Электричество, 2017, № 1, с. 12–18.

О развитии методов анализа статической устойчивости электроэнергетических систем

ШАРОВ Ю.В.

Рассмотрены два подхода к анализу статической устойчивости электроэнергетической системы: условно названный традиционным и модальный. Первый из них опирается на решение нелинейных алгебраических уравнений, модальный – на алгебро-дифференциальных. В качестве основных вопросов, исследованных при сравнении, приняты виды используемых математических моделей, формы представления результатов анализа, способы определения статической устойчивости и ее запасов, применимость к решению задач управления энергосистемой. Показаны возможности и преимущества модального подхода.

Ключевые слова: *электроэнергетическая система, статическая устойчивость, матрица Якоби, модальный анализ, управляемость*

Надежность и живучесть электроэнергетической системы (ЭЭС) неразрывно связаны с обеспечением статической устойчивости, поэтому ее анализ осуществляется как на стадии проектирования ЭЭС, так и при краткосрочном и долгосрочном планировании, ведении режимов. Основополагающие исследования в этой области были выполнены в довоенные годы П.С. Ждановым, А.С. Лебедевым, А.А. Горевым, что, в свою очередь, обеспечило успешное создание в Советском Союзе дальних электропередач. К началу 1960-х годов на основе обширных теоретических, расчетных и экспериментальных работ советских ученых-энергетиков была разработана концепция сильного регулирования возбуждения генераторов (АРВ–СД). Было показано, что эта концепция дает возможность сохранить устойчивость ЭЭС в режимах, близких к пределам пропускной способности.

В связи с этой концепцией длительное время исследование слабо возмущенного движения ЭЭС ограничивалось анализом апериодической устойчивости по критерию смены знака определителя матрицы Якоби, равного свободному члену характеристического полинома. При этом считалось, что колебательные электромеханические процессы будут сохранять устойчивость за счет естественного демпфирования и АРВ–СД. Такой подход на современном этапе развития ЭЭС можно условно назвать традиционным. Его «функциональным ядром» является система нелинейных алгебраических (статических) уравнений, а методом решения, – как правило, итерационный метод Ньютона и его многочисленные модификации.

Однако экспериментальные данные как у нас в стране, так и за рубежом указывали на многочисленные факты слабо демпфированных колебаний и возникновения самораскачиваний в условиях обширного многообразия схемно-режимных ситуаций. Это явилось причиной нового этапа в разработке и использовании методов и средств исследования статической устойчивости сложных ЭЭС. Одним из таких методов является модальный метод или метод собственных значений [1].

Заметим, что прошло 30 лет с момента публикации статьи [1], в которой подробно изложены основные моменты модального подхода, однако он не нашел пока серьезного практического применения в отечественной электроэнергетике. На современном этапе его нельзя назвать архаичным, он интенсивно развивается и с большим успехом применяется в различных технических системах (см., например, [2, 3]).

В статье сравниваются возможности традиционного и модального подходов, используемых как в интересах анализа статической устойчивости, так и для синтеза законов управления ЭЭС.

Модальный подход. В достаточно общем виде математическая модель электромеханических переходных процессов может быть описана системой векторных нелинейных алгебро-дифференциальных уравнений [4]:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{v}); \\ 0 = g(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{v}), \end{cases} \tag{1}$$

где $\mathbf{y}$ – вектор переменных компонентов состояния размерности n; $\mathbf{z}$ – вектор статических компонентов состояния размерности l; $\mathbf{v}$ – вектор управления размерности m; $\mathbf{f}(\cdot)$ и $\mathbf{g}(\cdot)$ – нелинейные векторные функции, вид которых определяется математическими моделями синхронных машин, электрической сети и нагрузок.

