

Робастные регуляторы электроэнергетической системы на основе линейных матричных неравенств

ГАДЖИЕВ М.Г., МИСРИХАНОВ М.Ш., РЯБЧЕНКО В.Н.

С помощью линейных матричных неравенств осуществлен синтез робастных регуляторов полного порядка для электроэнергетической системы как динамической многомерной системы. Этим обеспечиваются размещение полюсов замкнутой системы в заданной выпуклой области комплексной плоскости, а также заданный уровень подавления внешних возмущений. Решение линейных матричных неравенств, получаемое с помощью высокоэффективных специализированных численных методов, представляет собой динамический закон управления в виде математической модели регулятора, обеспечивающего указанные заданные требования. К достоинствам используемого подхода относится простота выражения ограничений на основные характеристики переходных процессов, включая минимальную скорость затухания колебаний, минимальный коэффициент демпфирования, максимальную частоту собственных незатухающих колебаний. Данные ограничения выражаются посредством параметров определенных выпуклых областей комплексной плоскости, задаваемых с помощью линейных матричных неравенств.

Ключевые слова: энергосистема, внешние возмущения, управление, робастные регуляторы, математическая модель

Современные электроэнергетические системы (ЭЭС) являются сложными динамическими системами с взаимными связями различной глубины. Для решения задач управления и защиты в современных ЭЭС широко используются силовая электроника и компьютерные технологии. При этом нынешние возможности силовой электроники обеспечили создание быстродействующих статических компенсаторов реактивной мощности (СКРМ), а на их основе — управляемых гибких линий электропередачи переменного тока [1–5].

Одной из задач инновационных технологий на основе СКРМ является качественное улучшение автоматического управления ЭЭС как в установившихся, так и в переходных режимах. Такая возможность возникает благодаря способности СКРМ управлять взаимосвязанными параметрами, определяющими функционирование ЭЭС, включая реактивное сопротивление, ток, напряжение, углы фазовых сдвигов в узлах сети, затухание колебаний на различных частотах и др.

В нормальных режимах ЭЭС мощные возмущения, вызванные аварийными отключениями генерирующих мощностей станций или подключениями больших нагрузок, довольно редки. Однако небольшие возмущения возникают достаточно часто из-за различных коммутаций в сети и небольших изменений нагрузки. Действие этих возмущений вызывает электромеханические колебания. Последние обычно компенсируются с помощью автоматических регуляторов возбуждения сильного действия

(АРВ–СД). Такой же эффект оказывают системные стабилизаторы, связанные с системой возбуждения генераторов посредством АРВ пропорционального действия. Некомпенсируемые колебания мощности приводят в некоторых случаях к выходу генераторов из синхронизма и могут быть вызваны сравнительно небольшими возмущениями в ЭЭС. Частичная компенсация таких колебаний осуществляется за счет выбора на стадии проектирования ЭЭС определенной конструкции и схемы управления возбуждением генераторов, а также стабилизации характеристик нагрузок системы. Однако в процессе функционирования ЭЭС необходимы дополнительные управляющие воздействия, которые можно осуществлять совместной координированной работой СКРМ и системных стабилизаторов.

Синтез управления в ЭЭС, содержащей СКРМ и системные стабилизаторы для улучшения устойчивости и качества переходных процессов, демпфирования колебаний перетоков мощности и т.д., — достаточно сложная и актуальная задача. Во многих практических приложениях хороший регулятор должен помимо устойчивости обеспечивать также заданные временные характеристики замкнутой системы, такие как время регулирования, допустимое перерегулирование, удовлетворительное демпфирование колебаний переходных процессов.

Традиционный способ обеспечения удовлетворительных переходных процессов заключается в размещении полюсов замкнутой системы в подходящей области комплексной плоскости (модальные

методы). Одними из первых отечественных работ, посвященных применению модальных методов синтеза в ЭЭС, являются [6, 7]. Так, в модальном методе вычетов, который нашел широкое применение в электроэнергетике за рубежом [9], используется преобразование уравнений линейной модели ЭЭС к диагональному виду [10]. На основе этих преобразований строится так называемая матрица связности, определяющая взаимосвязь переменных состояния и мод колебаний (полюсов системы) и характеризующая чувствительность собственных значений матрицы состояния ЭЭС к изменениям диагональных элементов преобразованной матрицы состояний (вычеты передаточной функции).

Далее формируются уравнения синтеза передаточной функции регулятора ЭЭС на основе СКРМ, который обеспечивает, например, требуемую степень демпфирования колебаний перетоков мощности. Например, быстрое затухание, хорошее демпфирование колебаний и приемлемая динамика регулятора могут быть обеспечены при размещении полюсов замкнутой системы в области, представляющей собой пересечение смещенной полуплоскости, конического сектора и диска [11–16].

Дальнейшим развитием модального подхода к управлению ЭЭС являются работы [17–19], в которых доказана высокая эффективность применения методов теории модального управления для решения важных задач по обеспечению статической устойчивости, управляемости и наблюдаемости сложных ЭЭС, приведена модификация метода управления собственными значениями на основе многошаговой декомпозиции, предназначенного для решения задачи синтеза модального управления в ЭЭС высокой размерности. Кроме того, был создан метод модально-квадратического централизованного управления ЭЭС [20], в котором сочетаются достоинства методов модального управления и квадратической оптимизации и развит метод модально-квадратического управления сложными объединениями энергосистем на основе децентрализации и агрегирования моделей ЭЭС, входящих в это объединение [21, 22].

Заметим, что задача размещения полюсов в заданной области может рассматриваться в совокупности с другими целями управления, такими как минимизация H_∞ и H_2 нормы передаточной функции замкнутой системы [13, 23, 24].

Однако, обладая несомненными преимуществами, модальные методы имеют и существенные недостатки, главный из которых заключается в недостаточной робастности по отношению к сигнальным и параметрическим неопределенностям. Поскольку реальные системы всегда характеризуются наличием некоторой неопределенности, то возникает естественный вопрос о робастности размещения по-

люсов, т.е. остаются ли полюса заданной системы в заданной области комплексной плоскости в случае возмущения номинальной модели объекта управления. Данные вопросы робастности были исследованы как в контексте точечного размещения полюсов (традиционное модальное управление) [25, 26], так и для размещения полюсов в заданной области комплексной плоскости [27–29]. В [13] было получено расширение этих результатов на более общие области комплексной плоскости для размещения полюсов — области, описываемые линейными матричными неравенствами (ЛМН), введенными в рассмотрение в [12]. Данный класс областей покрывает широкое многообразие полезных областей для размещения полюсов, включая полуплоскости, диски, конические секторы, вертикальные и горизонтальные полосы, а также любые пересечения перечисленных областей.

В [13] рассматривается задача анализа робастности размещения полюсов в заданной области ЛМН при неструктурированной или параметрической неопределенности матрицы состояния системы, а также задача синтеза динамического регулятора полного порядка по выходу, обеспечивающего робастное размещение полюсов замкнутой системы в некоторой произвольной области ЛМН в присутствии статической и неструктурированной неопределенности в модели объекта управления. Эти задачи сводятся к решению линейных матричных неравенств. Поскольку в настоящее время для численного решения ЛМН разработаны эффективные вычислительные алгоритмы, описанные в [30, 31] или реализованные в [32–34], подход, представленный в [13] и применяемый в статье для синтеза регуляторов ЭЭС, дает удобный практический инструмент для численного решения задачи робастного размещения полюсов замкнутой системы в заданной области.

Для проверки теоретических результатов использовалась в том числе хорошо известная модель Хеффона—Филлипса [35, 36], представляющая собой многосвязный эквивалент одномашинной ЭЭС, работающей на шину неизменной мощности. Эта модель, имеющая сложную внутреннюю структуру, два входа, семь внутренних состояний и три выхода, широко используется в зарубежных исследованиях. Для подобных объектов решение таких задач, как синтез законов управления, динамических наблюдателей состояния, экстраполяторов («прогнозаторов»), идентификаторов и т.д., является не единственным, при том что различные решения могут отличаться, например, робастностью по отношению к неконтролируемым возмущениям.

Кратко суть подхода к автоматическому управлению ЭЭС, рассмотренному в статье, заключается в следующем. Формируется математическая много-

связная модель системы в пространстве состояний и предъявляются требования к переходным процессам, астатизму, запасу устойчивости и робастности. Затем эти требования формализуются в виде линейных матричных неравенств. Решение ЛМН, получаемое с помощью специализированных численных методов, представляет собой динамический закон управления (математическую модель регулятора), обеспечивающий заданные требования.

Особо следует отметить отсутствие каких-либо ограничений на выбор режима работы ЭЭС (нормального, послеаварийного и, возможно, аварийного). Данный подход с успехом может применяться во всех случаях, когда имеется возможность получения (идентификации) математической модели системы и реализация закона управления. Это те немногие ограничения, которые сопутствуют излагаемому подходу.

Робастное размещение полюсов в заданных областях с помощью линейных матричных неравенств. Далее приняты следующие обозначения: \mathbf{R} и \mathbf{C} — множества действительных и комплексных чисел соответственно; \mathbf{C}^- используется для открытой левой полуплоскости комплексной плоскости. Для комплексной матрицы M , M^* обозначает эрмитово сопряжение, а $\text{Herm}(M) = M + M^*$. Для эрмитовых матриц $M > N$ означает, что матрица $M - N$ является положительно определенной, а $M \geq N$ означает, что матрица $M - N$ является неотрицательно определенной. В блочно-симметрических матрицах «*» используется для замены блоков, индуцированных симметрией матрицы, например:

$$\begin{bmatrix} S & M \\ * & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S & M \\ M^T & Q \end{bmatrix}.$$

Максимальное сингулярное значение матрицы A : $\bar{\sigma}(A) = \lambda_{\max}^{1/2}(A^T A)$. Кронекерово произведение матриц A и B обозначается $A \otimes B = [a_{ij} B]_{ij}$.

Линейные матричные неравенства: основные определения и свойства. Напомним, что линейным матричным неравенством называется неравенство относительно неизвестных переменных $x = [x_1 \dots x_m]^T \in \mathbf{R}^m$ следующего вида:

$$L(x) = L_0 + x_1 L_1 + \dots + x_m L_m > 0, \quad (1)$$

где L_0, L_1, \dots, L_m — действительные симметрические матрицы размером $n \times n$ т.е. $L_i = L_i^T \in \mathbf{R}^{n \times n}$. Для матриц «>0» означает положительную определенность матрицы в левой части неравенства, т.е. $y^T L(x) y > 0 \forall y \in \mathbf{R}^n, y \neq 0$. Условие положительной определенности матрицы $L(x)$ можно эквивалентно выразить в виде $\lambda_{\min}(L(x)) > 0$, где $\lambda(\cdot)$ обозначает собственное значение соответствующей матрицы.

