

fields are as a rule modeled and calculated using dedicated computer programs. The numerical 2D and 3D models used in formulating and solving a problem frequently involve the need of carrying out a lot of preliminary calculations and, what is most important, powerful computation facilities and considerable time expenditures. The article presents development of triangle multiport cells of the lattice equivalent circuits for plane-parallel vortex electromagnetic fields proceeding from the laws and integral theorems of electricity and magnetism. The use of triangle cells facilitates modeling of calculated areas having intricate configuration and broadens the application field of well-known lattice equivalent circuits.

Key words: the oretical electrical engineering, laws of electricity and magnetism, plane-parallel electromagnetic field, lattice equivalent circuits.

REFERENCES

1. Inkin A.I., Aliferov A.I., Blank A.V. *Elektrichestvo – in Russ. (Electricity)*, 2014, No. 1, pp. 56–60.
2. Inkin A.I., Aliferov A.I., Blank A.V. *Elektrotehnika – in Russ. (Power Engineering)*, 2014, No. 12, pp. 59–62.
3. Inkin A.I., Aliferov A.I., Blank A.V. *Elektrichestvo – in Russ. (Electricity)*, 2014, No. 11, pp. 53–57.
4. Inkin A.I., Aliferov A.I., Blank A.V. *Elektrichestvo – in Russ. (Electricity)*, 2015, No. 12, pp. 38–44.
5. Inkin A.I., Blank A.V. *Elektrichestvo – in Russ. (Electricity)*, 2016, No. 10, pp. 53–57

[24.04.2017]

Электричество, 2017, № 10, с. 53–60

DOI:10.24160/0013-5380-2017-11-53-60

Влияние стыков в путевой структуре на характеристики системы электродинамической левитации

ВОЕВОДСКИЙ К.Э., СТРЕПЕТОВ В.М.

Рассматривается задача электродинамической левитации с учетом наличия в проводящем полотне стыков между отдельными элементами. Применяемый метод решения основан на общих подходах, разработанных авторами в предыдущих работах. Получено интегральное уравнение для вектора напряженности электрического поля в проводящем полотне, содержащем воздушный зазор. Решение этого уравнения позволяет найти подъемную и тормозную силы, действующие на экипажный электромагнит со стороны вихревых токов, наведенных в полотне. В приближениях «тонкого» полотна и зазора нулевой ширины (т.е. стыка), которые имеют силу для широкого диапазона входных данных, представляющих практический интерес, получено аналитическое решение упомянутого уравнения и явные выражения для сил подъема и торможения. Представлены результаты численных расчетов, из которых видно, что наличие стыков оказывает заметное влияние на левитационные характеристики системы.

К л ю ч е в ы е с л о в а: *путевая структура, стыки, электродинамическая левитация, вихревые токи, сила подъема, сила торможения, неоднородное путевое полотно, обобщенные функции, преобразование Фурье*

В связи с возросшим интересом к разработке и внедрению транспортных систем с использованием магнитолевитационных технологий применительно не только к пассажирским, но и грузовым перевозкам [1–4] проблема совершенствования методов электродинамических расчетов в подобных системах, включая и аналитические методы, представляется весьма актуальной.

В теоретических работах, посвященных задаче электродинамической левитации (ЭДЛ), предполагается, что поперечное сечение проводящего путевого полотна на всем протяжении пути неизменно. Между тем на практике полотно неизбежно содержит стыки между отдельными его элементами, что не соответствует этому предположению. Стыки оказывают на экипажные электромагниты динамическое воздействие, в результате чего реальные значения сил подъема и торможения отличаются от расчетных, полученных в стационарном приближении; кроме того, эти силы становятся зависящими от времени, что необходимо учитывать при изучении движения экипажа.

Ниже рассматривается задача ЭДЛ над бесконечно широким полотном, содержащим поперечный по отношению к направлению движения воздушный зазор. Получено аналитическое решение этой задачи в предельном случае зазора нулевой ширины, т.е. стыка двух соседних электрически изолированных участков полотна.

Исходная постановка задачи. Пусть путевая структура системы ЭДЛ имеет вид плоского проводящего слоя $0 \leq z \leq T$, в котором имеется зазор

$-a \leq x \leq a$. Слой заполнен немагнитной средой с удельной проводимостью σ_0 , а в зазоре, как и в областях $z < 0$ и $z > T$, проводимость отсутствует. Первичное электромагнитное поле создается экипажным электромагнитом, движущимся в плоскости $z = h > 0$ параллельно оси x с постоянной скоростью v (рис. 1). В проводящей полосе индуцируются вихревые токи; задача состоит в нахождении сил взаимодействия этих токов с экипажным электромагнитом.

Для этой задачи исходными соотношениями служат уравнения Максвелла в квазистационарном приближении, условия контакта на границах сред (непрерывность магнитной индукции \mathbf{B} и тангенциальных компонент напряженности электрического поля \mathbf{E}), а также требования к поведению этих полей в бесконечности, конкретный вид которых определяется конфигурацией первичного источника поля [5].

При отсутствии зазора все поля (в системе отсчета, связанной с электромагнитом) постоянны, поэтому переход в эту систему отсчета исключает временную зависимость. Наличие зазора делает задачу нестационарной, в чем и заключается главная трудность.