Линеаризация системы уравнений (1) в окрестности установившегося положения равновесия $(\mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$ приводит к линейным алгебро-дифференциальным уравнениям в приращениях Δ [5]:

$$\left.\begin{aligned}\Delta\dot{\mathbf{y}} &= (\mathbf{F}_y|\mathbf{F}_z)\begin{pmatrix}\Delta\mathbf{y}\\ \Delta\mathbf{z}\end{pmatrix} + \mathbf{F}_v\Delta\mathbf{v};\\ 0 &= (\mathbf{G}_y|\mathbf{G}_z)\begin{pmatrix}\Delta\mathbf{y}\\ \Delta\mathbf{z}\end{pmatrix} + \mathbf{G}_v\Delta\mathbf{v}.\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Система уравнений (2) при условии обратимости матрицы Якоби $\mathbf{G}_z$ преобразуется к форме Коши

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad (3)$$

где $\dot{\mathbf{x}}$ – вектор состояния размерности; $\mathbf{u}$ – вектор управления размерности *m*.

Модели (2) и (3) занимают центральное место в модальном анализе и синтезе многомерных динамических систем [5, 6].

Колебания в линеаризованных моделях ЭЭС непосредственно определяются собственными значениями λ_k матрицы $\mathbf{A}$ – упорядоченными элементами множества:

$$\{\lambda_i : \det(\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A}) = 0, \ i = 1,2,...,n\}, \quad (4)$$

где $\mathbf{E}$ – единичная матрица порядка *n*.

Как следует из (4), элементы этого множества также являются корнями характеристического полинома:

$$\det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0. \quad (5)$$

При вычислении (4) возникает проблема (точнее, задача) собственных значений [7], называемая также стандартной проблемой собственных значений [8, 9]. Множество собственных значений λ_k (4) удовлетворяет и модели (2), но именуется в этом случае обобщенной проблемой собственных значений [8, 9].

Отметим, что в настоящее время разработаны высокоэффективные вычислительные методы, которые в сочетании с возможностями современных информационных технологий, позволяют решать проблему собственных значений, в том числе, для больших и очень больших матриц [9].

Сравнение традиционного и модального подходов. В качестве основных вопросов для сравнительного анализа традиционного и модального подходов к анализу статической устойчивости выберем следующие:

используемые математические модели ЭЭС;

результаты расчетов на основе математической модели ЭЭС;

способ определения статической устойчивости ЭЭС и ее запасов;

применимость к решению задач управления ЭЭС.

Результаты сравнительного анализа приведены в таблице.

Традиционный подход	Модальный подход
Математическая модель ЭЭС	
Система нелинейных алгебраических уравнений, решаемых итерационными методами	Система алгебро-дифференциальных нелинейных уравнений, решаемых методами собственных значений
Результаты расчетов на основе математической модели ЭЭС	
Комплексные физические величины при заданных начальных приближениях	Комплексные физические величины в функции от времени при заданных начальных приближениях
Способ определения статической устойчивости и ее запасов в ЭЭС	
Упорядоченная стратегия утяжеления режимов	Анализ расположения собственных значений матрицы Якоби на комплексной плоскости, в том числе, по ближайшему к мнимой оси собственному значению
Применимость к решению задач управления ЭЭС	
Не применим	Позволяет синтезировать законы управления с заданными свойствами, включая обобщенные временные траектории состояния системы

Итак, в традиционном подходе используется модель ЭЭС в виде нелинейных алгебраических уравнений, которая в соответствии с системой (1) принимает вид:

$$\left.\begin{aligned}0 &= \mathbf{f}(\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{v});\\ 0 &= \mathbf{g}(\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{v}).\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

В модальном подходе применяются системы линеаризованных алгебро-дифференциальных уравнений (2) либо дифференциальных уравнений (3). Очевидно, что алгебраические уравнения (6) из-за своей статичности не могут описывать динамику хотя и малых, но существующих в ЭЭС колебаний.