В линейном матричном неравенстве (1) функция $L(x)$ является аффинной и отображает конечномерное векторное пространство \mathbf{R}^m в множество $S^n = \{M: M = M^T \in \mathbf{R}^{n \times n}\}$ действительных симметрических матриц.

Линейные матричные неравенства $L(x) < 0$ и $L_1(x) < L_2(x)$ являются частными случаями (1), поскольку они могут быть переписаны в форме $-L(x) > 0$ и $L_2(x) - L_1(x) > 0$ соответственно.

Неравенство (1) является выпуклым ограничением над x , если из неравенств $L(y) > 0$ и $L(z) > 0$ следует $L\left(\frac{y+z}{2}\right) > 0$. В силу выпуклости ограничений, задаваемых линейным матричным неравенством, множество решений линейного матричного неравенства является выпуклым подмножеством \mathbf{R}^m и задача нахождения решения линейного матричного неравенства (1) представляет собой задачу выпуклой оптимизации. Выпуклость задачи имеет большое значение. Даже если в общем случае невозможно найти аналитическое решение линейного матричного неравенства (1), оно всегда может быть решено численными методами, гарантирующими нахождение решения в случае его существования.

Система ЛМН может рассматриваться как единое матричное неравенство:

$$\begin{cases} L_1(x) > 0, \\ M \Leftrightarrow L(x) = \text{diag}\{L_1(x)\}_{i=1,k} \text{---} > 0, \\ L_k(x) > 0. \end{cases}$$

Следовательно, множественные ограничения в виде линейных матричных неравенств могут накладываться на искомое решение — вектор x — без нарушения выпуклости.

В большинстве приложений линейных матричных неравенств в теории управления более естественной формой записи является не каноническая форма (1), а форма вида

$$L(X_1 \dots X_p) > R(X_1 \dots X_q), \quad (2)$$

где $L(\cdot)$, $R(\cdot)$ являются аффинными функциями некоторых матричных переменных X_i определенной структуры.

Одним из примеров может служить неравенство Ляпунова

$$A^T X + X A < 0, \quad (3)$$

где неизвестная действительная матрица X является симметрической.

Если определить неизвестные x_1, \dots, x_m как независимые скалярные элементы матрицы X , последнее неравенство можно записать в канонической

форме (1). Но выражение, представленное в канонической форме, является менее очевидным с точки зрения задач теории управления, чем (3). Более того, число матриц L_i , участвующих в каноническом представлении (1), имеет порядок приблизительно $n^2/2$ если $L \in \mathbf{R}^{n \times n}$. Поэтому каноническая форма (1) является крайне неэффективной с точки зрения хранения информации при реализации численных методов решения ЛМН, поскольку она требует сохранения $\sigma(n^2/2)$ матриц размерностью $n \times n$, в то время как было бы достаточно хранить в памяти компьютера информацию об одной матрице размерностью $n \times n$. В общем случае ЛМН рассматриваются в блочной матричной форме, где каждый блок представляет собой аффинную комбинацию матричных неизвестных.

Выделяют три основных вида задач, связанных с решением ЛМН. Нахождение решения x линейного матричного неравенства $L(x) > 0$ называется задачей разрешимости.

Минимизация выпуклой целевой функции $f: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ при ограничениях в виде линейного матричного неравенства

$$f(x) \rightarrow \min_{x \in \mathbf{R}^{m \times m}} \text{ при условии } L(x) > 0 \quad (4)$$

называется задачей оптимизации с линейными матричными ограничениями.

Задачей на обобщенное собственное значение называется задача нахождения минимального $\lambda \in \mathbf{R}$, для которого

$$\begin{cases} \lambda L(x) - G(x) > 0; \\ L(x) > 0; \\ H(x) > 0, \end{cases}$$

где $L(x), G(x), H(x) \in S^n$ – аффинные функции.

Области ЛМН. Рассмотрим некоторую область D левой комплексной полуплоскости C^- которую можно определить следующим образом:

$$D = \{z \in C: L + zM + \bar{z}M^T < 0\}, \quad (5)$$

где $L = L^T$ и M – действительные матрицы.

Область D , описываемую линейным матричным неравенством, будем называть областью ЛМН. Матричнозначная функция

$$f_D(z) = L + zM + \bar{z}M^T$$

называется характеристической функцией множества D .

Приведем несколько примеров элементарных областей ЛМН:

D_1 – полуплоскость $\text{Re} z < -\alpha$;

$$f_{D_1}(z) = z + \bar{z} + 2\alpha < 0; \quad (6)$$

D_2 – диск с центром в точке $(-q, 0)$ радиусом r :

$$f_{D_2}(z) = \begin{bmatrix} -r & q + z \\ q + \bar{z} & -r \end{bmatrix} < 0; \quad (7)$$

D_3 – конический сектор с вершиной в начале координат и внутренним углом 2θ

$$f_{D_3}(z) = \begin{bmatrix} \sin \theta(z + \bar{z}) & \cos \theta(z - \bar{z}) \\ -\cos \theta(z - \bar{z}) & \sin \theta(z + \bar{z}) \end{bmatrix} < 0. \quad (8)$$

Особый интерес представляет изображенная на рис. 1 область D_4 – пересечение областей D_1, D_2 и D_3 при $q=0$: $D_4(\alpha, r, \theta) = D_1 \cap D_2 \cap D_3$ с характеристической функцией:

$$f_{D_4}(z) = \text{diag}\{f_{D_i}(z)\}_{i=1,2,3} = \begin{bmatrix} f_{D_1}(z) & 0 & 0 \\ 0 & f_{D_2}(z) & 0 \\ 0 & 0 & f_{D_3}(z) \end{bmatrix} < 0. \quad (9)$$

Размещение полюсов замкнутой системы в этой области гарантирует:

минимальную скорость затухания колебаний переходных характеристик α ;

минимальный коэффициент демпфирования $\zeta = \cos \theta$;

максимальную частоту собственных незатухающих колебаний $\omega_d = r \sin \theta$.

Это, в свою очередь, ограничивает максимальное перерегулирование, частоту колебательных мод, время задержки, время нарастания, а также время регулирования [2, 3].

Ключевые свойства областей ЛМН включают следующее [12, 13]:

пересечение областей ЛМН является областью ЛМН;

любая выпуклая область комплексной плоскости, симметричная относительно действительной

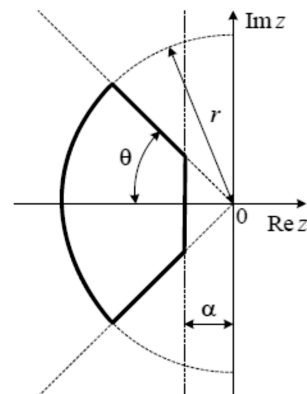


Рис. 1. Область ЛМН D_4

оси, может быть аппроксимирована областью ЛМН с любой заданной точностью;

действительная матрица A является D -устойчивой, т.е. все ее собственные значения расположены в области ЛМН D тогда и только тогда, когда существует матрица $X = X^T > 0$ такая, что

$$M_D(A, X) = L \otimes X + M \otimes (XA) + M^T \otimes (A^T X) < 0. \quad (10)$$

Этот результат можно рассматривать как обобщение теоремы Ляпунова, поскольку для обычной области устойчивости $f_D(z) = z + \bar{z} < 0$ неравенство (10) сводится к виду:

$$1 \otimes (XA) + 1 \otimes (A^T X) = A^T X + XA < 0, \quad X > 0.$$

Задача размещения полюсов в области ЛМН может быть сформулирована как задача выпуклой оптимизации с ограничениями в виде линейных матричных неравенств (задача выпуклого полуопределенного программирования), численное решение которой можно легко получить с помощью разработанных и широко используемых в настоящее время численных методов внутренней точки [12, 13]. Более того, возможно комбинировать требования размещения полюсов в заданной области с другими целями управления, сохраняя формулировку задачи в терминах линейных матричных неравенств [12, 13].

Робастная и квадратичная D -устойчивость линейных динамических систем. Рассмотрим линейную систему с неопределенностью

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(\Delta)x; \\ A(\Delta) &= A + B(E - \Delta D)^{-1} \Delta C, \quad A \in \mathbf{R}^{n \times n}, \end{aligned} \quad (11)$$

где E – единичная матрица; $A(\Delta)$ – матрица состояния, дробно-рационально зависящая от ограниченной по норме неопределенной матрицы

$$\Delta \in E^{m \times m}, \quad \bar{\sigma}(\Delta) \leq \gamma^{-1} \quad (12)$$

при $E = \mathbf{R}, \mathbf{C}$.

Значение $\Delta = 0$ соответствует номинальной матрице состояния A , а параметр γ определяет уровень неопределенности. Хотя система с неопределенностью (11) имеет физический смысл только для действительной неопределенности Δ , рассматривается также комплексный случай из-за его связи с динамической неопределенностью [13]. Перепишем (11) в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bv_\Delta; \\ z_\Delta = Cx + Dv_\Delta; \\ v_\Delta = \Delta z_\Delta, \end{cases} \quad (13)$$

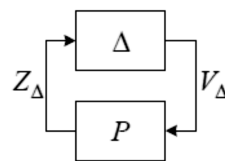


Рис. 2. Блок-схема замкнутой системы

и пусть $P(\lambda) = C(\lambda E - A)^{-1} B + D$. Тогда матрица $A(\Delta)$ является матрицей замкнутой системы, блок-схема которой изображена на рис. 2.

Пусть

$$D = \{z \in \mathbf{C} : f_D(z) = L + zM + \bar{z}M^T < 0\} \quad (14)$$

– некоторая заданная область ЛМН. Предполагается, что номинальная матрица состояния A является D -устойчивой, т.е. все ее собственные значения лежат в области D . Для некоторого заданного уровня неопределенности γ требуется определить, останутся ли собственные значения матрицы $A(\Delta)$ в области D для всех неопределенностей Δ , удовлетворяющих неравенству $\bar{\sigma}(\Delta) \leq \gamma^{-1}$.

Определение 1 (Робастная D -устойчивость) [13]. Система с неопределенностью (11), (12) называется робастно D -устойчивой, если собственные значения матрицы $A(\Delta)$ лежат в области D для всех допустимых неопределенностей Δ .

Неконсервативная оценка робастной D -устойчивости трудна, за исключением некоторых особых случаев, например для случая комплексной неструктурированной неопределенности Δ и открытой левой полуплоскости. Следующее определение квадратичной D -устойчивости является более практичным и конструктивным, хотя и консервативным, для целей анализа и синтеза [13].