Применение метода условной границы. В [6] предложен метод условной границы, который позволяет свести представленную выше задачу к задаче расчета полей, возбуждаемых в слое $0 \leq z \leq T$, заполненном неоднородной проводящей средой. Приведем полную формулировку задачи в ее новом виде.

В области $0 \leq z \leq T$ выполняется система уравнений:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \sigma \mathbf{E}; \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t; \operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \operatorname{div} \mathbf{E} = -\rho \mathbf{E}. \quad (1)$$

В областях $z < 0$ и $z > T$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = 0; \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t; \operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \operatorname{div} \mathbf{E} = 0. \quad (2)$$

На плоскости $z=0$ справедливы условия:

$$[\mathbf{B}]_{z=0} = 0; [E_{x,y}]_{z=0} = 0; E_z|_{x=+0} = 0. \quad (3)$$

На плоскости $z=T$

$$[\mathbf{B}]_{z=T} = -\mathbf{B}_0; [E_{x,y}]_{z=T} = 0; E_z|_{z=-0} = 0. \quad (4)$$

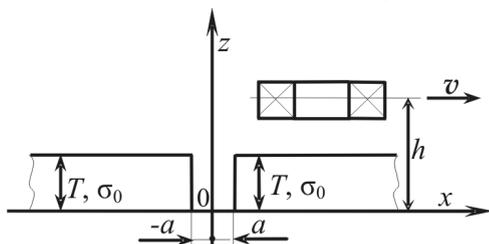


Рис. 1

В (1)–(4):

\mathbf{B} и \mathbf{E} – векторы магнитной индукции и напряженности электрического поля. При этом в области $z > T$ под \mathbf{B} понимается полное поле за вычетом \mathbf{B}_0 – собственного поля первичного источника, в остальной части пространства – полное поле. Обе вектор-функции рассматриваются как обобщенные функции переменных x, y, t , зависящие от z как от параметра [7];

σ – удельная проводимость – заданная функция координат, которая может принимать и нулевые значения;

$\rho = (\operatorname{grad} \sigma / \sigma)$. В этом выражении дифференцирование понимается в смысле обобщенных функций [7]. При этом в точках разрыва функция σ считается равной полусумме предельных значений справа и слева. В области, где $\sigma = 0$, вектор ρ принимается равным нулю.

Для данной конкретной задачи σ и ρ зависят только от x и задаются формулами:

$$\sigma(x) = \begin{cases} \sigma_0 & \text{при } x > a; \\ 0 & \text{при } x < a; \end{cases}$$

$$\rho(x) = 2(\delta(x-a) + \delta(x+a))e_x, \quad (5)$$

где δ – дельта-функция Дирака [7].

В условиях (3), (4) квадратные скобки означают скачок на границе, нижние индексы – соответствующие компоненты вектора. Таким образом, смысл этих условий заключается в требовании непрерывности вектора \mathbf{B} и тангенциальных компонент вектора \mathbf{E} , а также в равенстве нулю нормальной компоненты \mathbf{E} на внутренних сторонах обеих границ слоя $0 \leq z \leq T$.

Для того чтобы сообщить задаче единственность, к соотношениям (1)–(4) нужно добавить условия на бесконечности, которые будут конкретизированы ниже.

Как показано в [6], решение задачи (1)–(4) дает правильные значения \mathbf{B} во всем пространстве и \mathbf{E} в проводящей среде. Этого достаточно для нахождения силы, действующей на электромагнит, что и является нашей окончательной целью.

Основное интегральное уравнение для фурье-образа вектора \mathbf{E} . В [5] рассмотрена задача, состоящая из соотношений вида (1)–(4) и требований, чтобы $B_z \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \pm\infty$; $E_{x,y} \rightarrow 0$ при $z \rightarrow -\infty$, а фурье-образы \mathbf{B}_0, \mathbf{B} и \mathbf{E} по x, y, t были ограничены в нуле. Последнее условие заменяет традиционное условие убывания при $x, y, t \rightarrow \pm\infty$ и играет ту же роль – обеспечивает единственность решения задачи.

Для решения задачи в [5] получено общее интегральное уравнение (см. в [5] уравнение (18)), в ко-

тором роль неизвестной функции играет фурье-образ вектора \mathbf{E} в слое $0 \leq z \leq T$, а удельная проводимость произвольным образом зависит от координат. В интересующем нас случае, когда удельная проводимость не зависит от z , общее уравнение несколько упрощается, в частности, удается исключить из него z -компоненту \mathbf{E} . По этой причине в дальнейшем будем искать лишь E_x и E_y (для нашей окончательной цели этого достаточно), а через \mathbf{E} обозначать двумерный вектор $E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y$.

В настоящей работе применяется та же форма преобразования Фурье, что в [5, 8], параметры преобразований по x, y, t обозначены, соответственно, через ξ, η, ω . Как обычно, за фурье-образами интересующих нас функций сохраняются обозначения оригиналов. Так, $\mathbf{E}(\xi, \eta, z, \omega)$ – трехмерное преобразование Фурье вектор-функции $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ по переменным x, y, t ; $\sigma(\xi, \eta, z)$ и $\mathbf{p}(\xi, \eta, z)$ – двумерные преобразования Фурье по переменным x, y от соответствующих функций координат. В (6) и далее, где это не вызывает разночтений, явное обозначение аргументов для краткости опускается.

