Key words: *power system, static stability, Jacobi matrix, modal analysis, controllability*

REFERENCES

1. **Barinov V.A., Sovalov S.A.** *Elektrichestvo — in Russ. (Electricity),* No. 8, pp. 1—6.

2. **Mikrin Ye.A., Zubov N.Ye., Ryabchenko V.N.** *Matrichnye metody v teorii i praktike sistem avtomaticheskogo upravleniya letatel'nykh apparatov* (Matrix methods in the theory and practice of automatic control systems of aircraft). Moscow, Publ. Moscow State Technical University named N.E. Bauman, 2016, 666 p.

3. **Gawronski W.K.** Dynamics and Control of Structures: A Modal Approach. — New York, Springer, 1998, 231 p.

4. **Venikov V.A.** *Perekhodnye elektromekhanicheskiye protsessy v elektricheskikh sistemakh* (Transitional electromechanical processes in electrical systems). Moscow, Publ. «Vysshaya shkola»,1985, 536 p.

5. **Gibbard M.J., Pourbeik P., Vowles D.J**. Small-signal stability, control and dynamic performance of power systems. — Univ. of Adelaide Press, 2015, 658 p.

6. **Kuzovkov N.T.** *Modal'noye upravleniye i nablyudayushchiye ustroistva* (Modal control and observing devices). Moscow, Publ. «Mashinostroyeniye», 1976, 184 p.

7. **Wilkinson J.** *Algebraicheskaya problema sobstvennykh znachenii* (Algebraic eigenvalue problem). Moscow, Publ. «Nauka», 1970, 564 p.

8. **Misrikhanov M.Sh., Ryabchenko V.N.** *Avtomatika i telemekhanika — in Russ. (Automation and remote control)*, 2006, No. 5, pp. 24—47.

9. **Saad Y.** Numerical methods for large eigenvalue problems. — Society for Industrial and Applied Mathematics, 2011, 276 p.

10. **Tuzlukova Ye.V.** *Razvitiye metodov analiza dinamicheskikh svoistv energosistem na osnove...* (Development of the dynamic properties of power systems analysis methods...): Diss. for the Degree of Cand. Sci. (Eng.). Moscow, Moscow Power Engineering Institute, 2004, 195 p.

11. **Voyevodin V.V., Kuznetsov Yu.A.** *Matritsy i vychisleniya* (Matrix and calculations). Moscow, Publ. «Nauka», 1984, 320 p.

12. **Misrikhanov M.Sh., Sharov Yu.V.** *Vestnik IGEU — in Russ. (Bulletin of Ivanovo State Power Engineering University)*, 2004, iss. 4, pp. 83—98.

13. **Misrikhanov M.Sh., Sitnikov V.F., Sharov Yu.V.** *Elektrotekhnika — in Russ. (Power Engineering)*, 2007, No. 10, pp. 22—29.

14. **Misrikhanov M.Sh., Sitnikov V.F., Sharov Yu.V.** *Vestnik MEI — in Russ. (Bulletin of Moscow Power Engineering Institute)*, 2009, No. 3, pp. 35—41.

15. **Trefethen L.N., Embree M.** Spectra and pseudospectra. — Princeton Univ. Press, 2005, 624 p.

16. **Misrikhanov M.Sh., Sharov Yu.V.** *Vestnik MEI — in Russ. (Bulletin of Moscow Power Engineering Institute)*, 2009, No. 5, pp. 42—48.

17. **Anderson P., Faud A.** *Upravleniye energosistemami i ustoichivost' (Power systems management and stability)*. Moscow, Publ. «Energiay», 1980, 568 p.

* * *

Электричество, 2017, № 1, с. 18–21.

Об анализе пределов по апериодической устойчивости электроэнергетических систем

ЛЕГКОКОНЕЦ П.В.

Проведено исследование вопроса о возможности нахождения соответствия между пределом по апериодической устойчивости электроэнергетической системы (ЭЭС) и экстремумом какой-либо физической переменной (переменных). Доказано, что для ЭЭС, удовлетворяющих условиям соответствия знака якобиана уравнений установившегося режима знаку свободного члена характеристического уравнения ЭЭС, предел по апериодической устойчивости соответствует экстремуму утяжеляемой переменной (а следовательно и экстремумам активных мощностей загружаемых/разгружаемых при утяжелении генераторов и нагрузок потребления). Доказано, что в общем случае по достижении экстремума перетока по какому-либо из утяжеляемых сечений нельзя судить о достижении предела по апериодической устойчивости ЭЭС.