В качестве результатов расчетов при заданных начальных приближениях традиционный подход представляет комплексные физические величины. В модальном подходе данные величины представляются функциями времени с базисными функциями (модами) в виде апериодических, гармонических экспоненциально убывающих и неубывающих (случай устойчивых колебаний) и экспоненциально возрастающих (случай неустойчивых колебаний) функций.

Для определения статической устойчивости и ее запасов в ЭЭС при традиционном подходе применяется упорядоченная стратегия утяжеления режимов. В модальном подходе анализируется расположение множества собственных значений (4) на комплексной плоскости. При этом запас устойчивости (используется также термин «радиус устойчивости») оценивается по ближайшему к мнимой оси собственному значению.

Заметим, что анализ апериодической устойчивости по критерию смены знака определителя матрицы Якоби или, эквивалентно, по свободному члену характеристического полинома a_0 (5) уже для моделей ЭЭС относительно небольшой размерности, может терять смысл. При этом анализ расположения собственных значений, используемый при модальном подходе, может оказаться единственным способом решения этой задачи.

Рассмотрим пример модели реальной энергосистемы, заимствованный из [10]. Схема ЭЭС представлена сетями 220–750 кВ и включает в себя несколько концентрированных подсистем, соединенных относительно слабыми связями. Схема содержит 286 узлов, 531 ветвь, 129 генераторов. Имеется несколько вариантов матрицы Якоби **A**, в том числе с размерами 50×50 и 258×258.

Вычисление определителя матрицы **A** размером 50×50 дает число $2{,}1696 \cdot 10^{48}$, а для матрицы **A** размером 258×258 – $6{,}3108 \cdot 10^{258}$.

Анализ диаграммы на рис. 1 объясняет очень большое значение определителя матрицы Якоби ($6{,}3108 \cdot 10^{258}$). Как видно, большинство собственных значений имеют значительные мнимые части.

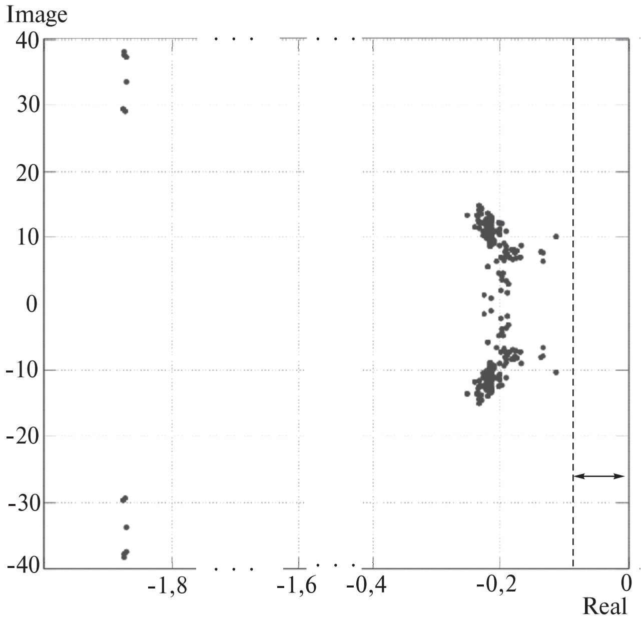

Рис. 1. Расположение на комплексной плоскости собственных значений матрицы Якоби линеаризованной модели ЭЭС

При этом для квадратной матрицы справедливы следующие соотношения [11]:

$$a_0 = \det(\mathbf{A}) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{n-1} \lambda_n. \qquad (7)$$

Таким образом, в данном случае перемножение собственных значений с большими мнимыми частями уже при относительно небольших размерах матрицы дает практически бесконечное число.

Заметим, что радиус устойчивости, упомянутый в контексте определения запаса устойчивости, достаточно легко определяется на основе диаграммы на рис. 1 (здесь он отмечен двойной стрелкой, отсчитываемой от штриховой линии).