С учетом сделанных замечаний приведем двумерное уравнение для $\mathbf{E} = E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y$, вытекающее из основного уравнения работы [5]:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = & \frac{\omega}{k} e^{kz} \mu_0 \psi \mathbf{g} - \frac{i\mu_0 \omega \mathbf{g}}{2k^3} \int_0^T \langle \sigma * \mathbf{E}, \mathbf{g} \rangle e^{-k|z-z'|} dz' - \\ & - \frac{i\mu_0 \omega \mathbf{k}}{k^3 \operatorname{sh} k T} \int_0^T (K(z, z') - \operatorname{ch} k z) \langle \sigma * \mathbf{E}, \mathbf{k} \rangle dz' + \\ & + \frac{i\mathbf{k}}{k^3 \operatorname{sh} k T} \int_0^T \langle \mathbf{p} * \mathbf{E} \rangle dz', \end{aligned} \quad (6)$$

где $0 \leq z \leq T$, $\mathbf{k} = \xi \mathbf{e}_x + \eta \mathbf{e}_y$, $\mathbf{g} = \xi \mathbf{e}_x - \eta \mathbf{e}_y$, $k = |\mathbf{k}| = |\mathbf{g}| = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$;

$K(z, z') = \begin{cases} \operatorname{ch} k(T-z) \operatorname{ch} k z' & \text{при } z' \leq z, \\ \operatorname{ch} k(T-z') \operatorname{ch} k z & \text{при } z' > z; \end{cases}$ звездочка обозначает двумерную свертку по переменным ξ, η [9]; угловые скобки – скалярное произведение; величина ψ в свободном члене уравнения (6) – фурье-образ скалярного потенциала собственного поля, создаваемого экипажным электромагнитом на плоскости $z=0$. Согласно [10]

$$\psi(\mathbf{k}) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \delta(v\xi + \omega) V(\mathbf{k}) e^{-kh}, \quad (7)$$

где $V(\mathbf{k})$ – фурье-образ потенциальной функции тока, которая характеризует форму электромагнита. Конкретные расчеты выполнялись для прямоугольного электромагнита длиной $2a$, шириной $2b$ при намагничивающей силе I . В этом случае из [10]

$$V(\mathbf{k}) = 2I \frac{\sin a\xi \sin b\eta}{\pi \xi \eta}. \quad (8)$$

Из [5] можно получить формулу, выражающую B_z в области $z > T$ через E_x и E_y в слое $0 \leq z \leq T$, необходимую для определения сил, действующих на электромагнит:

$$B_z \Big|_{z>T} = \frac{i\mu_0}{2k} e^{-kz} \int_0^T e^{kz} (\eta(\sigma * E_x) - \xi(\sigma * E_y)) dz. \quad (9)$$

Приближение тонкого полотна. Уравнение (6) представляет собой (с учетом двумерной свертки) трехмерное интегральное уравнение в бесконечном плоском слое. Приближение «тонкого» полотна и конкретный вид функций $\sigma(\mathbf{k})$ и $\mathbf{p}(\mathbf{k})$ позволяют свести его к значительно более простому уравнению, допускающему явное аналитическое решение.

Согласно [11] в системе ЭДЛ отношение глубины скин-слоя к толщине полотна $\Delta / T \approx 1 / \sqrt{lk_0 T}$, где $l = \mu_0 \sigma_0 v T$, $k_0 = \pi / L$; L – характерный размер экипажного электромагнита. Для реальных значений параметров системы (размеры электромагнита, проводимость полотна, скорость движения) значение l – порядка нескольких десятков, а $k_0 T$ – нескольких тысячных, так что полотно в несколько раз тоньше скин-слоя. Добавим, что полотно большей толщины было бы и нецелесообразным, так как его нижняя часть, в которую внешнее поле проникает мало, фактически не использовалась бы. Поэтому с достаточной степенью точности можно считать, что поле пронизывает всю толщу полотна, т.е. \mathbf{E} в (6) не зависит от z . В этом предположении интегралы по z в (6) явно вычисляются и дают выражения, зависящие от e^{kT} . Формально значение k в (6) изменяется от 0 до ∞ , но наибольший вклад дают значения k , близкие к упомянутой выше характерной пространственной частоте k_0 . Поэтому можно считать, что $kT \ll 1$, и в степенном разложении e^{kT} ограничиться слагаемыми $1 + kT$.