Определение 2 (Квадратичная D -устойчивость) [13]. Для заданной области ЛМН (14), система с неопределенностью (11), (12) называется квадратично D -устойчивой, если существует действительная матрица $X = X^T > 0$ такая, что

$$\begin{aligned} M_D(A(\Delta), X) &= L \otimes X + \\ &+ \text{Herm}(M \otimes \{X(A + B(E - \Delta D)^{-1} \Delta C)\}) < 0 \end{aligned} \quad (15)$$

для всех комплексных матриц Δ таких, что $\bar{\sigma}(\Delta) \leq \gamma^{-1}$.

Напомним, что матрица A является D -устойчивой тогда и только тогда, когда существует матрица $X = X^T > 0$ такая, что $M_D(A, X) < 0$. Следовательно, квадратичная D -устойчивость включает в себя робастную D -устойчивость, но обратное в общем случае неверно [13].

В [13] было представлено достаточное условие квадратичной D -устойчивости на основе линейных

матричных неравенств. Для заданной области ЛМН (14) с характеристической функцией

$$f_D(z) = L + zM + \bar{z}M^T < 0, \quad L, M \in \mathbf{R}^{p \times p} \quad (16)$$

факторизуем матрицу M следующим образом:

$$M = M_1^T M_2, \quad (17)$$

где матрицы M_1, M_2 имеют полный ранг по столбцам.

Такую факторизацию нетрудно получить из сингулярного разложения матрицы M . Если матрица M имеет ранг k , обе матрицы $M_1, M_2 \in \mathbf{R}^{k \times p}$.

Лемма 1 [13]. Система (11) с неопределенностью (12) является квадратично D -устойчивой, если существуют матрицы $X \in \mathbf{R}^{n \times n}, P \in \mathbf{R}^{k \times k}$ такие, что

$$B_D(X, P) \stackrel{\Delta}{=} \begin{bmatrix} M_D(A, X) & M_1^T \otimes (XB) & (M_2^T P) \otimes C^T \\ M_1 \otimes (B^T X) & -\gamma P \otimes E & P \otimes D^T \\ (PM_2) \otimes C & P \otimes D & -\gamma P \otimes E \end{bmatrix} < 0; \quad (18)$$

$$P > 0; \quad X > 0, \quad (19)$$

где $M_D(A, X) \stackrel{\Delta}{=} L \otimes X + M \otimes (XA) + M^T \otimes (A^T, X) < 0$.

Неравенства (18), (19) представляют собой линейные матричные неравенства относительно неизвестных матриц X и P .

В практических приложениях, области ЛМН часто задаются в виде пересечения элементарных областей ЛМН таких как конический сектор, диск или вертикальная полуплоскость. Для заданных областей ЛМН D_1, \dots, D_N пересечение $D = D_1 \cap \dots \cap D_N$ имеет характеристическую функцию

$$f_D(z) = \text{diag}\{f_{D_i}(z)\}_{i=1, N}.$$

В таких случаях при анализе квадратичной D -устойчивости лемму 1 следует применять к общей характеристической функции $f_D(s)$, а для исследования робастной D -устойчивости более эффективной и менее консервативной является проверка квадратичной D -устойчивости для каждой элементарной области D_i независимо. Действительно, этот процесс гарантирует робастную устойчивость в отношении каждой области D_i что, в свою очередь, обеспечивает робастную D -устойчивость [13].

Синтез регулятора полного порядка для робастного размещения полюсов замкнутой системы. В этом подразделе рассмотрим решение задачи синтеза динамического регулятора полного порядка,

обеспечивающего робастное размещение полюсов замкнутой системы в заданной области ЛМН в присутствии неструктурированной неопределенности матрицы состояния модели объекта управления.

Постановка задачи следующая [13]. Рассмотрим модель объекта управления с неопределенностью в пространстве состояний:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_\Delta v_\Delta + B_u u; \\ y = C_v x + D_{y\Delta} v_\Delta; \\ z_\Delta = C_\Delta x + D_{\Delta\Delta} v_\Delta + D_{\Delta u} u; \\ v_\Delta = \Delta z_\Delta, \end{cases} \quad (20)$$

где $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ и неопределенная матрица Δ удовлетворяет условию $\bar{\sigma}(\Delta) \leq \gamma^{-1}$.

Для заданной области ЛМН

$$D = \{z \in C: f_D(z) = L + zM + \bar{z}M^T < 0\}$$

требуется найти динамический регулятор полного порядка, обеспечивающий робастное размещение полюсов замкнутой системы в области D :

$$K(s) = \begin{cases} \dot{x}_K = A_K x_K + B_K u; \\ u = C_K x_K + D_K y, \end{cases} \quad (21)$$

где $A_K \in \mathbf{R}^{n \times n}$.

Блок-схема замкнутой системы (20), (21) изображена на рис. 3. Матрица замкнутой системы имеет вид

$$A_{cl}(\Delta) = A_{cl} + B_{cl}(E - \Delta D_{cl})^{-1} \Delta C_{cl},$$

где

$$A_{cl} \stackrel{\Delta}{=} \begin{bmatrix} A + B_u D_K C_y & B_u C_K \\ B_K C_y & A_K \end{bmatrix}; \quad B_{cl} \stackrel{\Delta}{=} \begin{bmatrix} B_\Delta + B_u D_K D_{y\Delta} \\ B_K D_{y\Delta} \end{bmatrix};$$

$$C_{cl} \stackrel{\Delta}{=} [C_\Delta + D_{\Delta u} D_K C_y \quad D_{\Delta u} C_K];$$

$$D_{cl} \stackrel{\Delta}{=} D_{\Delta\Delta} + D_{\Delta u} D_K D_{y\Delta}.$$

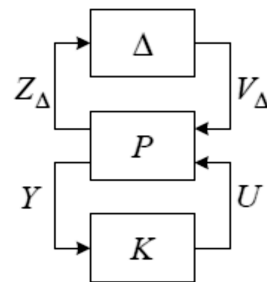


Рис. 3. Блок-схема замкнутой системы (20), (21)

Применение леммы 1 для $P=I$ дает достаточное условие квадратичной (и, следовательно, робастной) D -устойчивости замкнутой системы (20), (21), а именно, матрица замкнутой системы $A_{cl}(\Delta)$ является квадратично D -устойчивой, если существует матрица $X=X^T > 0$ такая, что

$$\begin{bmatrix} M_D(A_{cl}, X) & M_1^T \otimes (XB_{cl}) & (M_2^T) \otimes C_{cl}^T \\ M_1 \otimes (B_{cl}^T X) & -\gamma E & I \otimes D_{cl}^T \\ M_2 \otimes C_{cl} & I \otimes D_{cl} & -\gamma E \end{bmatrix} < 0, \quad (22)$$

где $M_1^T M_2 = M$ — факторизация полного ранга матрицы M .

Последнее матричное неравенство не является совместно выпуклым по неизвестной матрице X и неизвестным матрицам регулятора. Однако с помощью линеаризующей замены матриц регулятора, представленной в [12, 13], его можно свести к выпуклой задаче. Эта замена приводит к следующему решению задачи синтеза [13].

Лемма 2 [13]. Регулятор полного порядка по выходу (21) для объекта (20) и матрица $X=X^T > 0$ удовлетворяющие матричному неравенству (22), существуют тогда и только тогда, когда существуют две симметрические матрицы $R, S \in \mathbf{R}^{n \times n}$ и матрицы $\bar{A}_K, \bar{B}_K, \bar{C}_K$ и D_K такие, что

$$\Lambda(R, S) = \begin{bmatrix} R & E \\ E & S \end{bmatrix} > 0; \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} L \otimes \Lambda(R, S) + M \otimes \Phi_A + M^T \otimes \Phi_A^T \\ M_1 \otimes \Phi_B^T \\ M_2 \otimes \Phi_C^T \\ M_1^T \otimes \Phi_B & M_2^T \otimes \Phi_C^T \\ -\gamma E & I \otimes \Phi_D^T \\ I \otimes \Phi_D & -\gamma E \end{bmatrix} < 0, \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_A &= \begin{bmatrix} \Delta [AR + B_u \bar{C}_K & A + B_u D_K C_y] \\ \bar{A}_K & SA + \bar{B}_K C_y \end{bmatrix}; \\ \Phi_B &= \begin{bmatrix} \Delta [B_\Delta + B_u D_K D_{y\Delta}] \\ SB_\Delta + \bar{B}_K D_{y\Delta} \end{bmatrix}; \\ \Phi_C &= \begin{bmatrix} \Delta [C_\Delta R + D_{\Delta u} \bar{C}_K & C_\Delta + D_{\Delta u} D_K C_y] \\ \Delta [D_{\Delta \Delta} + D_{\Delta u} D_K D_{y\Delta}] \end{bmatrix}; \\ \Phi_D &= D_{\Delta \Delta} + D_{\Delta u} D_K D_{y\Delta}. \end{aligned}$$

Если линейные матричные неравенства (23), (24) разрешимы, передаточная матрица регулятора

полного порядка (21), обеспечивающего робастное размещение полюсов замкнутой системы в области D имеет вид

$$K(\lambda) = C_K (\lambda E - A_K)^{-1} B_K + D_K,$$

где матрицы A_K, B_K и C_K определяются из решения системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} \bar{B}_K = \tilde{N} B_K + S B_u D_K; \\ \bar{C}_K = C_K \tilde{M}^T + D_K C_y R; \\ \tilde{A}_K = \tilde{N} A_K \tilde{M}^T + \tilde{N} B_K C_y R + S B_u C_K M^T + \\ + S(A + B_u D_K C_y R). \end{cases} \quad (26)$$

где \tilde{N} и \tilde{M} — любые квадратные матрицы такие, что $\tilde{M} \tilde{N}^T = E - RS$

Неравенства (23), (24) есть линейные матричные неравенства относительно неизвестных матриц $R, S, \bar{A}_K, \bar{B}_K, \bar{C}_K$ и D_K которые могут быть решены численно с помощью соответствующих пакетов прикладных программ [32, 34]. Таким образом, лемма 2 обеспечивает конструктивный (но несколько консервативный) подход к задаче робастного размещения полюсов в области ЛМН.

Если область D представляет собой пересечение нескольких элементарных областей ЛМН D_i линейные матричные неравенства (23), (24) следует записать для каждой области относительно одних и тех же неизвестных, а результирующую систему линейных матричных неравенств следует решать совместно.

