упрощения задачи оптимального управления электрической машиной потери в стали и нелинейность характеристики намагничивания не учитываем, число пар полюсов принимаем равным двум. Эти допущения позволяют получить достаточно простые связи между компонентами изображающих векторов, освобождают от изложения многих тонкостей более строгой модели, которое

не столько помогает решению поставленной задачи, сколько затрудняет его.

С учетом принятых допущений взаимосвязь токов и потокосцеплений определяется следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \Psi_d &= Li_d + L_m i_{rd}; & \Psi_{rd} &= L_m i_d + L_r i_{rd}; \\ \Psi_q &= Li_q + L_m i_{rq}; & \Psi_{rq} &= L_m i_q + L_r i_{rq}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $L, L_r$  – индуктивности обмоток статора и ротора;  $L_m$  – взаимная индуктивность статора и ротора.

Ориентировав вращающуюся систему координат по потокосцеплению ротора  $\Psi_{rq} = 0$ , становится проще анализировать динамику процессов формирования электромагнитного момента:

$$m = -(\Psi_{rd} i_{rq} - \Psi_{rq} i_{rd}) = -\Psi_{rd} i_{rq}. \quad (3)$$

На рис. 1, представляющем векторную диаграмму работы АКЗР, обозначено:  $\beta$  – угол, определяющий положение вектора потокосцепления статора относительно потокосцепления ротора;  $\mu$  – угол, определяющий положение вектора тока статора;  $\varphi$  – угол между вектором тока статора и вектором ЭДС от потокосцепления статора.

Состояние АКЗР зависит от нагрузки и положения изображающих векторов, которое в отличие от обобщенной электрической машины зависит от одного аргумента. Эта особенность позволяет выявить взаимосвязи между величинами  $\omega_0, \varphi, \beta, \mu$ , определяющими положение изображающих векторов в системе координат, ориентированной по потокосцеплению ротора:

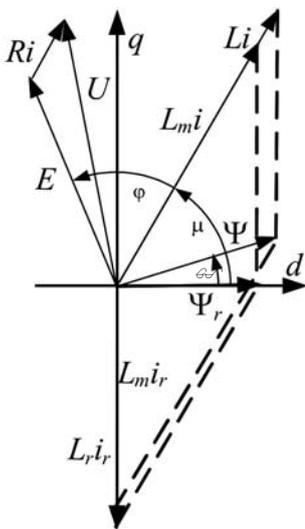


Рис. 1

$$\begin{aligned} \omega_0 &= -\frac{R_r i_r}{\Psi_{rd}} = \frac{\tan \mu}{T_r}; & T_r &= \frac{L_r}{R_r}; \\ \mu(\beta) &= ar \tan \left[ \frac{L_r L}{L_r L - L_m^2} \tan(\beta) \right]; \\ \tan(\varphi) &= \tan \mu \left( \frac{L_r L}{L_m^2 \sin(\mu)^2} - 1 \right), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $T_r$  – постоянная времени цепи ротора.

Используя (4), при постоянном значении электромагнитного момента модули изображающих векторов можно выразить в зависимости от одного аргумента, например углов  $\beta$  или  $\mu$ :

$$\begin{aligned} i(\mu) &= \sqrt{\frac{m L_r}{L_m^2 \sin(\mu) \cos(\mu)}}; & i_r(\mu) &= \sqrt{\frac{m \tan(\mu)}{L_r}}; \\ \Psi(\mu) &= \sqrt{m \tan(\mu) \left( \frac{L^2 L_r}{L_m^2 \sin(\mu)^2} + \frac{2 L_r L - L_m^2}{L_r} \right)}; \\ \Psi_r(\mu) &= \sqrt{\frac{m L_r}{\tan(\mu)}}. \end{aligned} \quad (5)$$

На рис. 2 показаны возможные состояния асинхронной машины при постоянном значении положительного электромагнитного момента в области аргумента  $\beta$ :

$$\beta \in \left( 0, \frac{\pi}{2} \right).$$

Область аргументов, где положительный электромагнитный момент физически сформировать нельзя, рассматривать не будем. Из рисунка следует, что при постоянном значении электромагнитного момента токи и потокосцепления зависят от положения вектора потокосцепления статора. Это позволяет утверждать, что от положения вектора потокосцепления статора зависят энергетические режимы работы электрической машины.