В результате описанных преобразований можно получить уравнение:

$$\mathbf{E} = \mu_0 \frac{\omega}{k} \psi \mathbf{g} - \frac{i\mu_0 \omega T \mathbf{g}}{2k^3} \langle \sigma * \mathbf{E}, \mathbf{g} \rangle + \frac{i\mathbf{k}}{k^2} \langle \mathbf{p} * \mathbf{E} \rangle. \quad (10)$$

Дальнейшая редукция и решение основного уравнения. В интересующем нас случае σ и \mathbf{p} зависят (в координатном представлении) только от координаты x . Поэтому в (10) σ и \mathbf{p} (их фурье-образы) зависят только от ξ и свертки – фактически одномерные. Кроме того, y -компонента вектора \mathbf{p} равна нулю (см. (5)), поэтому $\langle \mathbf{p} * \mathbf{E} \rangle = p * E_x$. Здесь и далее через p обозначается x -компонента вектора \mathbf{p}

(единственная, отличная от 0). В этих условиях уравнение (10) удается разделить на два, из которых одно содержит только E_x , а в другом E_y явно выражается через E_x :

$$\begin{cases} E_x = \varphi(\xi) - \frac{i\mu_0\omega T}{2k}\sigma^* E + i\xi p^* E_x; \\ E_y = \frac{ip^* E_x - \xi E_x}{\eta}, \end{cases} \quad (11)$$

где $\varphi(\xi) = \mu_0 \frac{\eta\omega}{k} \psi(k)$; фактически значение φ зависит и от переменной η , однако для краткости здесь и далее явно указывается зависимость только от ξ , чтобы отличать функцию $\varphi(\xi)$ от ее обратного преобразования Фурье $\varphi(x)$; зависимость обеих функций от η подразумевается. При выводе (11) используются равенство $p(x)\sigma(x) = \sigma'(x)$ (см. определение $p(x)$) и вытекающее из него соотношение для фурье-образов этих функций $p(\xi)\sigma(\xi) = i\xi\sigma(\xi)$.

Для учета конкретного вида функций σ и p , отвечающего исследуемому случаю полотна с зазором в (11), удобно выполнить обратное преобразование Фурье по ξ и подставить в полученную формулу выражение (5). В ходе этих преобразований необходимо учесть известные свойства преобразования Фурье [8, 9] и данные [12, 13]. В результате можно получить следующее интегральное уравнение для $E_x(x)$:

$$\begin{aligned} E_x(x) = & \varphi(x) - 2(H(x)\varphi(a) + H(-x)\varphi(-a)) - \\ & - \frac{i\mu_0\sigma_0\omega T}{2\pi} \int_{|x'|>a} (K_0(|\eta(x-x')|) - 2H(x)K_0(|\eta(a+x')|) - \\ & - 2H(-x)K_0(|\eta(a+x')|))(E_x(x'))dx', \quad (12) \end{aligned}$$

где $H(x) = \frac{1}{4\text{sh}2|\eta|a} (\text{sgn}(x-a)e^{-|\eta|(x-a)}e^{2|\eta|a} - \text{sgn}(x+a)e^{-|\eta|(x+a)})$; K_0 – модифицированная функция Ханкеля [14].

Воспользуемся тем, что ширина зазора мала по сравнению с прочими характерными размерами системы. В этих условиях влияние стыка определяется главным образом не отсутствием вихревых токов в зазоре, а искажением их картины в целом, что вызвано отсутствием электрического контакта между областями $x < -a$ и $x > a$ по разные стороны зазора. По этой причине уравнение (12) можно заменить его предельным случаем при $a \rightarrow 0$. В результате такого предельного перехода получаем уравнение:

$$E_x(x) = \varphi(x) - \frac{\varphi(0)e^{-|\eta x|}}{2} - \frac{i\mu_0\sigma_0\omega T}{\sqrt{2\pi}} K_0(|\eta x|) * E_x(x) +$$

$$+ \frac{i\mu_0\sigma_0\omega T}{2\pi} e^{-|\eta x|} \langle E_x(x) K_0(|\eta x|) \rangle_{L_2}, \quad (13)$$

где звездочка обозначает свертку по x , угловые скобки – скалярное произведение функций в пространстве L_2 (т.е. интеграл от их произведения).

Уравнение (13) – одномерное интегральное уравнение, которое можно решить в квадратурах. Для этого в (13) нужно выполнить преобразование Фурье по x , в результате чего для $E_x(\xi)$ получим уравнение с вырожденным ядром. Стандартный метод решения таких уравнений [15] приводит к следующему результату для E_x :

$$E_x = \frac{2k\varphi(\xi)}{2k+i\alpha} - \frac{2k}{k(2k+i\alpha)Q} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k\varphi(\xi)}{2k+i\alpha} d\xi,$$

где $\alpha = \mu_0\sigma_0\omega T$; $Q = \frac{|\eta|\pi - i \text{sgn}(\omega)(\sqrt{4\eta^2 + \alpha^2} + |\alpha|)}{|\eta|\sqrt{4\eta^2 + \alpha^2}}$.

Силы подъема и торможения, действующие на электромагнит. Зная E_x , можно с помощью (11) найти E_y ,

а затем $B_z|_{z>T}$ по (9), которая в приближении тонкого полотна и в пределе $a \rightarrow 0$ принимает более простой вид: $B_z|_{z>T} = \frac{i\mu_0\sigma_0\omega T}{2k} e^{-kz} (\eta E_x - \xi E_y)$.