Отметим еще одно достоинство модального подхода, а именно, возможность формирования обобщенных временных траекторий динамической системы. В данном случае речь идет о норме экспоненциала матрицы Якоби

$$\left\| e^{At} \right\|, \qquad (8)$$

которую можно охарактеризовать как обобщенную переходную функцию ЭЭС. Данная функция характеризует доминирующие колебания в системе в заданные моменты времени. На рис. 2 в качестве примера приведена функция (8) для указанной ранее матрицы **A** размером 258×258 на разных временных интервалах.

Временн*ы*е диаграммы на рис. 2 позволяют с достаточно высокой точностью классифицировать доминирующие моды колебаний ЭЭС на различных временных интервалах. Так, рис. 2,*а* иллюстрирует начальный этап развития переходных электромеханических процессов, имеющих большое перерегулирование и высокие частоты колебаний. На диаграммах рис. 2,*б* заметна некоторая нерегулярность относительно низкочастотных колебаний; на рис. 2,*в* отчетливо выделяются длиннопериодические колебания с относительно высокочастотной модуляцией. Таким образом, рассматриваемую скалярную функцию (8) можно назвать обобщенным динамическим «портретом» ЭЭС, отражающим результирующую взаимосвязь параметров.

Итоговый вопрос предлагаемого сравнительного анализа – применимость к решению задач управления ЭЭС. Традиционный подход в прямом виде не используется при синтезе управления в ЭЭС, в то же время модальный подход обладает даже более широкими возможностями при синтезе, чем те, что применяются при решении проблемы собственных значений.

Во-первых, модальный подход дает возможность оценить управляемость ЭЭС в целом и по каждой моде колебаний (по каждому λ_k) в отдельности. Так использование рангового критерия управляемости следующего вида [2, 8]:

