

Об электродинамических силах между параллельными шинами с током

ЦИЦИКЯН Г.Н., БОБРОВНИКОВ П.В.

Электродинамическое взаимодействие токоведущих частей автономных электроэнергетических систем необходимо оценивать не только при КЗ, но и в стационарных режимах. При этом важно учитывать вклад в виброактивность сложной ошиновки электрооборудования: трансформаторов, реакторов, преобразователей и др., которая часто не попадает в разряд устройств, длина которых значительно превосходит поперечные размеры. Поэтому расчет электродинамических сил исходя из допущения о плоско-параллельности создаваемого ошиновкой поля может приводить к значительной ошибке. В статье рассмотрены электродинамические взаимодействия в параллельных прямолинейных проводниках с током с учётом конечной длины. На примере шин, проложенных параллельно одной плоскости, получены расчётные выражения для сил взаимодействия при различных соотношениях между длиной шин и наибольшими поперечными размерами.

Ключевые слова: электродинамические силы, параллельные отрезки проводников, коэффициенты взаимной индукции

Уровень электродинамического взаимодействия в токоведущих частях автономных электроэнергетических систем важно оценивать не только при коротких замыканиях в системе, но и в стационарных режимах, учитывая при этом вклад в виброактивность сложной ошиновки электрооборудования: трансформаторов, реакторов, щитов, мощных преобразователей и др. Здесь приоритетное значение отводится методам расчёта, в которых учитывается наибольшее число влияющих факторов в сочетании с относительной простотой получения численных результатов. Известно, что электродинамические силы рассчитываются как на основе закона Био–Савара–Лапласа, так и с помощью коэффициентов индукции с последующим дифференцированием по обобщённой координате [1, 2]. Можно определять электродинамические силы по известным выражениям для коэффициентов взаимной индукции при относительно простой геометрии контуров, составленных, например, из линейных проводников, а затем, используя полученные выражения для сил, обобщить результат с учётом конечного сечения проводников.

Важно подчеркнуть, что упомянутая ошиновка зачастую не подпадает в разряд устройств, у которых длина существенно превосходит наибольшие поперечные размеры. Поэтому расчёт электродинамических сил исходя из предпосылки о плоско-параллельности поля, создаваемого ошиновкой на прямолинейных участках, может приводить к значительной ошибке. Начнём с записи коэффициента взаимной индукции M для двух отрезков прямолинейных параллельных проводников с токами i_1 и i_2 одинакового направления в общем случае их

взаимного расположения (рис. 1) в следующем виде:

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ l_1 \ln \frac{l'_2 + l_2 - l_1 + a_1}{l'_2 - l_1 + a'_1} + l_2 \ln \frac{l'_2 + l_2 + a'_2}{l'_2 + l_2 - l_1 + a'_1} + l'_2 \ln \frac{(l'_2 + l_2 + a'_2)(l'_2 - l_1 + a'_1)}{(l'_2 + l_2 - l_1 + a_1)(l'_2 + a_2)} + a_1 + a_2 - a'_1 - a'_2 \right\}, (1)$$

где

$$a_1 = [(l'_2 + l_2 - l_1)^2 + h^2]^{1/2}; \quad a_2 = [(l'_2)^2 + h^2]^{1/2}; \\ a'_1 = [(l_1 - l'_2)^2 + h^2]^{1/2}; \quad a'_2 = [(l'_2 + l_2)^2 + h^2]^{1/2}. (2)$$

Выражение (1) можно проверить, введя на его основе силу, действующую на отрезки проводников с током i_1 и i_2 в соответствии с определением $f = i_1 i_2 \frac{\partial M}{\partial h}$, и сопоставив результат с выражением в [3]. При этом следует учесть разницу в обозначениях, а также в знаке из-за принятого в [3] противоположного направления токов. В результате должно быть

$$f = \frac{\mu_0}{4\pi h} i_1 i_2 (a_1 + a_2 - a'_1 - a'_2), (3)$$

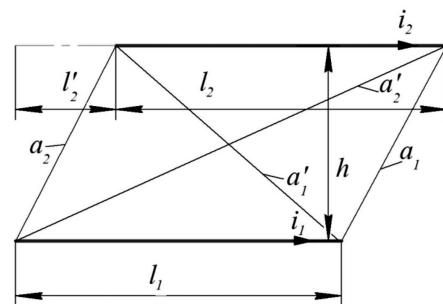


Рис. 1

где a_1, a'_1, a_2, a'_2 – линейные размеры (см. рис. 1).