Далее сила, действующая на электромагнит, определяется на основе известных приемов. Пользуясь, например, подходом [10], можно прийти к следующей формуле для фурье-образа этой силы по времени:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (ik - ke_z) B_z(k, h, \omega) d\xi d\eta.$$

Выполняя все описанные преобразования и подстановки и вычитая из результата постоянную силу, действующую на электромагнит со стороны сплошного однородного полотна, получаем выражение для той добавочной силы $f(\omega)$, которая вызвана стыком. Оно имеет вид двойного интеграла по плоскости (ξ, η) . Для того чтобы найти временную зависимость силы, нужно подвергнуть $f(\omega)$ обратному преобразованию Фурье и в результате получить искомую силу $f(t)$ в виде тройного интеграла по всему пространству. Далее, подставив в него выражения (7), (8), перейдя к сферическим координатам (r, θ, φ) и воспользовавшись симметрией подынтегральной функции, можно получить следующее выражение для добавочной силы, действующей на прямоугольный электромагнит размером $2a \times 2b$:

$$f(u) = \frac{4\mu_0 l}{\pi^2} I^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \Phi(\varphi) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \Theta(\varphi, \theta, u). \quad (14)$$

Здесь

$$\Phi(\varphi) = G(\varphi) / \sin \varphi (2 - il \cos \varphi) \left(\pi + 2i \ln \frac{G(\varphi) + l \cos \varphi}{2|\sin \varphi|} \right);$$

$$G(\varphi) = \sqrt{4 + (l^2 - 4) \cos^2 \varphi};$$

$$\Theta(\varphi, \theta, u) = \frac{J(\varphi, \theta, u) \left(e_x + \frac{iR(\varphi, \theta)}{\cos \theta \cos \varphi - \sin \theta} e_z \right)}{(2R(\varphi, \theta) - il \cos \varphi \cos \theta) \sin \varphi \cos \theta};$$

$$R(\varphi, \theta) = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos \varphi \sin 2\theta}};$$

$$J(\varphi, \theta, u) = \int_0^\infty \prod_{n=1}^4 \frac{\sin q_n r}{r} \exp(-r(R(\varphi, \theta) + 1 + iu \sin \theta)) dr;$$

$$q_1 = \frac{a}{h} (\cos \theta \cos \varphi - \sin \theta); \quad q_2 = b / h (R(\varphi, \theta) + 1);$$

$q_3 = a / h \cos \theta \sin \varphi; \quad q_4 = b / h \cos \theta \sin \varphi; \quad u = vt / h$ – безразмерная координата центра магнита в единицах высоты подвеса. Значение $u = t = 0$ отвечает тому моменту, когда центр магнита находится над стыком.

Интеграл в выражении для $J(\varphi, \theta, u)$ вычисляется аналитически, тем самым фактически формула (14) выражает искомую силу в виде двойного интеграла в конечных пределах. Впрочем, для фактических расчетов ее целесообразно преобразовать. Продифференцировав функцию $f(u)$ и восстановив ее интегрированием с учетом того, что $f(u) \rightarrow 0$ при $u \rightarrow \pm\infty$, получим

$$f(u) = \frac{4\mu_0 l}{\pi^2} I^2 \int_{-\infty}^s du' \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \Phi(\varphi) S(\varphi, u'), \quad (15)$$

где $S(\varphi, u') = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\partial \Theta(\varphi, \theta, u')}{\partial u'} d\theta$.

Последний интеграл в (15) тоже вычисляется аналитически, так что и (15) дает выражение в виде двойного интеграла. Преимущество (15) в том, что нас интересует не отдельное значение функции $f(u)$, а ее таблица. В (14) u входит как параметр, и для каждого его значения интеграл в (14) нужно вычислять заново. А в (15) u играет роль верхнего предела интегрирования, так что при переходе к следующим значениям u интегральная сумма лишь дополняется новыми слагаемыми. Таким образом, с точки зрения объема расчета каждое новое значение в таблице требует вычисления не двойного, а однократного интеграла.

Результаты расчетов. Ниже представлены результаты численных расчетов для системы ЭДЛ с прямоугольным электромагнитом длиной 1 м и

шириной 0,5 м при высоте подвеса $h = 0,2$ м и значениях параметра $l = \mu_0 \sigma_0 v T$ от 1,96 до 58,9. Для алюминиевого полотна толщиной 5 мм (удельная проводимость $3,13 \cdot 10^7$ (Ом·мм)⁻¹) это соответствует скорости движения от 10 до 300 м/с. Но поскольку в приближении тонкого полотна интересующие нас силы зависят от произведения $l = \mu_0 \sigma_0 v T$, результаты после элементарного пересчета можно использовать и для других значений исходных данных.

Графики на рис. 2–4 иллюстрируют временную зависимость сил подъема (рис. 2 и 3) и торможения (рис. 4) при прохождении электромагнита над стыком.