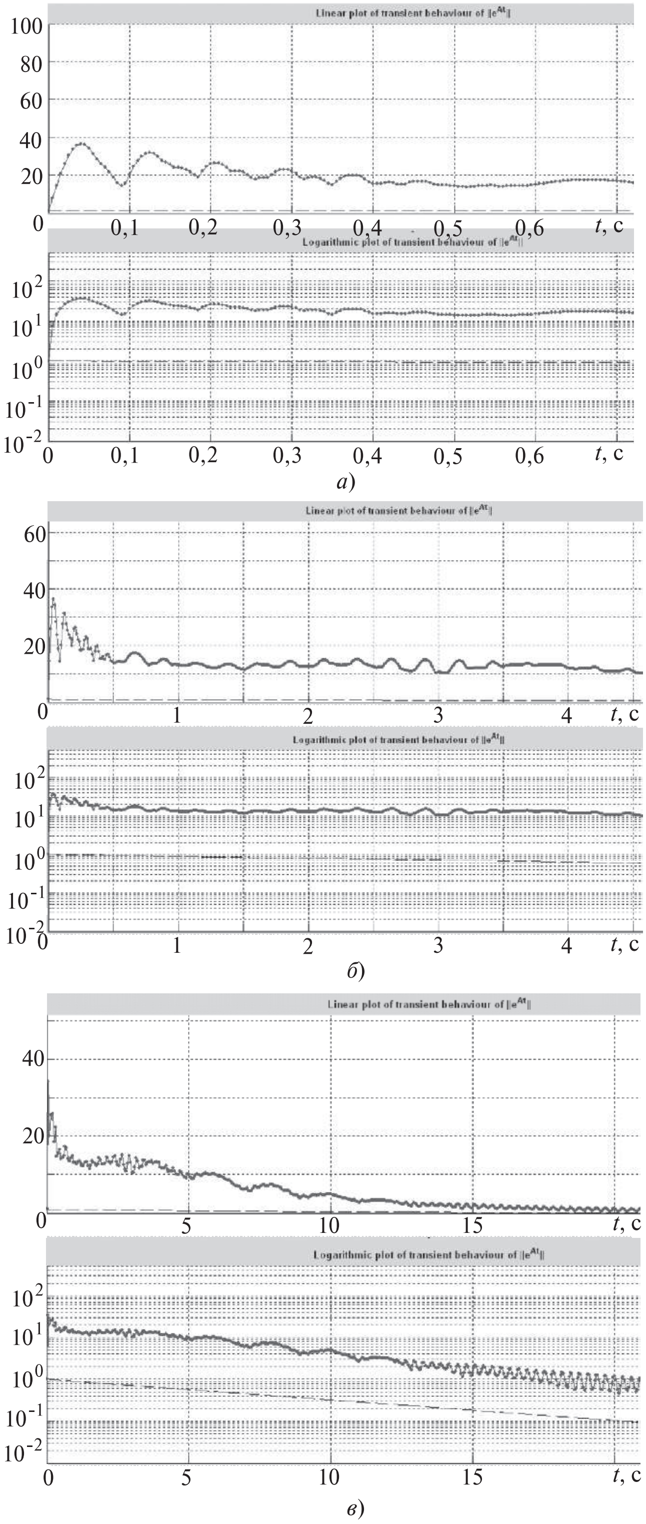

Рис. 2. Обобщенная переходная функция ЭЭС в линейном и логарифмическом масштабах: *а* — на интервале от 0 до 0,7 с; *б* — от 0 до 4,5 с; *в* — от 0 до 20 с

$$\operatorname{rank}(\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A}|\mathbf{B}) \tag{9}$$

показывает, можно ли подходящим образом изменить данное собственное значение λ_i.

Во-вторых, если указанный в (9) ранг матрицы для всех собственных значений (4) равен n, то можно найти закон управления с обратной связью

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}, \tag{10}$$

что управляемая система приобретет новые (заданные) свойства, например, подходящим образом изменятся все собственные значения [12–14].

Если не все переменные вектора состояния $\mathbf{x}$ модели ЭЭС (3) доступны для прямого измерения, могут быть применены оценки вектора состояния $\hat{\mathbf{x}}$, получаемые с помощью наблюдающих устройств на основе данных о переменных входа и выхода системы [6].

Наблюдающее устройство (наблюдатель состояния или наблюдатель Люенбергера) представляет собой динамическую систему, функционирующую совместно с моделью ЭЭС (3). Параметры наблюдающего устройства выбираются таким образом, чтобы оно не оказывало влияния на собственные значения замкнутой системы, которые получились бы с помощью закона управления при условии, что оценка вектора переменных состояния $\hat{\mathbf{x}}$ пригодна для непосредственного формирования обратной связи [1].

Заметим, что арсенал методов анализа и синтеза на основе модального подхода чрезвычайно широк и непрерывно пополняется новыми результатами. В течение последних 10 лет годовой объем публикаций, так или иначе связанных с модальным подходом и которые можно обнаружить с помощью интернета, колеблется около отметки 100. Один из таких новых результатов связан с понятием псевдомодального анализа [2, 8, 15, 16].

Практически очевидно, что элементы матриц в уравнениях моделей для реальных ЭЭС определяются непосредственно из физических наблюдений и расчетов и поэтому содержат ошибки. В этом случае уравнения, которые получаются в результате экспериментов, являются только некоторым приближением к «точным» уравнениям, соответствующим точным измерениям [16].

С другой стороны, в практических расчетах часто требуется не точное равенство нулю некоторого выражения, а лишь его «исчезающая малость» в сравнении с каким-то заранее установленным порогом. Таким образом, под решениями фактически понимается значение переменных, обращающих значение заданной функции в пренебрежимо малую величину [8]. Эти решения представляют целое множество точек, которые можно назвать псевдорешениями или почти решениями, если порог этой пренебрежимо малой величины несуществен или не оговорен явно. Такие задачи возникают в ЭЭС при обработке телеметрической информации, при оценке состояния ЭЭС на основе «доступных измерений», при решении задач идентификации отдельных параметров ЭЭС, а также при определении области статической устойчивости ЭЭС [16].