Вывод выражения (3) дан в Приложении.

В важном частном случае симметричного расположения $l'_2 = (l_1 - l_2)/2$, тогда из (1) получаем:

$$M \Big|_{l'_2 = (l_1 - l_2)/2} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[\frac{l_1 + l_2}{2} \ln \frac{a'_1 + (l_1 + l_2)/2}{h} - \frac{l_1 - l_2}{2} \ln \frac{a_2 + (l_1 - l_2)/2}{h} + a_2 - a'_1 \right], \quad (4)$$

где

$$a'_1 = [(l_1 + l_2)/2]^2 + h^2]^{1/2};$$

$$a_2 = [(l_1 - l_2)/2]^2 + h^2]^{1/2}. \quad (5)$$

Для сопоставления с выражением для M при симметричном расположении, записанным в [4] в соответствии с рис. 2, но с заменой h на обозначение D , преобразуем (4) к виду:

$$M \Big|_{l'_2 = (l_1 - l_2)/2} = \frac{\mu_0 l_2}{2\pi} \left\{ \left(\frac{l_1}{l_2} - 1 \right) \times \right.$$

$$\times \ln \frac{((l_1 + l_2)/2)^2 + D^2]^{1/2} + (l_1 + l_2)/2}{D} -$$

$$\left. \left(\frac{l_1}{l_2} - 1 \right) \ln \frac{((l_1 - l_2)/2)^2 + D^2]^{1/2} + (l_1 - l_2)/2}{D} + \right.$$

$$\left. + \left[\left(\frac{l_1}{l_2} - 1 \right)^2 + \frac{4D^2}{l_2^2} \right]^{1/2} - \left[\left(\frac{l_1}{l_2} + 1 \right)^2 + \frac{4D^2}{l_2^2} \right]^{1/2} \right\} =$$

$$= \frac{\mu_0 l_2}{2\pi} \left\{ 2 \ln \frac{(l_1 + l_2)/2 + (((l_1 + l_2)/2)^2 + D^2)^{1/2}}{D} + \right.$$

$$+ \left(\frac{l_1}{l_2} - 1 \right) \ln \frac{(l_1 + l_2)/2 + (((l_1 + l_2)/2)^2 + D^2)^{1/2}}{(l_1 - l_2)/2 + (((l_1 - l_2)/2)^2 + D^2)^{1/2}} +$$

$$\left. + \left[\left(\frac{l_1}{l_2} - 1 \right)^2 + \frac{4D^2}{l_2^2} \right]^{1/2} - \left[\left(\frac{l_1}{l_2} + 1 \right)^2 + \frac{4D^2}{l_2^2} \right]^{1/2} \right\}.$$

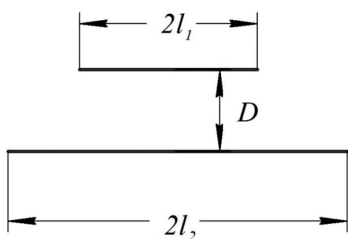


Рис. 2

Заменяя $l_2/2$ на l_1 и $l_1/2$ на l_2 , получим по сравнению с формулой 7.2 в [4] выражение:

$$M = \frac{\mu_0 l_1}{2\pi} \left\{ 2 \ln \frac{l_1 + l_2 + ((l_1 + l_2)^2 + D^2)^{1/2}}{D} - \right.$$

$$\left. - \left(1 - \frac{l_2}{l_1} \right) \ln \frac{l_1 + l_2 + ((l_1 + l_2)^2 + D^2)^{1/2}}{l_2 - l_1 + ((l_2 - l_1)^2 + D^2)^{1/2}} + \right.$$

$$\left. + \left[\left(\frac{l_2}{l_1} - 1 \right)^2 + \frac{D^2}{l_1^2} \right]^{1/2} - \left[\left(\frac{l_2}{l_1} + 1 \right)^2 + \frac{D^2}{l_1^2} \right]^{1/2} \right\}. \quad (6)$$

Действительно, согласно 7.2 в [4] перед вторым членом в (6) стоит знак «+» как впереди круглой скобки, так и внутри нее. Однако это вступает в противоречие с частным случаем, когда $l_1 = l_2 = l/2$ (рис. 2), для которого M приобретает известный вид, как например в [5, 6]:

$$M \Big|_{l_1 = l_2 = l/2} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left\{ \ln \left[\frac{1}{D} + \left(1 + \frac{1}{D} \right)^{1/2} \right] - \left(1 + \frac{D}{l} \right)^{1/2} + \frac{D}{l} \right\}. \quad (7)$$

Согласно 7.2.6 в [4] в этом случае перед вторым логарифмом также появляется множитель 2, хотя он должен обращаться в нуль.