Ключевые слова: *энергосистема, устойчивость, установившийся режим, мощность, анализ*

Предел по апериодической устойчивости простейшей ЭЭС «станция—электропередача—шины бесконечной мощности» соответствует экстремуму конкретной физической величины — активной мощности станции. Указанный факт делает понятие предела по апериодической устойчивости простейшей ЭЭС менее абстрактным и более наглядным и говорит об экстремальной природе этого понятия. Возникает закономерный вопрос о возможности обобщения указанного факта на случай более сложных ЭЭС — имеет ли предел по апериодической устойчивости ЭЭС в принципе «экстремальный» характер — а именно, соответствует ли указанный предел экстремуму какой-либо (каких-либо) физической величины (величин). Решение данного вопроса является важным с точки зрения прояснения природы понятия предела по апериодической устойчивости.

Рассмотрим трёхузловую схему, содержащую две станции, заданные уравнением $U_{\text{г}} = \text{const}$, и шины бесконечной мощности (рис. 1).

Уравнения установившегося режима в форме баланса мощности для указанной схемы записываются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} W_1(\delta_1,\delta_2) &= P_{12}(\delta_1,\delta_2) + P_{13}(\delta_1) - P_{\text{г}1} = 0; \\ W_2(\delta_1,\delta_2) &= P_{21}(\delta_1,\delta_2) + P_{23}(\delta_1) - P_{\text{г}2} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

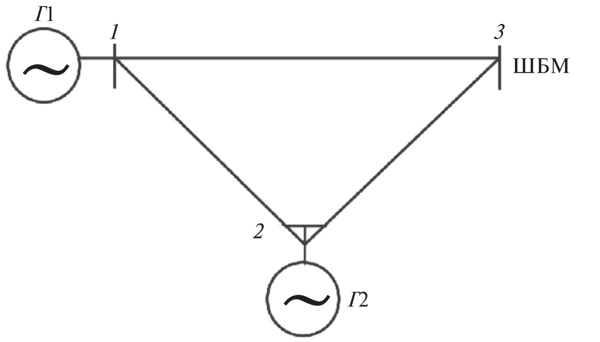

Рис. 1. Схема трёхузловой ЭЭС

где P_{ij} – переток активной мощности в начале ветви ij по направлению от узла i к узлу j; $P_{г1}$, $P_{г2}$ – активные мощности станций.

Определим предел по апериодической устойчивости рассматриваемой ЭЭС путём утяжеления исходного установившегося режима.

Математически процесс утяжеления записывается следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} P_{г1} &= P_{г10} + \lambda_1 t; \\ P_{г2} &= P_{г20} + \lambda_2 t, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где $P_{г10}$, $P_{г20}$ – активная мощность станций в исходном установившемся режиме; λ_1, λ_2 – параметры, определяющие направление траектории утяжеления; t – переменная, определяющая процесс утяжеления.

С учётом (2) уравнения (1) запишутся в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} W_1(\delta_1,\delta_2,t) &= P_{12}(\delta_1,\delta_2)+P_{13}(\delta_1)-P_{0г1}-\lambda_1 t=0; \\ W_2(\delta_1,\delta_2,t) &= P_{21}(\delta_1,\delta_2)+P_{23}(\delta_1)-P_{0г2}-\lambda_2 t=0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Система уравнений (3) содержит два уравнения и три переменные, поэтому в соответствии с [1] одну из этих переменных можно рассматривать как независимую (например δ_1), а саму систему уравнений (3) – как задание остальных двух переменных в качестве неявных функций от независимой переменной ($t=t(\delta_1)$, $\delta_2=\delta_2(\delta_1)$).

Принимаем δ_1 в качестве независимой переменной. Определим производную функции $t=t(\delta_1)$ по δ_1. В соответствии с [1] указанная производная определяется решением следующей системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial W_1}{\partial \delta_1}+\frac{\partial W_1}{\partial t}\frac{dt}{d\delta_1}+\frac{\partial W_1}{\partial \delta_2}\frac{d\delta_2}{d\delta_1}=0; \\ \frac{\partial W_2}{\partial \delta_1}+\frac{\partial W_2}{\partial t}\frac{dt}{d\delta_1}+\frac{\partial W_2}{\partial \delta_2}\frac{d\delta_2}{d\delta_1}=0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