Отметим, что требование квадратичной D -устойчивости замкнутой системы нетрудно комбинировать с другими целями управления, такими как минимизация H_∞ и H_2 нормы передаточной функции замкнутой системы, ограничения на импульсные характеристики и т.д. [13, 24]. Например, если номинальный объект управления описывается уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_w w + B_u u; \\ z = C_z x + D_{zw} w + D_{zu} u; \\ y = C_y x + D_{yw} w, \end{cases} \quad (27)$$

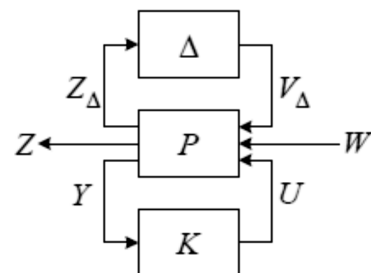


Рис. 4. Блок-схема замкнутой системы

где $w \in L_2 [0, \infty)$ — внешнее возмущение (сигнал, интегрируемый с квадратом на интервале $[0, \infty)$), можно обеспечить выполнение условия ограниченности H_∞ нормы передаточной матрицы замкнутой системы $T_{zw}(\lambda)$ от внешнего возмущения w к управляемому выходу z (см. рис. 4):

$$\|T_{zw}(\lambda)\|_\infty < \beta, \quad (28)$$

решая линейные матричные неравенства (23), (24) для робастного размещения полюсов вместе с дополнительным линейным матричным неравенством [13, 24]:

$$\begin{bmatrix} AR+RA^T+B_u\bar{C}_K+(B_u\bar{C}_K)^T \\ \bar{A}_K+(A+B_uD_KC_y)^T \\ (B_w+B_uD_KD_{yw})^T \\ C_zR+D_{zu}\bar{C}_K \\ * \\ A^T S+SA+\bar{B}_K C_y+(\bar{B}_K C_y)^T \\ (SB_w+\bar{B}_K D_{yw})^T \\ C_z+D_{zu}D_K C_y \\ * \\ * \\ -\beta I \\ * \\ D_{zw}+D_{zu}D_K D_{yw} \quad -\beta I \end{bmatrix} < 0. \quad (29)$$

Получаемый таким образом регулятор, помимо робастного размещения полюсов, обеспечивает также для замкнутой системы заданный уровень подавления внешних возмущений $w \in L_2 [0, \infty)$ равный β .

Примеры решения задачи синтеза робастных регуляторов для ЭЭС с помощью ЛМН. Рассмотрим модель линейного стационарного объекта управления $P(\lambda)$ с неопределенностью в пространстве состояний

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + \Delta A)x + B_w w + B_u u; \\ z = C_z x + D_{zw} w; \\ y = C_y x + D_{yw} w, \end{cases} \quad (30)$$

где $x \in \mathbf{R}^n$ — состояние; $z \in \mathbf{R}^{p_1}$ — управляемый выход; $y \in \mathbf{R}^{p_2}$ — измеряемый выход; $w \in \mathbf{R}^{m_1}$ — внешнее возмущение; $u \in \mathbf{R}^{m_2}$ — управление; $A, B_w, B_u, C_z, C_y, D_{zw}, D_{yw}$ — постоянные известные матрицы соответствующих размерностей; ΔA — действительная интервальная неопределенная матрица: $\Delta A = [\Delta a_{ij}]$; $a_{ij} \leq \Delta a_{ij} \leq \bar{a}_{ij}$, $i, j = 1, n$, соответствующая

неопределенным параметрам модели объекта управления. Уравнения вида (30) получаются при линеаризации нелинейной модели энергетической системы в окрестности некоторой рабочей точки и описывают динамику системы в отклонениях от данной рабочей точки. В таком случае неопределенная матрица ΔA соответствует параметрам энергетической системы, которые не могут быть измерены точно (например, индуктивность и емкость линии электропередачи), и имеет вид

$$\Delta A = [\delta_{ij}, a_{ij}]: \underline{\delta}_{ij} \leq \delta_{ij} \leq \bar{\delta}_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (31)$$

Заданная таким образом неопределенная матрица ΔA не изменяет структуры матрицы состояния A объекта управления (30).

Представим неопределенную матрицу в виде $\Delta A = F \Delta E$ и обозначим $B_\Delta = F, C_\Delta = E$ тогда уравнения объекта управления (30) можно записать в виде:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_\Delta v_\Delta + B_w w + B_u u; \\ y = C_y x + D_{yw} w; \\ z = C_z x + D_{zw} w; \\ z_\Delta = C_\Delta x; \\ v_\Delta = \Delta z_\Delta, \end{cases} \quad (32)$$

что соответствует представлению (20), (27), где матрицы $D_{\Delta\Delta}, D_{\Delta u}, D_{y\Delta}$ и D_{zu} — нулевые.

Требуется синтезировать регулятор в виде динамической обратной связи по измеряемому выходу:

$$u = K(s)y. \quad (33)$$

При этом регулятор обеспечивает для управляемого выхода z :

- переходные процессы, близкие к апериодическим;
- время регулирования, не превышающее заданного значения;
- высокий запас (степень) устойчивости замкнутой системы;
- робастность в условиях неопределенности модели объекта управления.

Для решения поставленной задачи применяется ранее изложенный подход, а именно: сформулируем изложенные ранее требования к замкнутой системе в смысле размещения ее полюсов в выбираемой из данных соображений области ЛМН $D \in \mathbf{C}^-$ и ограничения на H_∞ норму передаточной функции замкнутой системы (28). Затем найдем матрицы (A_K, B_K, C_K, D_K) -реализации регулятора $K(\lambda)$, решая последовательно систему линейных матричных неравенств (23), (24), (29) и систему линейных алгебраических уравнений (26).

Отметим, что задачу синтеза регулятора, сформулированную в терминах линейных матричных неравенств, можно трактовать и как задачу оптимизации: найти регулятор, обеспечивающий робастное размещение полюсов замкнутой системы в заданной области $D \in \mathbb{C}^-$ для наибольшего уровня неопределенности и выполнение ограничения (28) для наименьшего β . Такой постановке соответствует следующая задача выпуклой оптимизации: $\gamma \rightarrow \min$, $\beta \rightarrow \max$, при ограничениях в виде ЛМН (23), (24), (29). При этом матрицы реализации регулятора в пространстве состояний, как и в субоптимальной постановке, находятся из решения системы уравнений (26).

В качестве области ЛМН выберем область $D_4(\alpha, r, \theta) = D_1 \cap D_2 \cap D_3$, определяемую характеристическими функциями (6)–(9) и изображенную на рис. 1. Размещение полюсов замкнутой системы в этой области обеспечивает минимальную скорость затухания колебаний переходных характеристик α минимальный коэффициент демпфирования $\zeta = \cos\theta$ а также максимальную частоту собственных незатухающих колебаний $\omega_d = r \sin\theta$.

Область D_4 представляет собой пересечение нескольких областей ЛМН. Запишем в окончательном виде линейные матричные неравенства (24) для каждой из этих областей относительно одних и тех же неизвестных. Для области D_1 (полуплоскость $\text{Re}z < -\alpha$) $L = 2\alpha$, $M = 1$, неравенство (24) имеет вид:

$$\begin{bmatrix} 2\alpha\Lambda(R, S) + \Phi_A + \Phi_A^T & \Phi_B & \Phi_C^T \\ \Phi_B^T & -\gamma E & 0 \\ \Phi_C & 0 & -\gamma E \end{bmatrix} < 0, \quad (34)$$

где $\Lambda(R, S)$ определяется (23), а матрицы Φ_A , Φ_B и Φ_C определяются выражениями (25) (при этом матрица $\Phi_D = 0$).

Для области D_2 (диск с центром в точке $(-q, 0)$ радиусом r)

$$L = \begin{bmatrix} -r & q \\ q & -r \end{bmatrix}; \quad M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad M_1 = [1 \ 0]; \quad M_2 = [0 \ 1]$$

и ЛМН (24) принимает вид:

$$\begin{bmatrix} -r\Lambda(R, S) & q\Lambda(R, S) + \Phi_A & \Phi_B & 0 \\ q\Lambda(R, S) + \Phi_A^T & -r\Lambda(R, S) & 0 & \Phi_C^T \\ \Phi_B^T & 0 & -\gamma E & 0 \\ 0 & \Phi_C & 0 & -\gamma E \end{bmatrix} < 0. \quad (35)$$

Для области D_3 (конический сектор с вершиной в начале координат и внутренним углом 2θ):

$$L = 0; \quad M = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$$

а ЛМН (24) имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\theta(\Phi_A + \Phi_A^T) & \cos\theta(\Phi_A - \Phi_A^T) \\ \cos\theta(\Phi_A^T - \Phi_A) & \sin\theta(\Phi_A + \Phi_A^T) \end{bmatrix} \\ M_1 \otimes \Phi_B^T \\ M_2 \otimes \Phi_C^T \\ \begin{bmatrix} M_1^T \otimes \Phi_B & M_2^T \otimes \Phi_C^T \\ -\gamma E & I \otimes \Phi_D^T \\ I \otimes \Phi_D & -\gamma E \end{bmatrix} < 0, \quad (36)$$

$M_1^T M_2 - M$ – факторизация полного ранга матрицы M .

Таким образом, в рассматриваемой задаче система линейных матричных неравенств для области D_4 включает неравенства (23), (34)–(36), а также неравенство (29). Перейдем к рассмотрению численных примеров.

Примеры решения задач управления представлены в приложениях А и Б.

Приложение А. Синтез регулятора для объекта 5-го порядка. В качестве первого объекта управления рассмотрим ЭЭС, схема соединений которой в виде Sim Power Syst-блоков среды Simulink системы Matlab приведена на рис. 5, где $R_s = 2,645$ Ом; $L_s = 0,072$ Гн; $R = 5,2$ Ом; $L = 0,138$ Гн; $C_1 = C_2 = 0,964$ мкФ.