Выше уже отмечалось, что соотношение поперечных размеров и длины ошиновки на прямолинейных участках может иметь существенное значение для расчётной оценки электродинамических сил. Ещё в [7] была предпринята успешная попытка определить коэффициент формы ошиновки с двумя шинами при постоянном токе и низкой частоте, показанной на рис. 3 в обозначениях работы [7]. Шины одинаковой длины располагались в одной плоскости параллельно друг другу (рис. 3). Без повторения деталей вывода выражения (29) в [7] для электродинамической силы между шинами при условии, что $l > d + b = d_0 + 2b$ (рис. 3), запишем это выражение в виде:

$$f = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi b^2} \left\{ \frac{1}{2} (d+b) [(d+b)^2 + l^2]^{1/2} + \right.$$

$$+ \frac{l^2}{2} \ln \left| d+b + ((d+b)^2 + l^2)^{1/2} \right| - d(d^2 + l^2)^{1/2} -$$

$$- l^2 \ln \left| d + (d^2 + l^2)^{1/2} \right| + \frac{d-b}{2} ((d-b)^2 + l^2)^{1/2} +$$

$$+ \frac{l^2}{2} \ln \left| d-b + ((d-b)^2 + l^2)^{1/2} \right| + l[(d-b) \ln(d-b) -$$

$$- 2d \ln d + (d+b) \ln(d+b)] - \frac{b^2}{2l} d - b^2 \left. \right\}. \quad (8)$$

Используя приближения, заимствованные из [8] при $c^2 > (d+b)^2$, как например,

$$[(d+b)^2 + l^2]^{1/2} = l \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{d+b}{l} \right)^2 \right];$$

$$\frac{l^2}{2} \ln[d+b + ((d+b)^2 + l^2)^{1/2}] =$$

$$= \frac{l^2}{2} \left[\ln l + \ln \left[\frac{d+b}{l} + \left(\left(\frac{d+b}{l} \right)^2 + 1 \right)^{1/2} \right] \right] \approx$$

$$\approx \frac{l^2}{2} \left[\ln l + \frac{d+b}{l} - \frac{1}{6} \left(\frac{d+b}{l} \right)^3 \right];$$

получим из (8)

$$f = \frac{\mu_0 i_1 i_2 l}{2\pi d} \left\{ -\frac{d}{l} + \frac{d^2}{2l^2} + \frac{d}{b} \left[\left(\frac{d}{b} - 1 \right) \ln \left(1 - \frac{b}{d} \right) + \left(1 + \frac{d}{b} \right) \ln \left(1 + \frac{b}{d} \right) \right] \right\} = \frac{\mu_0 i_1 i_2 l}{2\pi d} \left[-\frac{d}{l} + \frac{d^2}{2l^2} + k_{\Phi}^{\Gamma} \right], \quad (9)$$

где

$$k_{\Phi}^{\Gamma} = \frac{d}{b} \left[\left(1 + \frac{d}{b} \right) \ln \left(1 + \frac{b}{d} \right) - \left(1 - \frac{d}{b} \right) \ln \left(1 - \frac{b}{d} \right) \right]. \quad (10)$$

Выражение для k_{Φ}^{Γ} как коэффициента формы для сил на единицу длины при горизонтальном расположении шин в пределе для превалирующей длины хорошо известно [2,7,8].

Для сравнения результатов, полученных по (8) и (9), используем данную в [7] оценку относительной разницы результатов расчёта по сравнению со случаем превалирующей длины l для ошиновки с $b=0,2$ м, $d=0,4$ м (см. таблицу). При указанных размерах коэффициент k_{Φ}^{Γ} оказывается равным

$$\frac{0,4}{0,2} (3 \ln 1,5 + \ln 0,5) = 2(1,2164 - 0,6931) \approx 1,047.$$

Во второй строке приведённой ниже таблицы записана относительная разница (в %), рассчитанная в [7] по (8). Относительная разница согласно (9), равная $\frac{d/l - d^2/2l^2}{k_{\Phi}^{\Gamma}} 100\%$, при выбранных

значениях l дана в первой строке таблицы.