Для данного подхода оказывается вполне оправданным термин «псевдомодальный анализ».

Псевдомодальный анализ оперирует комплексными числами z_i, составляющими множество (псевдоспектр) следующего вида [15]:

$$\{z_i : \sigma_{\min}(z_i \mathbf{E} - \mathbf{A}) \leqslant \varepsilon\}. \qquad (11)$$

Здесь $\sigma_{\min}$ – минимальное сингулярное число матрицы $z_i\mathbf{E}-\mathbf{A}$ [11]; ε – заданное положительное число (допуск).

Другими словами, псевдоспектром называется множество комплексных чисел z, при которых все матрицы $z\mathbf{E}-\mathbf{A}$ имеют минимальные сингулярные числа, не превосходящие некоторого конечного числа (допуска) ε.

В качестве примера применения псевдомодального анализа рассмотрим 9-узловую модель трехмашинной ЭЭС в виде (3), приведенную в [17]. Собственные значения матрицы Якоби составляют множество чисел

$$\{-0{,}0027 \pm 0{,}0346j;\ -0{,}0006 \pm 0{,}023j;$$
$$-0{,}0002 \pm 0{,}0001j;\ -0{,}0166;\ -0{,}0104;\ -0{,}0005\}.$$

Поскольку все собственные значения имеют отрицательные действительные части, рассматриваемая ЭЭС является статически устойчивой. Назовем это необходимым условием для определения запаса статической устойчивости. Однако чувствительность собственных значений к возмущениям в ЭЭС различна и напрямую связана с запасом устойчивости. Это иллюстрируют диаграммы на рис. 3 и 4, полученные на основе псевдомодального анализа.

Вертикальной линией на рис. 4 отмечена мнимая ось. Горизонтальные оси на рис. 3 соответствуют осям комплексной плоскости. По вертикальной оси в логарифмическом масштабе откладывается вычисленная норма резольвенты матрицы Якоби $(\mathbf{A}-z\mathbf{E})^{-1}$. Пики (максимумы) поверхности соответствуют собственным значениям матрицы. В качестве численных алгоритмов для осуществления псевдомодального анализа используется алгоритм, построенный на основе процесса Арнольди [9].