С учётом того, что $\dfrac{\partial W_1}{\partial t}=-\lambda_1$, $\dfrac{\partial W_2}{\partial t}=-\lambda_2$, система уравнений (4) запишется в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial W_1}{\partial \delta_1}-\lambda_1\frac{dt}{d\delta_1}+\frac{\partial W_1}{\partial \delta_2}\frac{d\delta_2}{d\delta_1}=0; \\ \frac{\partial W_2}{\partial \delta_1}-\lambda_2\frac{dt}{d\delta_1}+\frac{\partial W_2}{\partial \delta_2}\frac{d\delta_2}{d\delta_1}=0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Решая систему уравнений (5), получаем

$$\frac{dt}{d\delta_1}=-\frac{D_1}{D}, \tag{6}$$

где

$$D_1=\det\begin{bmatrix} \dfrac{\partial W_1}{\partial \delta_1} & \dfrac{\partial W_1}{\partial \delta_2} \\ \dfrac{\partial W_2}{\partial \delta_1} & \dfrac{\partial W_2}{\partial \delta_2} \end{bmatrix}; \tag{7}$$

$$D=\det\begin{bmatrix} -\lambda_1 & \dfrac{\partial W_1}{\partial \delta_2} \\ -\lambda_2 & \dfrac{\partial W_2}{\partial \delta_2} \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Из (7) видно, что D_1 равно якобиану $|\partial W/\partial\delta|$ системы уравнений установившегося режима рассматриваемой ЭЭС. Таким образом,

$$\frac{dt}{d\delta_1}=-|\partial W/\partial\delta|/D. \tag{9}$$

Для рассматриваемой ЭЭС согласно [2] выполнены условия, при которых знак $|\partial W/\partial\delta|$ соответствует знаку свободного члена характеристического уравнения ЭЭС. Следовательно, при приближении к пределу по апериодической устойчивости значение $|\partial W/\partial\delta|$ будет стремиться к нулю. Тогда в соответствии с (6) в предельном по апериодической устойчивости режиме $dt/d\delta_1=0$.

Аналогично можно доказать, что если в качестве независимой переменной взять δ_2, то в предельном по апериодической устойчивости режиме $dt/d\delta_2=0$, т.е. предел по апериодической устойчивости рассматриваемой ЭЭС имеет экстремальный характер, а именно, совпадает с экстремумом утяжеляемой переменной t (и, соответственно, с экстремумами активной мощности загружаемых/разгружаемых станций).

На рис. 2 представлены зависимости активной мощности станций *1* и *2* от угла δ_1 при утяжелении; схемные и режимные параметры рассматриваемой ЭЭС (отн. ед.) равны: $\bar{z}_{12}=\bar{z}_{13}=\bar{z}_{23}=0{,}1+j1$; $U_1=U_2=U_3=1$; $P_{0г1}=0{,}5$; $P_{0г2}=0{,}2$.

Далее приведена зависимость перетока активной мощности по одному из утяжеляемых сечений, а именно сечению, образованному ветвями *1–3* и *2–3*, от утяжеляемой переменной t:

t	$P_{\text{сеч}}$
0,716250	1,961511
0,716563	1,961798
0,716582	1,961800
0,716592	1,961795
0,716597	1,961789
0,716599	1,961782
0,716600	1,961774

Из указанной зависимости следует, что при утяжелении экстремум перетока по указанному утяжеляемому сечению достигается раньше экстремума самой утяжеляемой переменной. Это означает, что в общем случае по достижении экстремума перетока по какому-либо из утяжеляемых сечений нельзя судить о достижении предела по апериодической устойчивости ЭЭС.

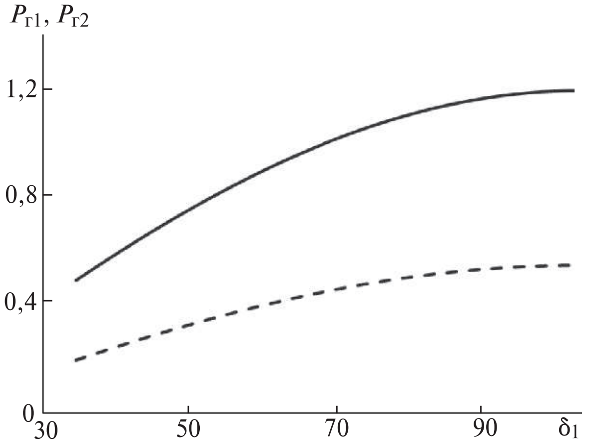

Рис. 2. Графики зависимости $P_{\text{г}1}$ (——) и $P_{\text{г}2}$ (- - -) от δ_1 при утяжелении режима

Полученный для трёхузловой схемы результат о соответствии предела по апериодической устойчивости экстремуму утяжеляемой переменной (а следовательно и экстремумам активных мощностей загружаемых/разгружаемых при утяжелении станций) нетрудно обобщить на случай ЭЭС произвольной размерности (см. соответствующее доказательство в Приложении).