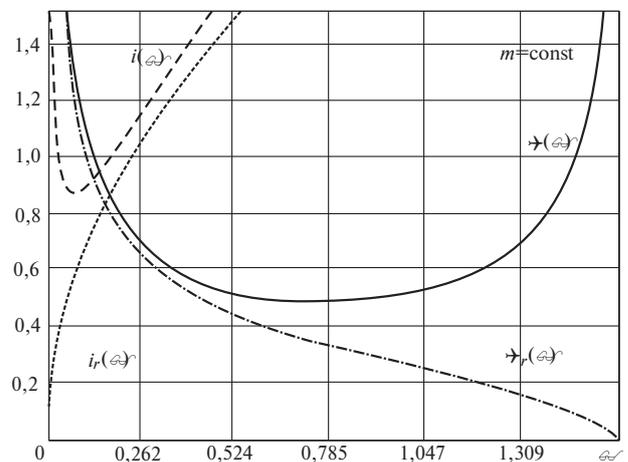


Рис. 2

Выявим предельные режимы работы АКЗР. Положение изображающих векторов, при котором электромагнитный момент формируется при минимуме тока статора, в условиях принятых допущений хорошо известно:  $\mu_i = \pi/4$ . В условиях минимума потокосцепления статора электромагнитный момент формируется при другом положении изображающих векторов:  $\mu_\psi = a \tan \frac{L_r L}{L_r L - L_m^2}$ . Такой

закон управления позволяет минимизировать напряжение, подводимое к обмоткам двигателя. Вместе с тем, снижение напряжения вызывает увеличение токов и, следовательно, рост тепловых потерь  $\Delta P = R_i^2 + R_r i_r^2$ . Потери в электрической машине определяют один из основных энергетических показателей — коэффициент полезного действия:

$$\eta = \frac{\omega m}{\omega m + \Delta P} = \frac{\omega}{\omega + F(\mu)}, \quad (6)$$

где

$$F(\mu) = \frac{\Delta P}{m} = \frac{R L_r}{L_m^2 \cos(\mu) \sin(\mu)} + \frac{R_r}{L_r} \tan(\mu).$$

Существенное влияние на энергетическую эффективность машины оказывает  $\cos(\varphi)$ . От угла  $\varphi$  (между векторами тока статора и ЭДС от потокосцепления статора) зависит энергия, накапливаемая в обмотках АКЗР:

$$W = \frac{1}{2}(\Psi_d i_d + \Psi_q i_q) = \frac{1}{2} m f(\mu); \quad f(\mu) = \tan(\varphi), \quad (7)$$

где  $F(\mu)$ ,  $f(\mu)$  — функции энергетического состояния [4]; при постоянном значении электромагнитного момента их изменения в зависимости от угла  $\beta$  показаны на рис. 3.

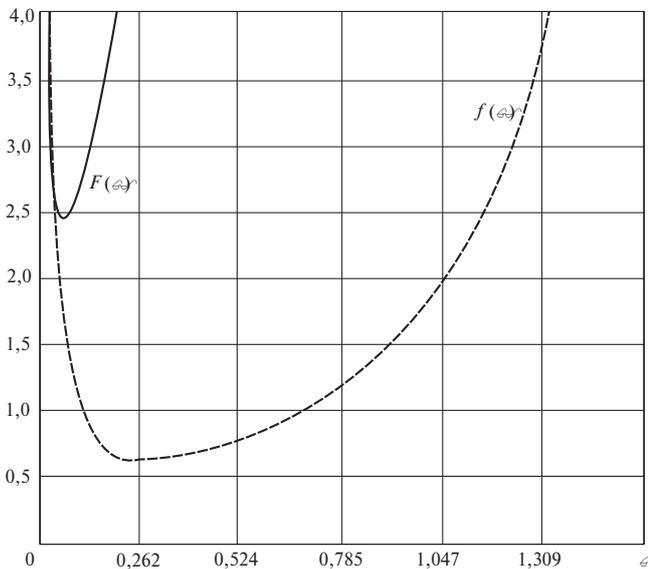


Рис. 3

Из рис. 3 следует, что функции имеют явно выраженный минимум. Формирование электромагнитного момента в условиях минимума потерь достигается при минимуме функции энергетического состояния