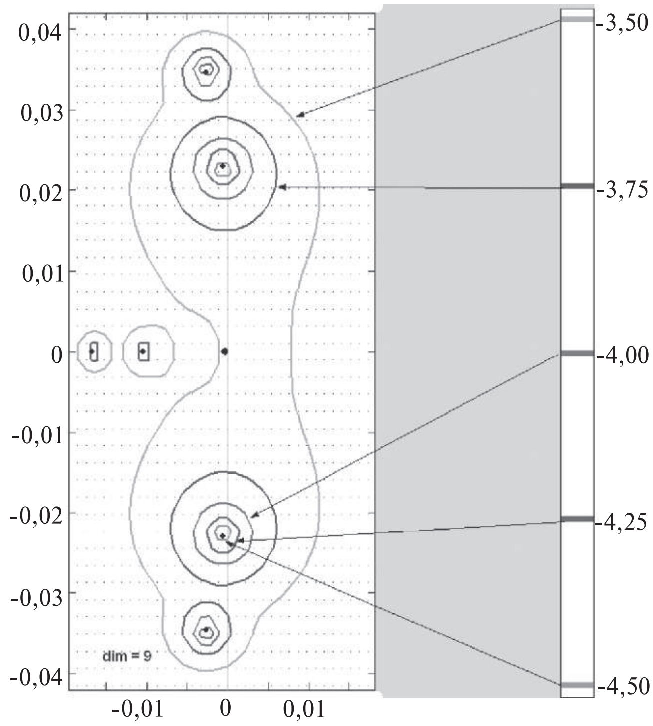

Рис. 4. Топография псевдомодального анализа трехмашинной ЭЭС

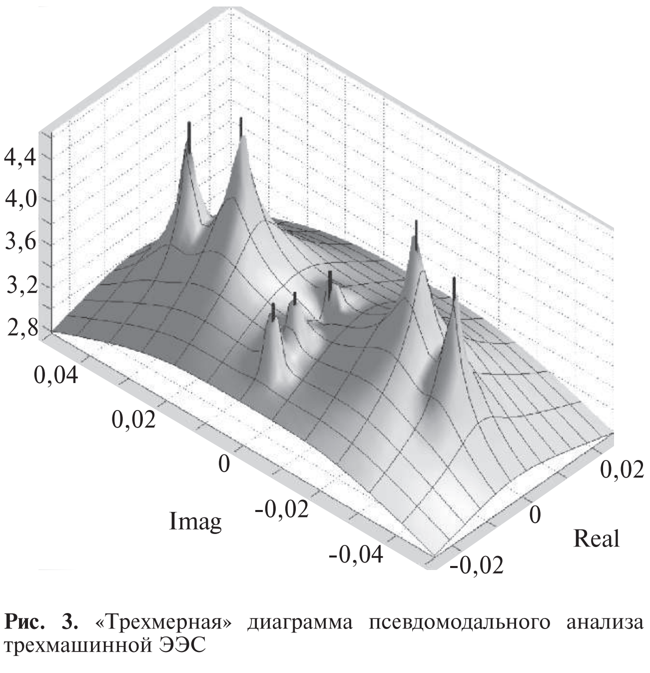

Рис. 3. «Трехмерная» диаграмма псевдомодального анализа трехмашинной ЭЭС

Наиболее чувствительными в данной модели оказывается комплексно-сопряженная пара собственных значений $-0{,}0006 \pm 0{,}023j$, соответствующая электромеханическим колебаниям с частотой 1,4 Гц. Для этой пары возмущения с нормой $\|\Delta\| = 10^{-4{,}5} \approx 3{,}1623 \cdot 10^{-5}$ оказываются недопустимыми. Именно эти возмущения и определяют запас статической устойчивости. Так, собственные значения, расположенные наиболее близко к мнимой оси $-0{,}0002 \pm 0{,}0001j$ и $-0{,}0005$ (необходимые условия запаса статической устойчивости – см. выше), оказываются значительно менее чувствительными, поскольку для них критичными являются большие возмущения $\|\Delta\| = 10^{-4{,}25} \approx 5{,}6234 \cdot 10^{-5}$. В этом смысле в дополнение к указанным необходимым условиям их можно назвать достаточными условиями определения запасов статической устойчивости.

Заключение. Первые знаковые публикации по модальному управлению режимами ЭЭС появились в нашей стране 30 лет назад. Однако должного развития данное направление до сих пор не получило. В отличие от традиционных подходов, используемых в отечественной практике, возможности модального подхода чрезвычайно широки и его арсенал методов анализа и синтеза непрерывно пополняется новыми результатами. Он практически не имеет ограничений по размерности анализируемых матриц (систем). С его помощью эффективно определяются критические по отношению к потере устойчивости колебания в ЭЭС, а также формируются обобщенные переходные функции, характеризующие колебательные свойства формируемых энергосистем. Модальный подход также позволяет использовать разнообразные методы синтеза законов управления, создавать динамические наблюдающие и прогнозирующие устройства.