Приложение. Рассмотрим произвольную n-узловую ЭЭС, содержащую ШБМ и $n_{\text{г}}$ генераторных узлов. Примем, что генераторы ЭЭС задаются уравнениями $U_{\text{г}} = \text{const}$.

Запишем систему уравнений установившегося режима указанной ЭЭС в форме баланса мощности:

$$\overline{W}_P(\overline{X}) = 0; \qquad (\text{П-1})$$

$$\overline{W}_Q(\overline{X}) = 0, \qquad (\text{П-2})$$

где $\overline{X}$ – вектор размерности $2(n-1)-n_{\text{г}}$, компонентами которого являются углы напряжений в узлах, за исключением ШБМ, и напряжения в узлах, не являющихся ШБМ и генераторными узлами.

Уравнения (П-1) – это $(n-1)$ уравнений баланса активной мощности в узлах ЭЭС, за исключением узла, являющегося ШБМ:

$$W_P(\overline{X}) = \sum_j P_{ij}(\overline{X}) - (P_{\text{г}i} - P_{\text{н}i}(U_i)).$$

Уравнения (П-2) – это $(n-n_{\text{г}}-1)$ уравнений баланса реактивной мощности в узлах, не являющихся ШБМ и генераторными узлами:

$$W_{Qi}(\overline{X}) = \sum_j Q_{ij}(\overline{X}) + Q_{\text{н}i}(U_i).$$

Будем искать предел по апериодической устойчивости рассматриваемой системы путём утяжеления исходного установившегося режима. Математически процесс утяжеления записывается следующим образом:

$$P_{\text{г}i} - P_{\text{н}i} = (P_{0\text{г}i} - P_{0\text{н}i}) + \lambda_i t. \qquad (\text{П-3})$$

Здесь $P_{0\text{г}i}$, $P_{0\text{н}i}$ – активные мощности генерации и нагрузки потребления в i-м узле в исходном установившемся режиме; λ_i – параметры, определяющие направление траектории утяжеления; t – переменная, определяющая величину утяжеления.

С учётом (П-3) систему уравнений (П-1) и (П-2) можно записать в виде

$$\overline{W}(\overline{X}, t) = 0. \qquad (\text{П-4})$$

Система уравнений (П-4) содержит $M = 2(n-1) - n_{\text{г}}$ уравнений и $(N+1)$ переменных, поэтому в соответствии с [1] одну из этих переменных можно рассматривать как независимую (например δ_1), а саму систему уравнений (П-4) – как задание остальных $2(n-1)-n_{\text{г}}$ переменных в качестве неявных функций от независимой переменной ($t = t(\delta_1)$, $\delta_2 = \delta_2(\delta_1)$ и т.д.).

В качестве независимой переменной выбираем δ_1. Определим производную функции $t = t(\delta_1)$ по δ_1. Для упрощения примем, что ЭЭС первыми $n_{\text{г}}$ узлами являются генераторные узлы, а узел ШБМ имеет номер n. Тогда в соответствии с [1] искомая производная определяется решением следующей системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial W_1}{\partial \delta_1} + \frac{\partial W_1}{\partial t}\frac{dt}{d\delta_1} + \sum_{j=2}^{n-1}\frac{\partial W_1}{\partial \delta_j}\frac{d\delta_j}{d\delta_1} + \sum_{k=n_{\text{г}}+1}^{n-1}\frac{\partial W_1}{\partial U_k}\frac{dU_k}{d\delta_1} = 0;\\
&\cdots\\
&\frac{\partial W_N}{\partial \delta_1} + \frac{\partial W_N}{\partial t}\frac{dt}{d\delta_1} + \sum_{j=2}^{n-1}\frac{\partial W_N}{\partial \delta_j}\frac{d\delta_j}{d\delta_1} + \sum_{k=n_{\text{г}}+1}^{n-1}\frac{\partial W_N}{\partial U_k}\frac{dU_k}{d\delta_1} = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (\text{П-5})$$