Линеаризация уравнений этой ЭЭС в условиях нормального режима приводит к стационарной модели 5-го порядка, описываемой в пространстве состояний системой уравнений (30), где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1,034 \cdot 10^6 & -1,034 \cdot 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & -1,034 \cdot 10^6 & 0 & 0 \\ -7,246 & 7,246 & -37,68 & 0 & 0 \\ 14,25 & 0 & 0 & -37,68 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -100,5 \end{bmatrix};$$

$$B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 14,25 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad B_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1,034 \cdot 10^6 \\ 0 \\ 0 \\ 100,5 \end{bmatrix}; \quad \Delta A = [\delta_{ij} a_{ij}]; -0,1 \leq \delta_{ij} \leq 0,1,$$

$$i, j = \overline{1, 5}; \quad C_z = C_y = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 235,1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad D_w = [-235,1 \ 0 \ 0 \ 1];$$

$D_u = 0$
при

$$x = [\Delta u_{C1} \ \Delta u_{C2} \ \Delta i_{RL1} \ \Delta i_{RS} \ \Delta i_{RL}]^T;$$

$$y = [\Delta u_{Br} \ \Delta u_{Line} \ \Delta i_{Load}]^T; \quad w = \Delta i_{Br}$$

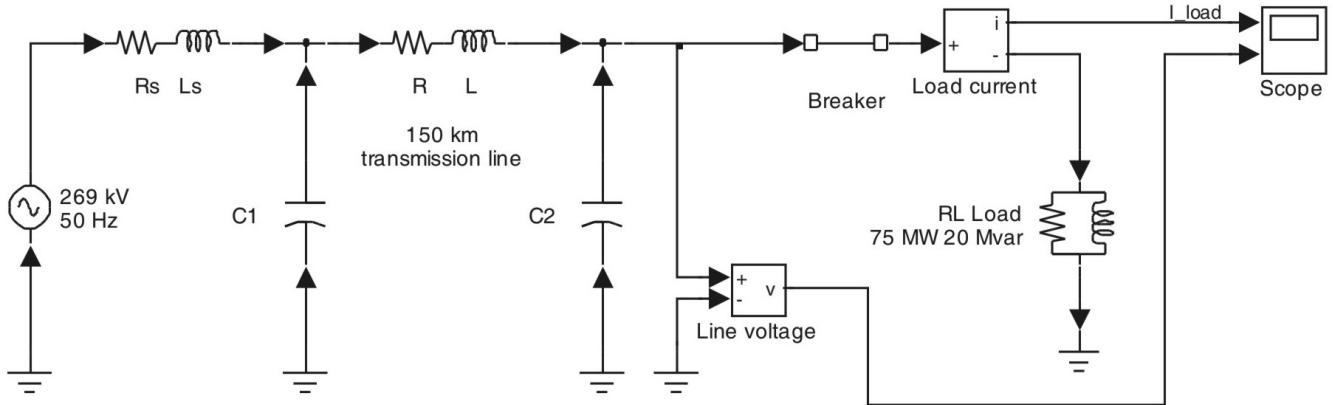


Рис. 5. Simulink-схема модели ЭЭС

Данная модель ЭЭС является устойчивой (статически устойчивой), поскольку собственные значения матрицы состояния имеют вид:

$$\lambda_1(A) = -100,493; \quad \lambda_{2,3}(A) = -18,839 \pm 2085,969j;$$

$$\lambda_{4,5}(A) = -18,842 \pm 5036,925j,$$

однако переходные процессы в ней характеризуются сильной колебательностью, обусловленной наличием двух пар комплексно-сопряженных полюсов, расположенных достаточно близко к мнимой оси и имеющих большие мнимые части. Кроме этого, матрица A плохо обусловлена, $\text{cond}A = 2,65422 \cdot 10^5$ что приводит к значительным вычислительным погрешностям. Обусловленность объекта управления значительно улучшается при переходе к сбалансированной реализации в пространстве состояний, в этом случае $\text{cond}A = 50,3121$. Анализ управляемости и наблюдаемости, проведенный для сбалансированной реализации объекта управления с использованием ленточных критериев управляемости и наблюдаемости [37], показал, что система является управляемой и наблюдаемой. Отметим, что даже для сбалансированной реализации объекта управления использование критериев управляемости и наблюдаемости Калмана не дает возможности сделать правильное заключение.

В качестве области $D \in \mathbb{C}^-$ для данной системы была выбрана область $D_4(\alpha, r, q, \theta)$ со значениями параметров $\alpha = 80$ (минимальная скорость затухания колебаний переходных характеристик): $r = 40000$; $q = -10000$; $\theta = \pi/3$ (минимальный коэффициент демпфирования $\zeta = \cos \frac{\pi}{3} = 0,5$). Максимальное время перерегулирования замкнутой системы не должно превышать 0.05 с. Исходя из технических требований, было выбрано значение $\gamma = 2 \cdot 10^{-7}$, соответствующее уровню неопределенности $\bar{\sigma}(\Delta) \leq \gamma^{-1} = 5 \cdot 10^6$. Неопределенная матрица ΔA представлена в виде $\Delta A = B_\Delta \Delta C_\Delta$, где $B_\Delta = C_\Delta = 10^{-4} E$, что при сделанном выборе γ соответствует допустимому отклонению элементов матрицы A от номинальных значений на $\pm 5\%$ т.е. $\bar{\sigma}(\Delta A) \leq 0,05$. Также было выбрано значение $\beta = 183,5$, ограничивающее H_∞ норму передаточной матрицы замкнутой системы $T_{zw}(\lambda)$ т.е. коэффициент усиления замкнутой системы от внешнего возмущения $w \in L_2[0, \infty)$ к управляемому выходу z . Заметим, что выбор значений γ и β определялся результатом предварительно-

го решения задачи оптимизации (34) при ограничениях в виде линейных матричных неравенств (23), (24), (29). Полученный в результате решения такой задачи оптимальный регулятор, обеспечивающий D -устойчивость замкнутой системы для наибольшего уровня неопределенности и выполнение ограничения (28) для наименьшего β является излишне консервативным, т.е. характеризуется очень большими энергетическими затратами на управление, и на практике для снижения этих затрат имеет смысл выбирать значения γ и β близкие к оптимальным.

Для сбалансированной реализации в пространстве состояний данной системы был найден регулятор полного порядка, обеспечивающий расположение полюсов в заданной области D для всех допустимых неопределенностей, а также ограниченность H_∞ нормы замкнутой системы заданным значением. Численное решение задачи реализовано с помощью пакета прикладных программ SeDuMi Interface для системы Matlab [26]. Полученные в результате вычислений матрицы регулятора для сбалансированной реализации системы были приведены с помощью обратного преобразования к матрицам регулятора для исходной системы:

$$A_K = \begin{bmatrix} -143273,168 & -24121,366 & -56476273,311 \\ 57601,483 & 94661,557 & 24395500,301 \\ 17,022 & 105,439 & -55985,682 \\ 50,520 & 109,234 & -2996,949 \\ 2213,534 & 633,647 & 3053181,325 \\ -41942512,024 & -1184653,864 \\ 18126479,148 & 51291,217 \\ -3291,103 & -422,240 \\ -12332,285 & -76,434 \\ 2227947,082 & 24333,472 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$B_K = \begin{bmatrix} -1086,473 & -3197,712 & -11935,667 \\ 590,230 & 1366,587 & 30993,811 \\ 19,828 & -24,303 & 4737,645 \\ -29,377 & 29,619 & -6959,992 \\ 97,888 & 200,041 & 18782,257 \end{bmatrix};$$

$$C_K = [26914,775 \quad 93138,594 \quad -1585597,781 \quad -1080102,608 \rightarrow$$

$$\rightarrow -130605,246];$$

$$D_K = [-409,818 \quad -736,775 \quad -40252,223].$$

Собственные значения матрицы состояния регулятора:

$$\lambda_1(A_K) = -10511,956; \quad \lambda_{2,3}(A_K) = -12150,226 \pm 26060,657j;$$

$$\lambda_{4,5}(A_K) = -28891,849 \pm 12398,251j.$$

а собственные значения матрицы состояния номинальной замкнутой системы равны

$$\lambda_1(A_{cl}) = -100,5; \quad \lambda_2(A_{cl}) = -1562,632;$$

$$\lambda_{3,4}(A_{cl}) = -3602,374 \pm 3003,728j;$$

$$\lambda_5(A_{cl}) = -10594,592; \quad \lambda_6(A_{cl}) = -13440,703;$$

$$\lambda_{7,8}(A_{cl}) = -12769,356 \pm 11925,324j;$$

$$\lambda_{9,10}(A_{cl}) = -17165,038 \pm 17090,377j.$$

Результаты моделирования замкнутой системы представлены на рис. 6–9.

На рис. 6,а изображены временные диаграммы переходных процессов в номинальной разомкнутой системе при подаче на вход возмущения $w = \Delta i_{Br}$ соответствующего приращению тока прерывателя (в отн. ед.) в процессе аварийного размыкания прерывателя. Эти переходные процессы характеризуются сильной колебательностью, большим перерегулированием, а также медленным затуханием колебаний. На рис. 6,б — временные диаграммы переходных процессов в замкнутой системе в аналогичной ситуации. На этих временных диаграммах независимо от неопределенности ΔA , процессы не носят ярко выраженного колебательного характера, при этом перерегулирование значительно уменьшилось по сравнению с разомкнутой системой, а время регулирования удовлетворяет поставленным требованиям. На рис. 7 приводятся временные диаграммы управления, на рис. 7,а показан сигнал управления $u(t)$ вырабатываемый регулятором $K(\lambda)$. При моделировании замкнутой системы этот сигнал пропусклся через сглаживающий фильтр:

$$\dot{u}_f = -T_f u_f + T_f u,$$

при $T_f = 10^4$, после чего подавался на вход объекта управления. Временная диаграмма сглаженного сигнала управления $u_f(t)$ представлена на рис. 7,б.

Приложение Б. Синтез регулятора для объекта 7-го порядка. Рассмотрим пример синтеза управления для ЭЭС, представляющей собой одномашинную ЭЭС, работающую на шину неизменной мощности [35]. Структурная схема данной ЭЭС приведена на рис. 8 в виде блоков среды Simulink системы Matlab.