Номера формул	Относительная разница (%) при l , м			
	1	2	3	10
(9)	30,6	17,19	11,88	3,74
(8)	31,78	17,28	11,90	3,72

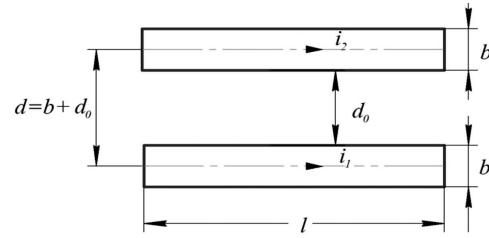


Рис. 3

Как видно из таблицы, различия в оценках весьма невелики, но формуле (9) при сопоставлении с (8) следует отдать предпочтение не только из-за её значительной простоты, но и вследствие её записи, явно отражающей ограничительные условия её применения ($d/l < 1$)

В дополнение рассмотрим пример, в котором рассчитаем силу взаимодействия между составными шинами в расщеплённой шине длиной 1 м согласно рис. 3 ($d=0,3$ м, $b=0,15$ м) при действующих значениях синусоидального тока 4 кА частотой 50 Гц. Будем также полагать, что толщина шин не превышает 10 мм и выбрана по соображениям допустимой температуры нагрева и условий охлаждения. Без учёта толщины шин коэффициент формы при заданных геометрических размерах равен

$$2[3 \ln(1,5) + \ln(0,5)] = 1,0465,$$

тогда в соответствии с (9) для мгновенного значения силы находим:

$$f = \frac{2 \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 16 \cdot 10^6 (1 - \cos(2\pi 100t))}{0,3 \cdot 2} \times$$

$$\times (-0,3 + 0,5 \cdot 0,3^2 + 1,0465) = 8,443(1 - \cos(2\pi 100t)) \text{ Н.}$$

Таким образом, наряду с постоянной составляющей силы в 8,443 Н имеем равную ей по амплитуде переменную составляющую частотой 100 Гц. При этой частоте должен наблюдаться пик спектрограммы вибрации рассматриваемой ошиновки [7].

Приложение. Будем исходить из формулы (1) для коэффициента взаимной индукции:

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ [l_1 - (l'_2 + l_2)] \ln(l'_2 + l_2 - l_1 + a_1) + (l'_2 + l_2) \ln(l'_2 + l_2 + a'_2) - (l_1 - l'_2) \ln(l'_2 - l_1 + a'_1) - l'_2 \ln(l'_2 + a_2) + a_1 + a_2 - a'_1 - a'_2 \right\},$$

из которого находим:

$$f = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \frac{\partial M}{\partial h} = \frac{\mu_0 h i_1 i_2}{4\pi} \left\{ [l_1 - l'_2 - l_2] \times \right.$$

$$\times ((l'_2 + l_2 - l_1 + a_1) a_1)^{-1} + (l'_2 + l_2) ((l'_2 + l_2 + a'_2) a'_2)^{-1} -$$

$$-(l_1 - l'_2)((l'_2 - l_1 + a'_1)a'_1)^{-1} - l'_2((l'_2 + a_2)a_2)^{-1} + \\ + (a_1)^{-1} + (a_2)^{-1} - (a'_1)^{-1} - (a'_2)^{-1} \Big\}.$$

Далее с помощью простых преобразований запишем:

$$f = \frac{\mu_0 h i_1 i_2}{4\pi} = \left\{ (l_1 - l'_2 - l_2) \frac{a_1 - (l'_2 + l_2 - l_1)}{a_1 h^2} + \right. \\ \left. + (l'_2 + l_2) \frac{a'_2 - (l'_2 + l_2)}{a'_2 h^2} - (l_1 - l'_2) \frac{a'_1 - (l'_2 - l_1)}{a'_1 h^2} - \right. \\ \left. - l'_2 \frac{a_2 - l'_2}{a_2 h^2} + (a_1)^{-1} + (a_2)^{-1} - (a'_1)^{-1} - (a'_2)^{-1} \right\} = \\ = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi h} \left[l_1 - l'_2 - l_2 + \frac{(l_1 - l'_2 - l_2)^2}{a_1} + l'_2 + l_2 - \right. \\ \left. - \frac{(l'_2 + l_2)^2}{a'_2} - l_1 + l'_2 - \frac{(l_1 - l'_2)^2}{a'_1} - l'_2 + \frac{(l'_2)^2}{a_2} + \frac{h^2}{a_1} + \right. \\ \left. + \frac{h^2}{a_2} - \frac{h^2}{a'_1} - \frac{h^2}{a'_2} \right] = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi h} (a_1 + a_2 - a'_1 - a'_2).$$