Слабое использование рассматриваемого подхода в нашей стране, по-видимому, было связано с ограниченностью и локальностью имеющихся средств управления режимами ЭЭС. Однако на современном временном промежутке, характеризующемся увеличением новых методов и средств управления (статические компенсаторы реактивной мощности, системные стабилизаторы, вставки постоянного тока и др.), открылись практически неограниченные возможности анализа и синтеза законов управления, причем таких, которые еще на стадии проектирования позволяют формировать ЭЭС с заданными динамическими свойствами. При этом модальный подход может являться одним из тех, которые позволяют успешно подойти к решению этой глобальной проблемы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Баринов В.А., Совалов С.А.** Модальное управление режимами энергетических систем. – Электричество,1986, № 8, с. 1–6.
2. **Микрин Е.А., Зубов Н.Е., Рябченко В.Н.** Матричные методы в теории и практике систем автоматического управления летательных аппаратов. – М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016, 666 с.
3. **Gawronski W.K.** Dynamics and Control of Structures: A Modal Approach. – New York, Springer, 1998, 231 p.
4. **Веников В.А.** Переходные электромеханические процессы в электрических системах. – М.: Высшая школа, 1985, 536 с.
5. **Gibbard M.J., Pourbeik P., Vowles D.J.** Small-signal stability, control and dynamic performance of power systems. – Univ. of Adelaide Press, 2015, 658 p.
6. **Кузовков Н.Т.** Модальное управление и наблюдающие устройства. – М.: Машиностроение, 1976, 184 с.
7. **Уилкинсон Дж.** Алгебраическая проблема собственных значений. – М.: Наука,1970, 564 с.
8. **Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н.** Квадратическая проблема собственных значений в электроэнергетике. –Автоматика и телемеханика, 2006, № 5,с. 24 – 47.
9. **Saad Y.** Numerical methods for large eigenvalue problems. – Society for Industrial and Applied Mathematics, 2011, 276 p.
10. **Тузлукова Е.В.** Развитие методов анализа динамических свойств энергосистем на основе решения частичной проблемы собственных значений: Дис .... канд. техн. наук. – М.: МЭИ, 2004, 195 с.
11. **Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.** Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984, 320 с.
12. **Мисриханов М.Ш., Шаров Ю.В.** Модально-оптимальное управление электроэнергетическими объектами. – Вестник ИГЭУ, 2004, вып. 4, с. 83–98.
13. **Мисриханов М.Ш., Ситников В.Ф., Шаров Ю.В.** Модальный синтез регуляторов на основе устройств FACTS. – Электротехника, 2007, № 10, с. 22–29.
14. **Мисриханов М.Ш., Ситников В.Ф., Шаров Ю.В.** Оптимальные регуляторы на основе устройств FACTS для децентрализованной модели ОЭС. – Вестник МЭИ, 2009, № 3, с. 35–41.
15. **Trefethen L.N., Embree M.** Spectra and pseudospectra. – Princeton Univ. Press, 2005, 624 p.
16. **Мисриханов М.Ш., Шаров Ю.В.** Оценка влияния возмущений на устойчивость электроэнергетической системы. – Вестник МЭИ, 2009, № 5, с. 42–48.
17. **Андерсон П., Фауд А.** Управление энергосистемами и устойчивость. – М.: Энергия, 1980, 568 с.

[27.10.2016]

Автор: ***Шаров Юрий Владимирович*** *окончил электроэнергетический факультет Московского энергетического института (МЭИ – ныне Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт» – НИУ «МЭИ») в 1986 г. В 1993 г. защитил кандидатскую диссертацию «Разработка методов и средств оценки эффективности управления электроэнергетическими системами при больших возмущениях режима» в МЭИ. Заведующий кафедрой электроэнергетических систем НИУ «МЭИ».*

Elektrichestvo (Electricity), 2017, No. 1, pp. 12–18.

About Development of Analysis Methods Static Stability of Electric Power Systems

SHAROV Jury Vladimirovich *(National Research University «Moscow Power Engineering Institute», Moscow, Russia) – Head of the Department, Cand. Sci. (Eng.)*

Two approaches to the analysis of power system static stability: tentatively called traditional and modal. The traditional approach is based on the solution of algebraic equations, the model – on differential-algebraic. The main issues examined by comparison, accepted forms of use of mathematical models, the presentation of results of the analysis methods for determining the static stability and its stocks, applicable to the solution of power system control tasks. The possibilities and advantages of a modal approach.