Реализация в пространстве состояний данной ЭЭС приводит к стационарному объекту управления 7-го порядка, где

$$A = \begin{bmatrix} -20 & -0,04211 & 0 & 0 & 0 & 0,04 & -20 \\ 1000 & -0,8211 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,053 & -0,5517 & 0 & -572,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0751 & 0 & -118,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,093 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,053 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,081 & 0 & -13,6 & 0 & -20 \end{bmatrix};$$

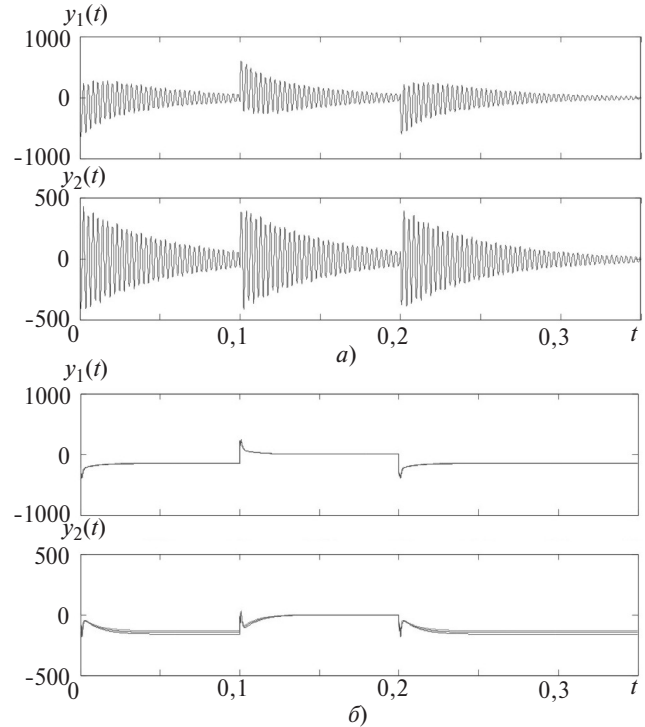


Рис. 6. Переходные процессы: а — в номинальной разомкнутой системе; б — в системе, замкнутой построенным регулятором

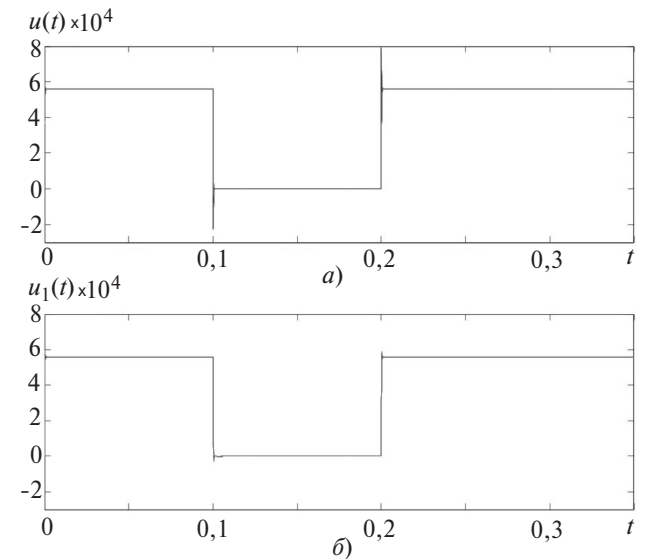


Рис. 7. Сигналы управления на выходе регулятора (а) и на выходе сглаживающего фильтра (б)

$$B_u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad B_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \Delta A = [\delta_{ij} a_{ij}]; -0,05 \leq \delta_{ij} \leq 0,5,$$

$$i, j = \overline{1,7};$$

$$C_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,081 & 0 & -13,596 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,093 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 314 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$C_y = [0 \ 0 \ 0 \ 0,093 \ 0 \ 0 \ 0]; \quad D_w = D_u = 0.$$

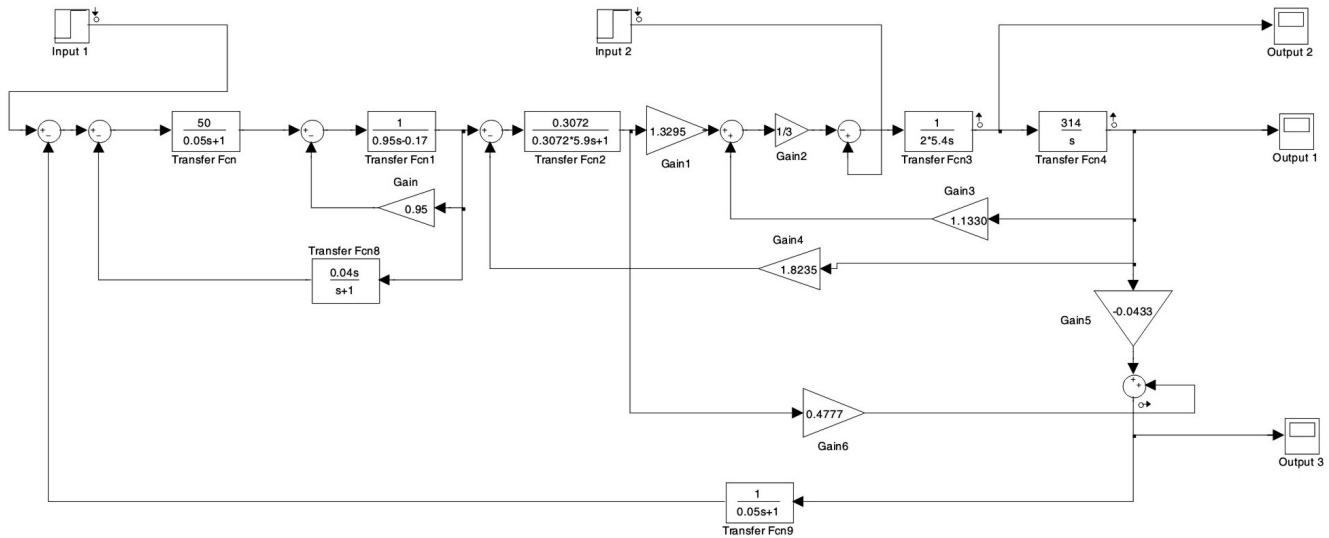


Рис. 9. Simulink-схема модели одномашинной ЭЭС

Данная система является устойчивой:

$$\lambda_1(A) = -2,133; \lambda_{2,3}(A) = -0,212 \pm 3,196j;$$

$$\lambda_{4,5}(A) = -0,913 \pm 1,364j; \lambda_{6,7}(A) = -18,996 \pm 2,018j,$$

но наличие трех пар комплексно-сопряженных полюсов, две из которых расположены достаточно близко к мнимой оси, обуславливает сильные медленно затухающие колебания переходных процессов в разомкнутой системе. Как и в предыдущем примере, матрица A реализации объекта управления в пространстве состояний плохо обусловлена, $\text{cond}A = 1,59805 \cdot 10^4$, Обусловленность объекта управления значительно улучшается при переходе к сбалансированной реализации в пространстве состояний, в этом случае $\text{cond}A = 18,73807$. Анализ с использованием критериев Калмана показал, что объект является полностью управляемым и наблюдаемым.

В качестве области $D \in C^-$ для данной системы была выбрана область $D_4(\alpha, r, q, \theta)$ со значениями параметров $\alpha = 1,335$ (минимальная скорость затухания колебаний переходных характеристик), $r = 43$, $q = -20$, $\theta = \pi/3$ (минимальный коэффициент демпфирования $\zeta = \cos \frac{\pi}{3} = 0,5$).

Максимальное время перерегулирования замкнутой системы не должно превышать 3 с. Исходя из требований к замкнутой системе, было выбрано значение $\gamma = 2 \cdot 10^{-5}$, соответствующее уровню неопределенности $\bar{\sigma}(\Delta) \leq \gamma^{-1} = 5 \cdot 10^4$. Неопределенная матрица ΔA представлена в виде $\Delta A = B_\Delta \Delta C_\Delta$, где $B_\Delta = C_\Delta = 10^{-3} I$ что при сделанном выборе γ соответствует допустимому отклонению элементов матрицы A от номинальных значений на $\pm 5\%$ т.е. $\bar{\sigma}(\Delta A) \leq 0,05$. Также было выбрано значение $\beta = 30$, ограничивающее H_∞ норму передаточной матрицы замкнутой системы $T_{zw}(\lambda)$.

Для сбалансированной реализации данного объекта управления был найден регулятор полного порядка, обеспечивающий расположение полюсов в заданной области D для всех допустимых неопределенностей, а также ограниченность H_∞ нормы замкнутой системы выбранным значением β . Полученные в результате вычислений матрицы регулятора для сбалансированной реализации

системы были приведены с помощью обратного преобразования к матрицам регулятора для исходной системы:

$$A_K = \begin{bmatrix} 390,244 & 10,627 & 97,316 & -1385,455 \\ -44398,707 & -0,001 & -8551,431 & 113252,404 \\ 2822,343 & 0,0 & 517,252 & -6731,301 \\ -2,735 & 0,0 & 0,713 & -26,900 \\ 0,162 & 0,0 & 0,022 & -0,329 \\ 2620,725 & 0,0 & 472,718 & -5915,521 \\ -341,548 & 0,0 & -47,213 & 538,877 \\ -17105,348 & -23,928 & -277,776 \\ 1380156,522 & 1871,504 & 33585,125 \\ -78472,024 & -110,698 & -2139,121 \\ -78,183 & -0,228 & 4,223 \\ -25,033 & -0,005 & -0,142 \\ -69552,129 & -103,599 & -2004,441 \\ 6456,439 & 8,119 & 271,824 \end{bmatrix};$$

$$B_K = [590,837 \quad -50263,726 \quad 3019,787 \quad 3,107 \quad 0,196 \quad 2743,780 \quad -261,435]^T;$$

$$C_K = [-3713,433 \quad -69,191 \quad 36,633 \quad -435,165 \quad 29954,203 \quad -122,611 \quad 4021,360];$$

$$D_K = 575,364.$$

Собственные значения матрицы состояния регулятора следующие:

$$\lambda_1(A_K) = -1,185; \lambda_{2,3}(A_K) = -8,248 \pm 11,963j;$$

$$\lambda_{4,5}(A_K) = -19,282 \pm 7,697j;$$

$$\lambda_{6,7}(A_K) = -19,565 \pm 1,015j,$$

а собственные значения матрицы состояния номинальной замкнутой системы равны:

$$\lambda_1(A_{cl}) = -1,815; \lambda_2(A_{cl}) = -2,220;$$

$$\lambda_{3,4}(A_{cl}) = -2,171 \pm 1,313j; \lambda_{5,6}(A_{cl}) = -2,356 \pm 1,838j;$$

$$\lambda_7(A_{cl}) = -12,480; \lambda_8(A_{cl}) = -14,968;$$

$$\lambda_{9,10}(A_{cl}) = -12,580 \pm 5,951j;$$

$$\lambda_{11,12}(A_{cl}) = -17,181 \pm 0,338j;$$

$$\lambda_{13,14}(A_{cl}) = -18,884 \pm 2,097j.$$

Результаты моделирования замкнутой системы представлены на рис. 9–11.