$$F(\mu)_{\min} = \frac{2\sqrt{R(R_r L_m^2 + R L_r^2)}}{L_m^2} \quad (8)$$

и осуществляется при определенном положении изображающих векторов

$$\mu_{F \min} = a \sin \left( L_r \sqrt{\frac{R}{R_r L_m^2 + 2 R L_r^2}} \right).$$

Формирование электромагнитного момента при минимуме функции энергетического состояния

$$f(\mu)_{\min} = \frac{2\sqrt{L L_r (L_r L - L_m^2)}}{L_m^2}$$

обеспечивает режим работы при максимальном значении

$$\cos \varphi_{\max} = \sqrt{\frac{L_m^4}{L_m^4 + 4 L_r L (L_r L - L_m^2)}}$$

и достигается при следующем положении изображающих векторов:

$$\mu_{f \min} = a \sin \left( \sqrt{\frac{L_r L}{2 L_r L - L_m^2}} \right). \quad (9)$$

Таким образом, исследуя статические режимы, выявлено четыре предельных энергетических режима работы АКЗР: при минимуме тока статора; при минимуме потокосцепления статора; при минимуме суммарных потерь; при максимуме  $\cos(\varphi)$ .

Зная положение вектора потокосцепления статора, становится возможным изменять электромагнитный момент в условиях требуемых энергетических характеристик. Каждый предельный режим работы может обеспечить наилучшее значение только одного показателя качества. В то же время в электроприводе как в энергосиловой установке должны наилучшим образом сочетаться энергетические и динамические свойства.

Динамические свойства электрической машины можно характеризовать временем формирования электромагнитного момента в условиях ограничения или минимизации потенциально реализуемых энергетических характеристик. Определим условия управления, при которых электромагнитные процессы АКЗР осуществляются за минимальное время. В качестве регулируемых переменных (фазовых координат) многоканальной динамической системы (1) выбраны потокосцепления, что позволяет

оценить значение напряжения при синтезе вектора управления.

В установившемся режиме каждому значению электромагнитного момента (3) при заданной ориентации изображающих векторов соответствуют определенные значения проекций вектора потокоцепления:

$$\begin{aligned} \Psi_d &= B_d \sqrt{|m|}; & B_d &= \sqrt{\frac{1}{\tan \beta} \frac{R_r T_2}{L_m L}}; \\ \Psi_q &= B_q \sqrt{|m|}; & B_q &= M \sqrt{\tan \beta \frac{R_r T_2}{L_m L}}; \\ \Psi_{rd} &= \frac{L_m}{L} B_d \sqrt{|m|}; & T_2 &= \frac{L_r L - L_m^2}{R_r L_m}, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $T_2$  – постоянная времени, зависящая от конструктивных параметров машины;  $M$  – единичный коэффициент, знак которого зависит от знака электромагнитного момента:  $m > 0, M = 1; m < 0, M = -1$ .

В соответствии с [2] одним из основных условий оптимального управления многоканальным объектом, каким представляется АД, является равное быстродействие контуров регулируемых переменных. Для реализации этого условия и возможности регулирования задаваемых переменных осуществлена развязка каналов управления по продольной и поперечной осям путем определенного формирования напряжения при синтезе вектора управления:

$$\begin{aligned} U_d &= \frac{u_{dref}}{T_1} - k_d i_d - K_d i_{rd} - \omega_1 \Psi_q; \\ U_q &= \frac{u_{qref}}{T_1} - k_q i_q - K_q i_{rq} + \omega_1 \Psi_d. \end{aligned} \quad (11)$$

За счет выбора коэффициентов обратных связей  $k_d, k_q, K_d, K_q$  уравнения (1) будут соответствовать многоканальной динамической системе 1-го порядка с одинаковым быстродействием контуров регулируемых переменных:

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi_d}{dt} &= -\frac{\Psi_d}{T_1} + \frac{u_{dref}}{T_1}; \\ \frac{d\Psi_{rd}}{dt} &= \frac{\Psi_d}{T_2} - \frac{L}{L_m} \frac{\Psi_{rd}}{T_2} + \omega_0 \Psi_{rq}; \\ \frac{d\Psi_q}{dt} &= -\frac{\Psi_q}{T_1} + \frac{u_{qref}}{T_1}, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $T_1$  – параметр времени динамической системы, характеризующий быстродействие контуров регулируемых переменных; его значение зависит от ко-

эффициентов обратной связи при формировании напряжения (11):

$$T_1 = \frac{L}{R + k_d} = \frac{L_m}{K_d} = \frac{L}{R + k_q} = \frac{L_m}{K_q}. \quad (13)$$

Отношение постоянных времени  $T_2$  и  $T_1$  удобно оценить коэффициентом  $K = T_2 L_m / T_1 L$ . Полагая, что неизмеряемые координаты вектора состояния вычисляются достаточно точно, и сколь-

жение  $\omega_0 = \frac{\Psi_q}{T_2 \Psi_{rd}}$  обеспечивает выполнение условий ориентации вращающейся системы координат по потокоцеплению ротора  $\Psi_{rq} = 0$ .

Запишем уравнения состояния системы (1) при управлении (11) в векторной форме:

$$\dot{\mathbf{f}}_{\mu} = \mathbf{f}(\Psi, U); \quad \mathbf{f}(\Psi, U) = \mathbf{A}\mathbf{f}_{\mu} + \mathbf{B}U, \quad (14)$$

где матрицы коэффициентов и фазовых координат имеют вид:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_1} & 0 \\ \frac{1}{T_2} & 0 & -\frac{L}{L_m} \frac{1}{T_2} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{f}_{\mu} = \begin{bmatrix} \Psi_d \\ \Psi_q \\ \Psi_{rd} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_d \\ MB_q \\ 0 \end{bmatrix};$$

$U = \sqrt{U_{ref}}$ ;  $U_{ref}$  – сигнал задания электромагнитного момента;  $B_d, B_q$  – коэффициенты (10), посредством которых возможно задавать ориентацию вектора потокоцепления статора относительно потокоцепления ротора;  $M$  – единичный коэффициент, знак которого соответствует знаку сигнала задания электромагнитного момента.

Используя принцип максимума [5], рассмотрим управляющие воздействия (11), под действием которых в условиях ограничения сигнала  $U_{ref}$  осуществляется оптимальный переход системы (1) из начального состояния изображающих векторов в конечное, обеспечивающее один из предельных режимов работы машины. Критерием оптимальности является время.

Гамильтониан быстродействия  $H$  динамической системы (14) запишем в виде скалярного произведения векторов:

$$H = \mathbf{S}^T \mathbf{r}, \quad (15)$$

$$\text{где } \mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix};$$

вектор, являющийся решением сопряженной системы уравнений:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{f}_{\mu}^T}; \quad (16)$$

$$-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{f}\mu^T} = \begin{pmatrix} \frac{KLS_1}{L_m T_2} - \frac{S_3}{T_2} \\ \frac{KLS_2}{L_m T_2} \\ \frac{LS_3}{L_m T_2} \end{pmatrix}.$$

Решив (16), получим выражение для сопряженного вектора:

$$\mathbf{S}(t) = \begin{pmatrix} C_1 e^{\frac{KLt}{L_m T_2}} + \frac{C_3 L_m e^{\frac{KLt}{L_m T_2}}}{L(K-1)} \\ C_2 e^{\frac{KLt}{L_m T_2}} \\ C_3 e^{\frac{KLt}{L_m T_2}} \end{pmatrix}.$$