По оси абсцисс отложен пропорциональный времени безразмерный параметр $S = vt / a$; таким образом, значениям $S = -1, 0, 1$ отвечают моменты времени, когда над стыком находятся передний край, центр, и задний край электромагнита. По оси

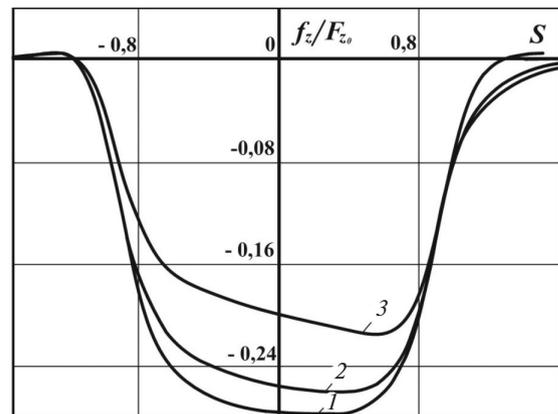


Рис. 2. Отклонение подъемной силы при высоких скоростях: 1 – 100 м/с; 2 – 125 м/с; 3 – 300 м/с

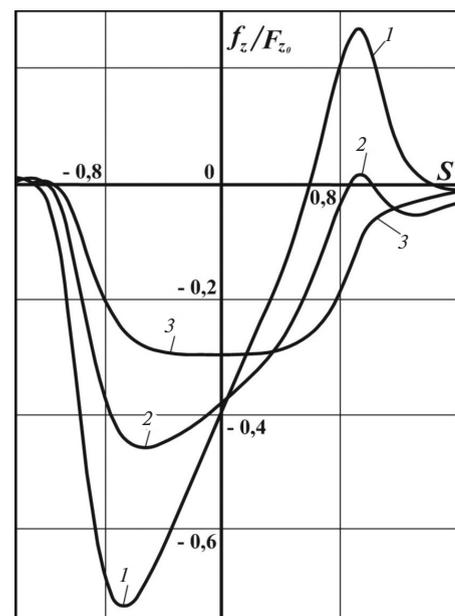


Рис. 3. Отклонение подъемной силы при низких скоростях: 1 – 10 м/с; 2 – 25 м/с; 3 – 75 м/с

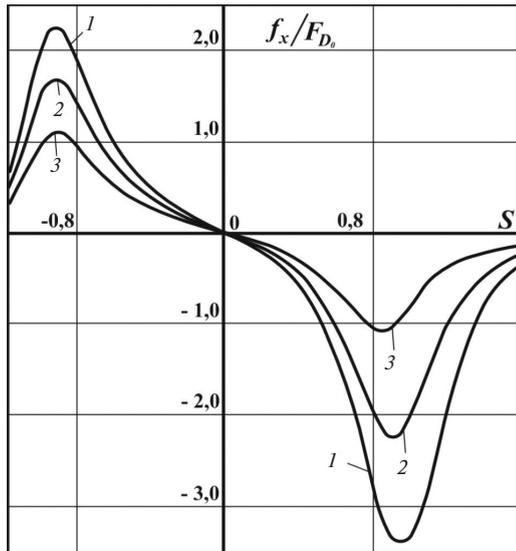


Рис. 4. Отклонение продольной силы при высоких скоростях: 1 – 100 м/с; 2 – 125 м/с; 3 – 300 м/с

ординат отложены относительные значения отклонения сил, т.е. отношения f_z / F_{z0} и f_x / F_{z0} , где f_z, f_x – компоненты добавочной силы, вызванной наличием стыка; F_{z0}, F_{D0} – подъемная и тормозная силы при данной скорости в отсутствие стыка.

Графики на рис. 2 и 3 относятся к разным диапазонам скоростей движения: на рис. 2 – от 100 до 300 м/с (высокие скорости), на рис. 3 – от 10 до 75 м/с (низкие скорости).

При высоких скоростях наличие стыка приводит к «провалу» подъемной силы примерно на 20–30% стационарного значения. Влияние стыка заметно сказывается в период нахождения электромагнита над стыком; при удалении края магнита от стыка примерно на 1/10 длины магнита добавка, вызванная стыком, уже меньше – 1%.

При низких скоростях (рис. 3) влияние стыка сильнее и носит более сложный характер. «Провал» может достигать 70% стационарного значения; кроме того, при низких скоростях подъемная сила может на некоторое время заметно превышать стационарное значение.

На рис. 4 представлено отклонение продольной силы (отличается от тормозной силой знаком) при высоких скоростях. Как видно из графиков, при приближении к стыку переднего края электромагнита на него начинает действовать добавочная сила, направленная по движению, что приводит к уменьшению тормозной силы. При достаточно высокой скорости, когда стационарное значение тормозной силы мало, результирующая продольная сила может даже превратиться в силу тяги. Максимум добавочной силы немного запаздывает по отношению к моменту, когда передний край проходит над стыком. Поведение добавочной силы после прохождения над стыком центра магнита в качест-

венном отношении такое же, но с учетом смены знака. Количественно прибавка тормозной силы в этот промежуток времени превышает значение ее падения до момента прохождения центра над стыком. Таким образом, в среднем наличие стыка увеличивает тормозную силу.

При переходе к низким скоростям поведение продольной силы изменяется не так сильно, как в случае подъемной силы.

Выводы. 1. Задача электродинамической левитации над полотном, содержащим неоднородность в виде стыка, может быть решена на основе разработанных авторами подходов: метода условной границы и основного интегрального уравнения ЭДЛ.

2. Для практически наиболее интересного случая, когда толщина путевой структуры меньше глубины скин-слоя, ее ширина превосходит ширину электромагнита, а ширина зазора между соседними участками мала по сравнению с размером магнита, основное интегральное уравнение допускает решение в квадратурах, достаточно удобное для численных расчетов.

3. Проходя над стыком, электромагнит испытывает кратковременное силовое воздействие, продолжительность которого примерно в полтора-два раза превышает время прохождения стыка.