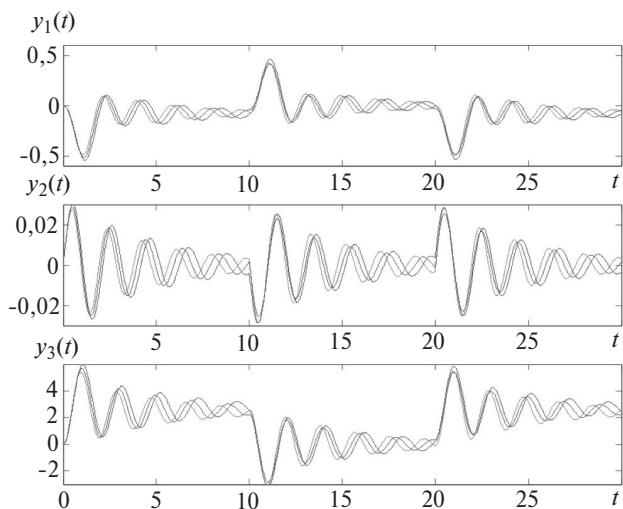


Рис. 9. Переходные процессы в разомкнутой системе

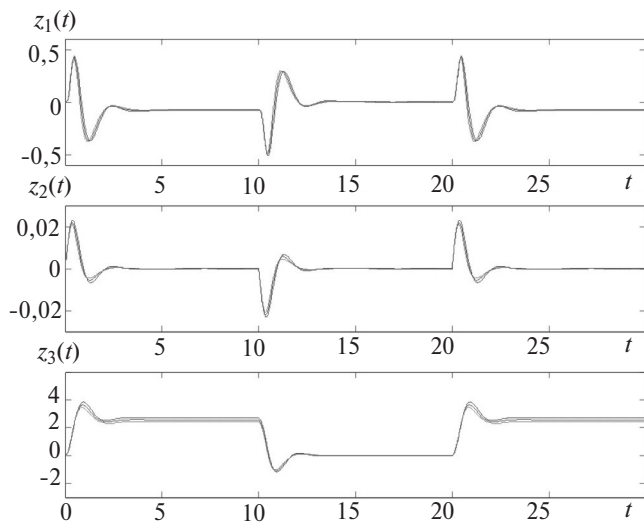


Рис. 10. Переходные процессы в системе, замкнутой построенным регулятором

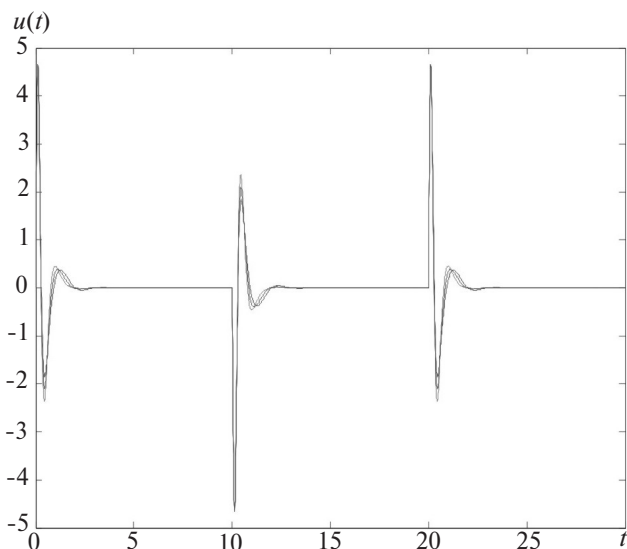


Рис. 11. Сигналы управления на выходе регулятора

На рис. 9 представлены временные диаграммы переходных процессов в разомкнутой системе при подаче на вход возмущения w . Эти переходные процессы характеризуются сильной колебательностью, большим перерегулированием, а также медленным затуханием колебаний. На рис. 10 можно видеть временные диаграммы переходных процессов в замкнутой системе в аналогичной ситуации. Можно видеть, что эти процессы независимо от возмущений ΔA не имеют ярко выраженного колебательного характера. При этом перерегулирование существенно уменьшено по сравнению с разомкнутой системой, а время регулирования удовлетворяет поставленным требованиям.

Заключение. В работе рассмотрено решение задачи синтеза регуляторов полного порядка для ЭЭС, в линейных математических моделях которых присутствует неопределенность. Данные регуляторы обеспечивают размещение полюсов управляемой системы в заданной выпуклой области комплексной плоскости, а также заданный уровень подавления внешних возмущений определенного класса. Задача формулируется в терминах ЛМН, что делает ее решение удобным с вычислительной точки зрения. Еще одно достоинство используемого подхода заключается в простоте выражения ограничений на переходные характеристики замкнутой системы (минимальная скорость затухания колебаний, минимальный коэффициент демпфирования, максимальная частота собственных незатухающих колебаний) через параметры определенных выпуклых областей комплексной плоскости, задаваемых с помощью линейных матричных неравенств. Это, в свою очередь, ограничивает максимальное перерегулирование, частоту колебательных мод, время задержки, время нарастания, а также время регулирования. В работе рассматриваются численные примеры синтеза регуляторов для конкретных ЭЭС, а также результаты моделирования. Для проверки теоретических результатов в работе используется в том числе хорошо известную модель Хеффона-Филлипса, представляющая собой многосвязный эквивалент одномашинной ЭЭС, работающей на шину неизменной мощности. Для подобных объектов решение таких задач как синтез законов управления, динамических наблюдателей состояния, экстраполяторов (прогнозаторов), идентификаторов и т.д. является неединственным, при том что различные решения могут отличаться, например, робастностью по отношению к неконтролируемым возмущениям. Отметим, что таким известным методом как D-разбиение получить решение синтеза управления для данной многосвязной модели ЭЭС невозможно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кочкин В.И., Нечаев О.П. Применение статических компенсаторов реактивной мощности в электрических сетях энергосистем и предприятий. – М.: Изд-во НЦ ЭНАС, 2000, 248 с.

2. Acha E., Fuerte-Esquivel C.R., Ambriz-Pérez H., Angeles-Camacho C. FACTS: Modelling and Simulation in Power Networks. John Wiley & Sons, 2004, 420 p.
3. Flexible AC Transmission Systems (FACTS)/Ed. Yong Hua Song and Allan T. Johns. London, EYE, 1999, 592 p.
4. FACTS: Modelling and Simulation in Power Networks/Tachi E., et al. — N.-Y.: John Wiley and Sons, 2004, 420 p.
5. Hingorani N.G., Gyugyi L. Understanding FACTS: Concepts and Technology of Flexible AC Transmission Systems. IEEE Press, 2000, 429 p.
6. Баринов В.А., Совалов С.А. Модальное управление режимами ЭЭС. — Электричество, 1986, № 8, с. 1–6.
7. Брузгин Б.И. Модальное управление режимами энергосистем. — Анализ функционирования и управления режимами сложных электроэнергетических систем. — Сб. науч. трудов / ЭНИН им. Г.М. Кржижановского. М., 1989, 180 с.
8. Жданов П.С. Вопросы устойчивости электрических систем. М.: Энергия, 1979, 456 с.
9. Kundur P. Power system stability and control. NY, McGraw-Hill, 1994, 1176 p.
10. Андерсон П., Фауд А. Управление энергосистемами и устойчивость. М.: Энергия, 1980, 568 с.
11. Gutman S., Jury E.I. A General Theory for Matrix Root Clustering in Subregions of the Complex Plain. — IEEE Trans. AC, 1981, vol. AC-26, pp. 853–863.
12. Chilali M., Gahinet P. Design with Pole Placement Constraints: An LMI Approach. — IEEE Trans. AC, 1996, vol. 41, No. 3, pp. 358–367.
13. Chilali M., Gahinet P. and Apkarian P. Robust Pole Placement in LMI Regions. — IEEE Trans. AC, 1999, vol. 44, No. 12, pp. 2257–2270.
14. Курдюков А.П., Тимин В.Н. H_1 -управление энергетической системой в аварийном режиме. Ч. 1. Теоретические основы синтеза робастных H_1 -регуляторов. — Проблемы управления, 2009, вып. 1, с. 8–17.
15. Мисриханов М.Ш., Ситников В.Ф., Шаров Ю.В. Модальный синтез регуляторов на основе устройств FACTS. — Электротехника, 2007, № 10, с. 22–29.
16. Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2008, 280 с.
17. Шаров Ю.В. О развитии методов анализа статической устойчивости электроэнергетических систем. — Электричество, 2017, № 1, с. 12–18.
18. Шаров Ю.В. Применение модального подхода для решения проблемы обеспечения статической устойчивости электроэнергетических систем. — Известия РАН, Энергетика, 2017, № 2, с. 13–29.
19. Гаджиев М.Г., Мисриханов М.Ш., Шаров Ю.В. Модальный синтез законов управления в электроэнергетических системах на основе многошаговой декомпозиции. — Электричество, 2017, № 11, с. 4–11.
20. Мисриханов М.Ш., Шаров Ю.В. Модально-оптимальное управление электроэнергетическими объектами. — Вестник ИГЭУ, 2004, вып. 4, с. 83–98.
21. Мисриханов М.Ш., Ситников В.Ф., Шаров Ю.В. Оптимальные регуляторы на основе устройств FACTS для децентрализованного управления крупными ЭЭС. — Электротехника, 2008, № 2, с. 55–61.
22. Мисриханов М.Ш., Ситников В.Ф., Шаров Ю.В. Оптимальные регуляторы на основе устройств FACTS для децентрализованной модели ЭЭС. — Вестник МЭИ, 2009, № 3, с. 35–41.
23. Haddad W.M. and Bernstein D.S. Controller Design with Regional Pole Placement. — IEEE Trans. AC, 1992, vol. 37, pp. 54–61.
24. Scherer C.W., Gahinet P. and Chilali M. Multiobjective Output-Feedback Control via LMI Optimization, IEEE Trans. AC, 1997, vol. 42, pp. 896–911.
25. Kautsky J., Nichols N.K., and Van Dooren P. Robust Pole Assignment in Linear State Feedback. — Int. J. Contr., 1985, vol. 41, pp. 1129–1155.
26. Martin J.M. State-Space Measures of Robustness of Pole Locations for Structured and Unstructured Perturbations. Syst. Contr. Lett., 1991, vol. 16, pp. 423–433.
27. Chou J.H., Ho S.J., and Horng R. Pole Assignment Robustness in a Specified Disc. — Syst. Contr. Lett., 1991, vol. 16, pp. 1041–1046.
28. Arzelier D., Bernussou J., and Garcia G. Pole Assignment of Linear Uncertain Systems in a Sector via a Lyapunov-Type Approach. — IEEE Trans. AC, 1993, vol. 38, pp. 1128–1131.
29. Garcia G., and Bernussou J. Pole Assignment for Uncertain Systems in a Specified Disk by State Feedback. — IEEE Trans. AC, 1995, vol. 40, pp. 184–190.
30. Nesterov Y., and Nemirovskii A. Interior Point Polynomial Algorithms in Convex Programming: Theory and Applications. — SIAM Studies Appl. Math., 2001, 404 p.
31. Nemirovskii A., and Gahinet P. The Projective Method for Solving Linear Matrix Inequalities. — Math. Programming. Series B, 1997, vol. 77, pp. 163–190.
32. Gahinet P., Nemirovsky A., Laub A.J., and Chilali M. The LMI Control Toolbox. Natick, MA: The Math Works, 1995, 50 p.
33. Sturm J.F. Using SeDuMi 1.02, a Matlab Toolbox for Optimization over Symmetric Cones. — Optimization Methods and Software, 1999, vol. 11–12, pp. 625–653.
34. Peaculle D., Henrion D., Labit Y., and Taitz K. User's Guide for SeDuMi Interface 1.04. LAAS – CNRS. — Toulouse (France), 2002, 36 p.
35. Heffron W.G., Phillips R.A. Effect of modern amplitudyne voltage regulator on under excited operation of large turbine generators. — AIEE Trans., 1952, vol. PAS-71, pp. 692–697.
36. Wang H, Du W. Analysis and Damping Control of Power System Low-frequency Oscillations. — Springer Press, New York, 2016, 394 p.
37. Зубов Н.Е., Микрин Е.А., Рябченко В.Н. Матричные методы в теории и практике систем автоматического управления летательными аппаратами. — М.: Изд-во МГТУ имени Н.Э. Баумана, 2016, 666 с.