Условия достижения максимума гамильтониана  $\frac{\partial H}{\partial U} = 0$  приведем к виду:

$$\frac{BdS_1}{T_1} + \frac{BqS_2}{T_1} = 0. \tag{17}$$

Так как значения  $S_1, S_2$  зависят от времени, единственным условием, удовлетворяющим (17), является пропорциональное изменение проекций сопряженного вектора. Выполнение этого условия невозможно без соблюдения основного требования к оптимальному управлению машиной переменного тока – пропорционального изменения регулируемых переменных. На основании (14), (16) и (17) определены взаимосвязи управляющих воздействий основной системы и величин  $C_1, C_2, C_3$  сопряженной системы уравнений:

$$B_d U = \frac{T_1}{C_1}; B_q U = -\frac{T_1}{C_2}; C_3 = 0. \tag{18}$$

При выполнении (18) и нулевых начальных условиях получены экстремали регулируемых переменных путем решения системы (14):

$$\mathbf{f}\mu = \begin{pmatrix} B_d U \left( 1 - e^{-\frac{KLt}{L_m T_2}} \right) \\ B_q U \left( 1 - e^{-\frac{KLt}{L_m T_2}} \right) \\ \frac{B_d U L_m}{(K-1)L} \left( K \left( 1 - e^{-\frac{KLt}{L_m T_2}} \right) - \left( 1 - e^{-\frac{KLt}{L_m T_2}} \right) \right) \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Решение (19) основной системы уравнений (1) при формировании управления (11), обеспечиваю-

щего желаемое быстродействие контуров регулируемых переменных (13), полностью отвечает условию максимального значения гамильтониана независимо от значений коэффициентов  $B_d, B_q$ . Значение  $K > 1$  выбирается в зависимости от желаемого быстродействия контуров регулируемых переменных; при  $K = 1$  основная система уравнений не может иметь решения.

На рис. 4 показана зависимость экстремалей (19) от времени при формировании заданного электромагнитного момента в условиях (9):

$$\cos(\varphi) = \max; K = \frac{L + L_m}{L}. \tag{20}$$

На основании (2) и (19) определены аналитические выражения проекций векторов токов статора и ротора:

$$i_d = \frac{B_d U \left[ ((K-1)LL_r + L_m^2) \left( 1 - e^{-\frac{KLt}{L_m T_2}} \right) - KL_m^2 \left( 1 - e^{-\frac{Lt}{L_m T_2}} \right) \right]}{L_m LR_r T_2 (K-1)};$$

$$i_{rd} = -\frac{B_d U}{R_r T_2} \frac{K}{(K-1)} \left( e^{-\frac{Lt}{L_m T_2}} - e^{-\frac{KLt}{L_m T_2}} \right); \tag{21}$$

$$i_q = \frac{L_r}{L_m} \frac{B_q U \left( 1 - e^{-\frac{KLt}{L_m T_2}} \right)}{R_r T_2}; i_{rq} = -\frac{B_q U}{R_r T_2} \left( 1 - e^{-\frac{KLt}{L_m T_2}} \right).$$

В соответствии с (19) и (21) зависимость электромагнитного момента от времени на основании (3) представлена выражением:

$$m = \frac{U_{ref}}{(K-1)} \left( 1 - e^{-\frac{KLt}{L_m T_2}} \right) \left( K \left( 1 - e^{-\frac{Lt}{L_m T_2}} \right) - \left( 1 - e^{-\frac{KLt}{L_m T_2}} \right) \right). \tag{22}$$

Построенные по (21) и (22) графические зависимости показали, что процесс изменения электро-