4. В широком диапазоне скоростей вертикальное воздействие стыка проявляется в кратковременном провале подъемной силы на 20–50% ее стационарного значения. Вносимое стыком продольное возмущение направлено по движению до момента прохождения центра электромагнита над стыком и против движения – после этого момента. В среднем стык приводит к повышению тормозной силы. Значение продольного возмущения может в несколько раз превосходить стационарное значение тормозной силы. Качественно силовое воздействие стыка можно охарактеризовать как притяжение к стыку центра экипажного электромагнита. Для продольной силы это справедливо во всем изученном диапазоне входных данных, для вертикальной силы – в диапазоне высоких скоростей.

5. Силовое воздействие стыка достаточно заметно. Поэтому заслуживают изучения не только его влияние на динамику экипажа, но и методы его снижения путем усложнения конструкции стыка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Антонов Ю.Ф., Зайцев А.А. Магнитолевитационная транспортная технология/Под ред. В.П. Гапановича. – М.: Физматлит, 2014, 476 с.
2. Зайцев А.А., Талашкин Г.Н., Соколова Я.В. Транспорт на магнитном подвесе/Под ред. А.А. Зайцева. – СПб.: Изд. Петербургского государственного университета путей сообщения, 2010, 160 с.

3. **Зайцев А.А., Антонов Ю.Ф.** Контейнерный мост Санкт-Петербург—Москва на основе левитации. — Труды 2-й Международной научной конференции «Магнитолевитационные и транспортные технологии» (МТСТ-14), Санкт-Петербург, 17–20 июня 2014 г. — Киров: МЦНИП, 2014, с. 11–23.
4. **Антонов Ю.Ф., Никитин В.В., Хожанов А.И.** Технология HSST в проектах LINIMO и ROTEM. — Труды 1-й Международной научной конференции «Магнитолевитационные и транспортные технологии» (МТСТ-13), Санкт-Петербург, 29–31 октября 2013 г. — СПб.: ООО PUDRA, 2013, с. 133–137.
5. **Воеводский К.Э.** Интегральное уравнение для расчета квазистационарного электромагнитного поля в неоднородном проводящем слое. — М.: Изв. Вузов. Электромеханика, 1990, № 2, с. 13–18.
6. **Воеводский К.Э., Стрепетов В.М., Антонов Ю.Ф.** Метод условной границы. — Труды 4-й Международной научной конференции «Магнитолевитационные транспортные системы и технологии» (МТСТ-16), Санкт-Петербург, 24–26 мая 2016 г. — Сетевой научный журнал «Транспортные системы и технологии»: <http://www.transst.ru>, вып. 4, 2016, с. 133–144.
7. **Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.** Обобщенные функции и действия над ними. — М.: Физматгиз, 1959, 470 с.
8. **Брычков Ю.А., Прудников А.П.** Интегральные преобразования обобщенных функций. — М.: Наука, 1977, 288 с.
9. **Диткин В.А., Прудников А.П.** Интегральные преобразования и операционное исчисление. — М.: Физматгиз, 1961, 408 с.
10. **Воеводский К.Э., Мелик-Бархударян В.К.** О расчете магнитного поля заданной системы токов. — Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1989, № 4, с. 166–169.
11. **Lee S.-V., Menendez R.C.** Forces at Low and High-speed Limits Magnetic Levitation. — J. Appl. Phys., 1975, vol. 46, No. 1, p. 72.
12. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Таблицы интегральных преобразований. — М.: Наука, 1969, с. 16–110.
13. **Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.** Интегралы и ряды. Специальные функции. — М.: Наука, 1983, 752 с.
14. **Абрамовиц М., Стиган И.** Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979, 120 с.
15. **Краснов М.Л.** Интегральные уравнения. Введение в теорию. — М.: Наука, 1975, 300 с.

[12.05.2017]

А в т о р ы: Воеводский Константин Эммануилович окончил Ленинградский государственный университет (ныне Санкт-Петербургский государственный университет — СПбГУ) в 1973 г. Защитил в 1986 г. кандидатскую диссертацию «Методы расчета левитационных характеристик экипажа высокоскоростного наземного транспорта с электродинамическим подвесом». Доцент кафедры «Высшая геометрия» СПбГУ.

Стрепетов Владимир Михайлович окончил Ленинградский институт инженеров железнодорожного транспорта (ныне Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I — ПГУПС) в 1975 г. В 2003 г. защитил кандидатскую диссертацию «Повышение эффективности работы комбинированной системы левитации и тяги ВСНТ на переменном токе» Доцент кафедры «Теоретические основы электротехники» ПГУПС.

Elektrichestvo (Electricity), 2017, No. 10, pp. 53–60

DOI:10.24160/0013-5380-2017-11-49-53-60

The Influence of Joints in the Track Structure on the Electrodynamic Levitation System Performance

VOYEVODSKY Konstantin E. (*St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia*) — Associate Professor, Cand. Sci. (Eng.)

STREPETOV Vladimir M. (*St. Petersburg State University of Railway Engineering, St. Petersburg, Russia*) — Associate Professor, Cand. Sci. (Eng.)