[08.06.2018]

Авторы: Гаджиев Магомед Гаджиевич окончил электроэнергетический факультет (ЭЭФ) Московского энергетического института (МЭИ) в 2006 г. В 2012 г. защитил кандидатскую диссертацию «Повышение точности учета потерь мощности на корону при оперативной оптимизации режима ЭЭС» в МЭИ. Заведующий научно-исследовательской лабораторией кафедры электроэнергетических систем МЭИ.

Мисриханов Мисрихан Шапиевич окончил ЭЭФ МЭИ в 1974 г. В 2010 г. защитил докторскую диссертацию «Основы теории инвариантного управления и ее применение для создания технических систем» в ИПУ РАН. Профессор МЭИ.

Рябченко Владимир Николаевич окончил Иркутское высшее военное авиационное инженерное училище в 1983 г. по специальности «Электро- и приборное оборудование летательных аппаратов». В 2002 г. защитил докторскую диссертацию в Военно-воздушной инженерной академии имени Н.Е. Жуковского. Ведущий научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории кафедры электроэнергетических систем МЭИ.

Robust Electric Power System Controllers Synthesized on the Basis of Linear Matrix Inequalities

GADZHIYEV Magomed G. (*National Research University «Moscow Power Engineering Institute» («NRU «MPEI»), Moscow, Russia*) – Head of the Research Laboratory, Cand. Sci. (Eng.)

MISRIKHANOV Misrikhan Sh. (*«NRU «MPEI», Moscow, Russia*) – Professor, Dr. Sci. (Eng.)

RYABCHENKO Vladimir N. (*«NRU «MPEI», Moscow, Russia*) – Leading researcher of the Research Laboratory, Dr. Sci. (Eng.)

Full-order robust controllers for an electric power system a samulti dimensional dynamic system a resyn the siz edusing linear matrix in equalities. In this way, the desiredloci of closed-loop system polesin the specified convex region of a complex plane are obtainedalong with the specified level of suppressing external disturbances. The solution of linear matrix in equalities obtained by using dedicated high-efficient numerical method sisessentially a dynamic control law representing the mathematical model of a controller fulfilling the specified requirements mentioned above. The advantages of the applied approach includes implicity of the expression representing the constraints imposed on the key characteristics of transients, including the minimal oscillation decay rate, the minimal damping factor, and the maximal frequency of natural undamped oscillations. The seconstrainsare expresse dinterms of the parameters of certain convex domains of a complex plane specified by means of linear matrix inequalities.

Key words: *power system, external disturbances, control, robust controllers, mathematical model*

REFERENCES

1. Kochkin V.I., Nechayev O.P. *Primeneniye staticheskikh kompensatorov reaktivnoi moshchnosti v elektricheskikh setyakh energosistem i predpriyatii* (The use of static compensators with active power in the electrical networks of power systems and enterprises). Moscow, Scientific Centre «ENAS», 2000, 248 p.
2. Acha E., Fuerte-Esquivel C.R., Ambriz-Pürez H., Angeles-Camacho C. *FACTS: Modelling and Simulation in Power Networks*. John Wiley & Sons, 2004, 420 p.
3. *Flexible AC Transmission Systems (FACTS)*/Ed. Yong Hua Song and Allan T. Johns. London, EYE, 1999, 592 p.
4. *FACTS: Modelling and Simulation in Power Networks*/Tachi E., et al. – N.-Y.: John Wiley and Sons, 2004, 420 p.
5. Hingorani N.G., Gyugyi L. *Understanding FACTS: Concepts and Technology of Flexible AC Transmission Systems*. IEEE Press, 2000, 429 p.
6. Barinov V.A., Sovalov S.A. *Elektrichestvo – in Russ. (Electricity)*, 1986, No. 8, pp. 1–6.
7. Bruzgin B.I. *Modal'noye upravleniye rezhimami energosistem. Analiz funktsionirovaniya i upravleniya rezhimami slozhnykh elektroenergeticheskikh system: Sb. nauch/ trudov ENIN im. G.M. Krzhizhanovskogo* (Modal control of power system modes. Analysis of the functioning and management of modes of complex electric power systems: Sat. sci. works of ENIN named G.M. Krzhizhanovsky). Moscow, 1989, 180 p.
8. Zhdanov P.S. *Voprosy ustoychivosti elektricheskikh sistem* (Questions of the stability of electrical systems). Moscow, Energiya, 1979, 456 p.
9. Kundur P. *Power system stability and control*. NY, McGraw-Hill, 1994, 1176 p.
10. Anderson P., Faud A. *Upravleniye energosistemami i ustoychivost'* (Energy management and sustainability). Moscow, Energiya, 1980, 568 p.
11. Gutman S., Jury E.I. A General Theory for Matrix Root Clustering in Subregions of the Complex Plain. — IEEE Trans. AC, 1981, vol. AC-26, pp. 853–863.
12. Chilali M., Gahinet P. Design with Pole Placement Constraints: An LMI Approach. — IEEE Trans. AC, 1996, vol. 41, No. 3, pp. 358–367.
13. Chilali M., Gahinet P. and Apkarian P. Robust Pole Placement in LMI Regions. — IEEE Trans. AC, 1999, vol. 44, No. 12, pp. 2257–2270.
14. Kurdyukov A.P., Timin V.N. *Problemy upravleniya – in Russ. (Problems of control)*, 2009, iss. 1, pp. 8–17.
15. Misrikhanov M.Sh., Sitnikov V.F., Sharov Yu.V. *Elektrotehnika – in Russ. (Electrical Engineering)*, 2007, No. 10, pp. 22 – 29.
16. Balandin D.V., Kogan M.M. *Sintez zakonov upravleniya na osnove lineinykh matrichnykh neravenstv* (Synthesis of control laws based on linear matrix inequalities). Moscow, Fizmatlit, 2008, 280 p.
17. Sharov Yu.V. *Elektrichestvo – in Russ. (Electricity)*, 2017, No. 1, pp. 12–18.
18. Sharov Yu.V. *Izvestiya RAN. Energetika – in Russ. (News of Russian Academy of Sciences. Power Engineering)*, 2017, No. 2, pp. 13–29.
19. Gadzhiev M.G., Misrikhanov M.Sh., Sharov Yu.V. *Elektrichestvo – in Russ. (Electricity)*, 2017, No. 11, pp. 4–11.
20. Misrikhanov M.Sh., Sharov Yu.V. *Vestnik IGEU – in Russ. (Bulletin of Irkutsk State Power Engineering University)*, 2004, iss. 4, pp. 83–98.
21. Misrikhanov M.Sh., Sitnikov V.F., Sharov Yu.V. *Elektrotehnika – in Russ. (Electrical Engineering)*, 2008, No. 2, pp. 55–61.
22. Misrikhanov M.Sh., Sitnikov V.F., Sharov Yu.V. *Vestnik MEI – in Russ. (Bulletin of Moscow Power Engineering Institute)*, 2009, No. 3, pp. 35–41.

23. **Haddad W.M. and Bernstein D.S.** Controller Design with Regional Pole Placement. — IEEE Trans. AC, 1992, vol. 37, pp. 54–61.
24. **Scherer C.W., Gahinet P. and Chilali M.** Multiobjective Output-Feedback Control via LMI Optimization, IEEE Trans. AC, 1997, vol. 42, pp. 896–911.
25. **Kautsky J., Nichols N.K. and Van Dooren P.** Robust Pole Assignment in Linear State Feedback. — Int. J. Contr., 1985, vol. 41, pp. 1129–1155.
26. **Martin J.M.** State-Space Measures of Robustness of Pole Locations for Structured and Unstructured Perturbations. Syst. Contr. Lett., 1991, vol. 16, pp. 423–433.
27. **Chou J.H., Ho S.J. and Horng R.** Pole Assignment Robustness in a Specified Disc. — Syst. Contr. Lett., 1991, vol. 16, pp. 1041–1046.
28. **Arzelier D., Bernussou J. and Garcia G.** Pole Assignment of Linear Uncertain Systems in a Sector via a Lyapunov-Type Approach. — IEEE Trans. AC, 1993, vol. 38, pp. 1128–1131.
29. **Garcia G. and Bernussou J.** Pole Assignment for Uncertain Systems in a Specified Disk by State Feedback. — IEEE Trans. AC, 1995, vol. 40, pp. 184–190.
30. **Nesterov Y. and Nemirovskii A.** Interior Point Polynomial Algorithms in Convex Programming: Theory and Applications.— SIAM Studies Appl. Math., 2001, 404 p.
31. **Nemirovskii A. and Gahinet P.** The Projective Method for Solving Linear Matrix Inequalities. — Math. Programming. Series B, 1997, vol. 77, pp. 163–190.
32. **Gahinet P., Nemirovsky A., Laub A.J. and Chilali M.** The LMI Control Toolbox. Natick, MA: The Math Works, 1995, 50 p.
33. **Sturm J.F.** Using SeDuMi 1.02, a Matlab Toolbox for Optimization over Symmetric Cones. — Optimization Methods and Software, 1999, vol. 11–12, pp. 625–653.
34. **Peaculle D., Henrion D., Labit Y. and Taitz K.** User's Guide for SeDuMi Interface 1.04. LAAS – CNRS. — Toulouse (France), 2002, 36 p.
35. **Heffron W.G., Fillips R.A.** Effect of modern amplidyne voltage regulators on under excited operation of large turbine generators. — AIEE Trans., 1952, vol. PAS-71, pp. 692 – 697.
36. **Wang H, Du W.** Analysis and Damping Control of Power System Low-frequency Oscillations. — Springer Press, New York, 2016, 394 p.
37. **Zubov N.Ye., Mikrin Ye.A., Ryabchenko V.N.** *Matrichnye metody v teorii i praktike sistem avtomaticheskogo upravleniya letatel'nyimi apparatami* (Matrix methods in theory and practice of automatic control systems of aircraft). Moscow, Moscow State Technical University named N.E. Bauman, 2016, 666 p.

[08.06.2018]