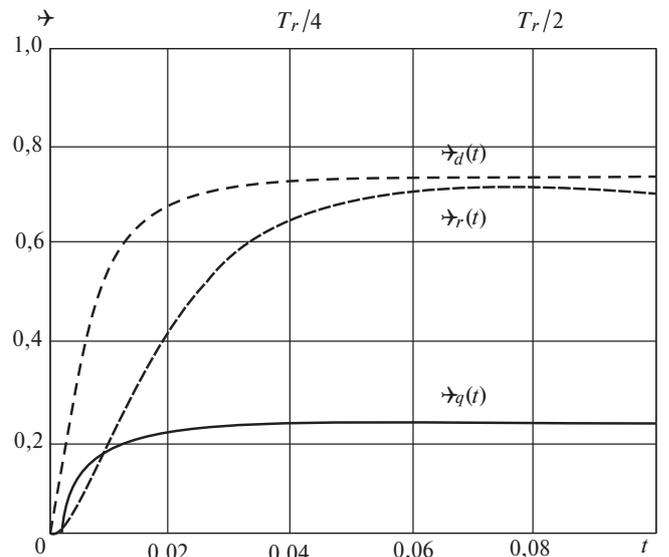


Рис. 4

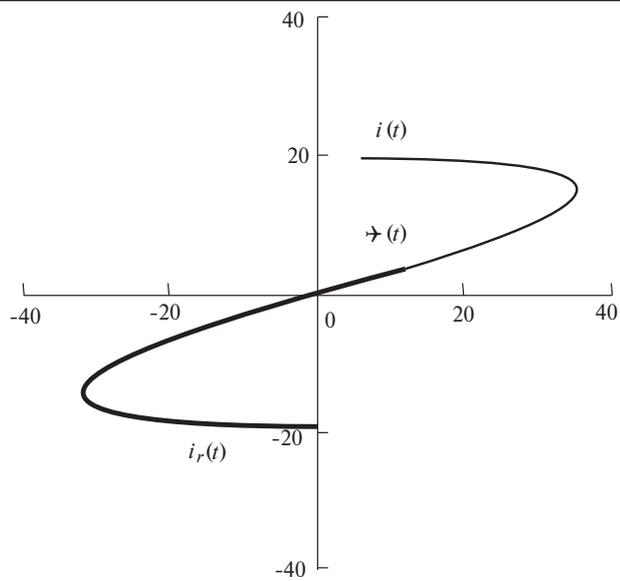


Рис. 5

магнитного момента во времени весьма близок к апериодическому.

При равном быстродействии контуров регулируемых переменных и выполнении условий (17) электромагнитные процессы в АКЗР оптимальны по быстродействию. Фазовые траектории экстремалей при формировании электромагнитного момента представлены на рис. 5.

От положения вектора потокосцепления статора зависят энергетические режимы работы электрической машины, в том числе и КПД. Эта зависимость позволяет расширить задачу управления, на-

кладывая на ее решение дополнительные энергетические ограничения.

Таковыми ограничениями могут быть режимы, не отвечающие желаемым режимам работы. Выбор желаемого режима при формировании электромагнитного момента осуществляется заданием соответствующего положения изображающих векторов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Востриков А.С., Французова Г.А. Теория автоматического регулирования: Учебное пос. – Новосибирск: НГТУ, 2006.
2. Филюшов Ю.П. Оптимальное по быстродействию управление машиной переменного тока. – Электричество, 2011, № 2.
3. Патент № 2092967 (РФ). Электропривод с синхронным двигателем/Ю.П. Филюшов, 1997.
4. Филюшов Ю.П. Многокритериальная оптимизация работы электрической машины переменного тока: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. – НГТУ, 2007.
5. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1976.

[15.11.10]

*Автор: Филюшов Юрий Петрович окончил Новосибирский государственный технический университет в 1985 г. В 2007 г. защитил кандидатскую диссертацию «Многокритериальная оптимизация работы машины переменного тока». Инженер Сибирского филиала ФГУП ВНИКТИ МПС РФ.*

\* \* \*

### ЧИТАТЕЛЯМ, ПОДПИСЧИКАМ, РЕКЛАМОДАТЕЛЯМ ЖУРНАЛА «ЭЛЕКТРИЧЕСТВО»

Подписка в России и странах СНГ принимается в отделениях связи.

Для желающих представить в журнал статью сообщаем, что правила подготовки рукописей публикуются в №№ 6 и 12 каждого года.

Реклама в черно-белом изображении может быть размещена на страницах журнала и на его обложке, а также в виде вкладки.

Возможно размещение рекламы в цветном изображении (стоимость по договоренности).

При повторении той же рекламы в следующем номере – скидка 10%. При публикации той же рекламы в третьем и последующих номерах – скидка 20%. Стоимость оплаты рекламных статей – по договоренности. Последний срок представления рекламного материала – за 1,5 месяца до выхода номера из печати (обычно номер выходит в середине каждого месяца).

Адрес для переписки: 101000 Москва, Главпочтамт, а/я 648

тел./факс: (7-495)362-7485

E-mail: l.s.kudinova@rambler.ru