Этот результат с учётом разницы в обозначениях совпадает с формулой (2.10) при расшифровке (2.11) [3], а отличие в знаке обусловлено только разным выбором направлений для токов в проводниках. В частности, предыдущее выражение для f упрощается при l'_2 , тогда

$$f_{l'_2=0} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi h} \left[((l_2 - l_1)^2 + h^2)^{1/2} + \right. \\ \left. + h - (l_2 + h^2)^{1/2} - (l_2^2 + h^2)^{1/2} \right].$$

Elektrichestvo (Electricity), 2016, No. 11, pp. 44–48.

About Electrodynamic Forces between Parallel Buses with Current

TSITSIKYAN Georgii Nikolayevich (Branch of «TsNII SET» – «Krylov State Scientific Centre», St. Petersburg, Russia) – Deputy Head of the Electric power systems department

BOBROVNIKOV Piter Vasil'yevich (Branch of «TsNII SET» – «Krylov State Scientific Centre», St. Petersburg, Russia) – 1st cat. Engineer

Electrodynamic interactions between the live parts of isolated electric power systems should be evaluated not only for short-circuit faults, but also in steady modes of their operation. In so doing, it is important to estimate the contribution in the overall vibration activity from the intricate buswork of electrical equipment: transformers, reactors, converters, etc., which often does not fall in the category of devices the length of which is significantly larger than the transverse dimensions. Therefore, an attempt to calculate the electrodynamic forces assuming a plane-parallel shape of the field created by the buswork may lead to

Отметим, что перемена индексов 1 и 2 в последнем выражении не повлечёт за собой каких-либо изменений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Нейман Л.Р., Демирчян К.С.** Теоретические основы электротехники, т. 1. – Л.: Энергоиздат, 1981, 536 с.
2. **Кузнецов И.Ф., Цицикян Г.Н.** Электродинамические усилия в токоведущих частях электрических аппаратов и токопроводах. – Л.: Энергоатомиздат, 1989, 176 с.
3. **Александров Г.Н., Борисов В.В., Иванов В.Л. и др.** Теория электрических аппаратов. – М.: Высшая школа, 1985, 312 с.
4. **Meinke H.H., Gundlach F.W.** Taschenbuch der Hochfrequenztechnik. – Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag, 1962, 1642.
5. **Youbok Lee.** Antenna Circuit design for RFID Applications. – Microchip Technology, 2003, ANo. 710. pp. 1–49.
6. **Clayton R. Paul.** Inductance: Loop and Partial. – John Wiley and Sons, 2010.
7. **Ежов В.В., Цицикян Г.Н.** Определение вынуждающих сил при оценке виброактивности судовых шинопроводов переменного тока. – Судовая электротехника и связь, 1992, № 1(117), с. 35–45.
8. **Двайт Г.Б.** Таблицы интегралов и другие математические формулы. – М.: Наука, 1977.
9. **Меркурьев В.Г., Цицикян Г.Н.** Электродинамические силы взаимодействия тонкостенных прямоугольных шин с током. – Электричество, 1984, №5, с. 62–64.

[23.03.2016]

Авторы: Цицикян Георгий Николаевич окончил Ереванский политехнический институт в 1963 г. Докторскую диссертацию «Электротехнические комплексы и системы, включая их управление и регулирование» защитил в 1989 г. Начальник сектора – заместитель начальника отдела электроэнергетических систем филиала «ЦНИИ СЭТ» ФГУП «Крыловский государственный научный центр».

Бобровников Пётр Васильевич окончил Санкт-Петербургский государственный морской технический университет в 2009 г. Инженер 1-й категории филиала «ЦНИИ СЭТ» ФГУП «Крыловский государственный научный центр».