Отсюда

$$\frac{dt}{d\delta_1} = -\frac{D_1}{D},$$

где

$$D_1 = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial W_1}{\partial \delta_1} & \cdots & \frac{\partial W_1}{\partial U_{n-1}} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial W_N}{\partial \delta_1} & \cdots & \frac{\partial W_N}{\partial U_{n-1}} \end{bmatrix}; \qquad (П\text{-}6)$$

$$D = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial W_1}{\partial t} & \cdots & \frac{\partial W_1}{\partial U_{n-1}} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial W_N}{\partial t} & \cdots & \frac{\partial W_N}{\partial U_{n-1}} \end{bmatrix}. \qquad (П\text{-}7)$$

Из (П-6) видно, что D_1 равно якобиану $|\partial W / \partial\delta|$ системы уравнений установившегося режима рассматриваемой ЭЭС.

Таким образом,

$$\frac{dt}{d\delta_1} = -|\partial W / \partial\delta| / D. \qquad (П\text{-}8)$$

Примем, что при расчётах апериодической устойчивости ЭЭС допустимо использовать те же статические характеристики нагрузки потребления, что и при расчётах установившихся режимов ЭЭС. Тогда согласно [2] для рассматриваемой системы уравнений установившегося режима ЭЭС выполнены все условия соответствия знака якобиана знаку свободного члена характеристического уравнения ЭЭС. Соответственно, при приближении к пределу по апериодической устойчивости значение $|\partial W / \partial\delta|$ будет стремиться к нулю. Тогда в соответствии с (6) в предельном по апериодической устойчивости режиме $dt / d\delta_1 = 0$.

Совершенно аналогично доказывается, что если в качестве независимой переменной взять любую другую компоненту x вектора $\overline{X}$, то в предельном по апериодической устойчивости режиме $dt / dx = 0$.

Таким образом, для произвольной ЭЭС, удовлетворяющей условиям соответствия знака якобиана уравнений установившегося режима ЭЭС знаку свободного члена её характеристического уравнения, предел по апериодической устойчивости соответствует экстремуму утяжеляемой переменной (а следовательно — и экстремумам активных мощностей загружаемых/разгружаемых при утяжелении станций и нагрузок потребления).

В общем случае по достижении экстремума перетока по какому-либо из утяжеляемых сечений нельзя судить о достижении предела по апериодической устойчивости ЭЭС.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Государственное издательство физической и математической литературы, 1962, 608 с.

2. **Идельчик В.И.** Расчёты установившихся режимов электрических систем. – М.: Энергия, 1977, 253 с.

[08.09.2016]

*Автор: **Легкоконец Павел Владимирович** окончил в 2000 г. электроэнергетический факультет Московского энергетического института (МЭИ). В 2003 г. в МЭИ защитил кандидатскую диссертацию «Разработка методов и алгоритмов расчёта статической устойчивости электроэнергетических систем с гибкими электропередачами». Начальник отдела АО «СО ЕЭС».*

Elektrichestvo (Electricity), 2017, No. 1, pp. 18–22.

On the Analysis of Electric Power System Aperiodic Steady-State Stability Limits

LEGKOKONETS Pavel Vladimirovich *(PC «System Operator of the United Power System», Moscow, Russia) – Head of the Department, Cand. Sci. (Eng.)*

The article considers the possibility of finding a correspondence between the electric power system (EPS) aperiodic steady-state stability limit and the reaching of an extreme value of some physical variable(s). It is shown that for EPSs satisfying the conditions under which the Jacobian of the steady-state equation system has the sign coinciding with the sign of the EPS characteristic equation's absolute term, the aperiodic steady-state stability limit corresponds to the extreme value of the variable in which the operating mode is aggravated (and, consequently, to the extreme values of the active power outputs of the generators being loaded/unloaded and consumed loads in the operating mode aggravation scenario). It is also shown that in the general case one cannot judge about reaching the EPS aperiodic steady-state stability limit based on reaching an extreme value of power transmitted through one of the aggravated power system cut sets.

Key words: *power system, stability, steady-state operating conditions, power, analysis*

REFERENCES

1. **Fikhtengolts G.M.** *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya* (Differential and integral calculus). Moscow, State Publ. House physical and mathematical literature, 1962, 608 p.

2. **Idel'chik V.I.** *Raschety ustanovivshikhsya rezhimov elektricheskikh sistem* (Calculations of steady run of electric power systems). Moscow, Publ. «Energiya», 1977, 253 p.