The electrodynamic levitation problem formulated taking into account the presence of joints in the conducting track bed between its individual components is considered. The applied solution method is based on the general approaches developed by the authors in their previous works. An integral equation for the electric field intensity vector in the conducting bed containing an air gap is obtained. By solving this equation it is possible to find the elevation and deceleration forces acting on the vehicle's electromagnet from the side of eddy currents induced in the track bed. An analytical solution of the integral equation together with explicit expressions for the elevation and deceleration forces are obtained in the approximations of a "thin" bed and a zero-width gap (i.e., joint), which are valid for a wide range of input data that are of practical interest. The results of numerical calculations are presented, which demonstrate that the presence of joints has noticeable influence on the system's levitation characteristics.

Key words: *track structure, joints, electrodynamic levitation, eddy currents, elevation force, deceleration force, nonuniform track bed, generalized functions, Fourier transform*

REFERENCES

1. **Antonov Yu.F., Zaitsev A.A.** *Magnitolevitatsionnaya transportnaya tekhnologiya/Pod red. V.P. Gapanovicha* (Magnetogravitational transport technology/Edit. by V. P. Gapanovich). Moscow, Publ. Fizmatlit, 2014, 476 p.
2. **Zaitsev A.A., Talashkin G.N., Sokolova Ya.V.** *Transport na magnetnom podvese/Pod red. A.A. Zaitseva* (Transport in magnetic suspension/Edit. by A. A. Zaitsev). Publ. St. Petersburg State University of Railway Engineering, 2010, 160 p.
3. **Zaitsev A.A., Antonov Yu.F.** *Konteynernyi most Sankt-Peterburg–Moskva na osnove levitatsii. – Trudy 2-i Mezhdunarod. nauchnoi konf. «Magnitolevitatsionnye i transportnye tekhnologii» (MTST-14)* (Container bridge St.Petersburg–Moscow-based levitation. – Proc. of the 2nd International Scientific Conf. «Magnetolavitation and transport technologies» (MTST-14)). St. Petersburg, 17–20 June 2014, pp. 11–23.
4. **Antonov Yu.F., Nikitin V.V., Khozhainov A.I.** *Tekhnologiya NSST v proyektakh LINIMO i ROTEM. – Trudy 1-i Mezhdunarod. nauchnoi konf. «Magnitolevitatsionnye i transportnye tekhnologii» (MTST-13)* (Technology NSST projects LINIMO and ROTEM. – Proc. of the 1st International. Scientific Conf. «Magnetolavitation and transport technologies» (MTST-13)). St. Petersburg, 29–31 October 2013. St. Petersburg, LLC PUDRa, 2013, pp. 133–137.
5. **Voyevodskii K.E.** *Izv. vuzov. Elektromekhanika – in Russ. (News of Higher Education Institutions. Electromechanics)*, 1990, No. 2, pp. 13–18.
6. **Voyevodskii K.E., Strepetov V.M.** *Metod uslovnoi granitsy. – Trudy 4-i Mezhdunarod. nauchnoi konf. «Magnitolevitatsionnye i transportnye tekhnologii» (MTST-16)* (Method conventional boundaries. – Proc. of the 4th International. Scientific Conf. «Magnetolavitation and transport technologies» (MTST-16)). St. Petersburg, 24–26 May 2016. Setevoi nauchnyi zhurnal «Transportnye sistemy i tekhnologii»: <http://www.transssyst.ru>, iss. 4, 2016, pp. 133–144.
7. **Gel'fand I.M., Shilov G.E.** *Obobshchennye funktsii i deistviya nad nimi* (Generalization of functions and operations on them). Moscow, Fizmatgiz, 1959, 470 p.
8. **Brychkov Ya.A., Prudnikov A.P.** *Integral'nye preobrazovaniya obobshchennykh funktsii* (Integral transforms of generalized functions). Moscow, Publ. «Nauka», 1977, 288 p.
9. **Ditkin V.A., Prudnikov A.P.** *Integral'nye preobrazovaniya i operatsionnoye ischisleniye* (Integral transforms and operational calculus). Moscow, Fizmatgiz, 1961, 408 p.
10. **Voyevodskii K.E., Melik-Barkhudaryan V.K.** *Izv. AN SSSR. Energetika i transport – in Russ (News of the USSR Academy of Sciences. Power Engineering and Transport)*, 1989, No. 4, pp.166–169.
11. **Lee S.-V., Menendez R.C.** Forces at Low and High-speed Limits Magnetic Levitation. – J. Appl. Phys., 1975, vol. 46, No. 1, p. 72.
12. **Beitmen G., Erdeii A.** *Tablitsy integral'nykh preobrazovaniy* (Tables of integral transforms). Moscow, Publ. «Naika», 1969, pp. 16–110.
13. **Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I.** *Integraly i ryady. Spetsial'nye funktsii* (Integrals and series. Special functions). Moscow, Publ. «Nauka», 1983, 752 p.
14. **Abramovits M., Stigan I.** *Spravochnik po spetsial'nyim funktsiyam* (Handbook of special functions). Moscow, Publ. «Nauka», 1979, p. 120.
15. **Krasnov M.L.** *Integral'nye uravneniya. Vvedeniye v teoriyu* (Integral equations. Introduction to the theory). Moscow, Publ. «Nauka», 1975, 300 p.

[12.05.2017]