

Ячейка решетчатой схемы замещения трехмерного электромагнитного поля в цилиндрической системе координат

БЛАНК А.В.

На основании законов и теорем электричества и магнетизма разрабатываются цилиндрические типовые звенья-ячейки для решетчатых схем замещения трехмерных вихревых синусоидальных электромагнитных полей в проводящих средах. Цилиндрические ячейки в сочетании с известными ячейками-параллелепипедами облегчают моделирование расчетных областей сложной конфигурации и расширяют область применения решетчатых схем замещения трехмерных полей. Синтез цилиндрических ячеек осуществляется на основе фундаментальных законов электромагнетизма и теории цепей и по существу является одним из разделов теоретической электротехники, который может быть включен в программы студенческих и других образовательных курсов. Результаты тестовых расчетов решетчатых схем замещения трехмерных полей на основе цилиндрических ячеек свидетельствуют о вполне приемлемой точности разработанного расчетного метода.

Одной из наиболее сложных задач теоретической электротехники является расчет электромагнитного поля электроустановок при заданной геометрии, известных физических свойствах среды и распределении источников поля.

Двумерные и трехмерные электромагнитные поля, как правило, рассчитываются численно с помощью специализированных компьютерных программ. Чаще всего в подобных программах используется метод конечных элементов. Вместе с тем, численные двумерные модели (особенно трехмерные) при постановке и решении задачи часто требуют множества предварительных расчетов, а главное — мощной компьютерной техники и значительного времени.

Как альтернатива методу конечных элементов известен подход, при котором решение задачи теории поля сводится к расчету разветвленной электрической цепи с активными и реактивными сопротивлениями. Так, в [1] исследуемый объем разбивается на элементарные проводники малого сечения, каждому из которых ставится в соответствие rL -цепочка, после чего весь объем представляется в виде совокупности параллельных ветвей с магнитосвязанными элементами. Также в последнее время в странах бывшего СССР и за рубежом разрабатывается направление, известное под английским наименованием partial equation equivalent circuits (аппроксимация дифференциальных уравнений в частных производных эквивалентными цепями) [2–4]. Предлагаемая вниманию читателей работа выполнена в рамках именно этого направления.

Для расчета двумерных вихревых и потенциальных полей могут быть использованы решетчатые схемы замещения [5–9]. Их отличие от схем, описанных в [2–4], состоит в том, что параметры решетчатых схем получены на основе фундаментальных законов электромагнетизма — закона полного тока, закона электромагнитной индукции и соотношения между магнитным потоком и циркуляцией векторного магнитного потенциала.

Решетчатые схемы дают наглядное представление об исследуемом поле, синтезируются по достаточно простым алгоритмам и могут использоваться в научных целях и инженерной практике специалистами с электротехническим образованием. Решетчатые схемы целесообразно рассчитывать с помощью программ для схемотехнического моделирования электрических цепей, например Micro-Cap или Multisim.

Элементом решетчатой схемы замещения является ячейка-многополюсник, которая может быть прямоугольной [5, 6], криволинейной [7, 8] или треугольной [9]. На основе трех прямоугольных ячеек формируется объемная ячейка-параллелепипед трехмерного вихревого электромагнитного поля в декартовой системе координат [10]. В такой ячейке каждой пространственной составляющей векторного потенциала соответствует участок электрической цепи, аналогичный схеме замещения ячейки двумерного вихревого поля. Электромагнитные связи между тремя двумерными ячейками осуществляются с помощью источников ЭДС, управляемых напряжением. Из ячеек-параллелепипедов формируется схема замещения трехмерного

вихревого электромагнитного поля, фактически имеющая решетчатую структуру.

Настоящая статья посвящена созданию ячейки трехмерного электромагнитного поля в цилиндрической системе координат и по существу является продолжением статьи [10]. Цилиндрическая ячейка расширяет область применения решетчатых схем замещения и может быть использована не только в чисто цилиндрических моделях, но и в сочетании с ячейкой-параллелепипедом.

Далее при описании цилиндрической ячейки будем пользоваться очевидной аналогией между цилиндрической ячейкой и уже известной ячейкой-параллелепипедом из [10]. Исходными положениями в задаче синтеза цилиндрической ячейки выступают законы Кирхгофа для электрических цепей с сосредоточенными параметрами и основные законы теории электромагнитного поля.

Отметим, что все дальнейшие рассуждения относятся к низкочастотным полям ($f < 0,1$ МГц) в средах с линейными свойствами.

Цилиндрическая A - H -ячейка трехмерного синусоидального электромагнитного поля. Цилиндрическая ячейка трехмерного электромагнитного поля представлена на рис. 1. На гранях ячейки обозначены условно положительные касательные составляющие векторного потенциала. В линейных средах при низких частотах трехмерное синусоидальное поле в объеме ячейки удовлетворяет уравнению Гельмгольца:

$$\nabla^2 \dot{A} = j\omega\mu\gamma\dot{A}. \quad (1)$$

В цилиндрической системе координат уравнение (1) преобразуется в систему трех скалярных

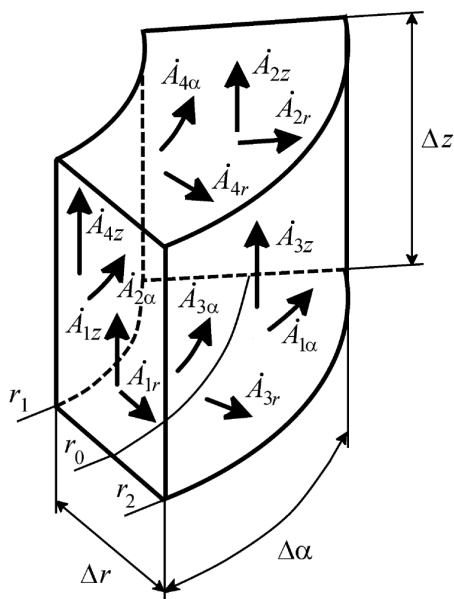


Рис. 1. Ячейка трехмерного электромагнитного поля в цилиндрической системе координат

дифференциальных уравнений независимых переменных r , α , z :

$$\begin{aligned} \nabla^2 \dot{A}_r &= j\omega\mu\gamma\dot{A}_r; \\ \nabla^2 \dot{A}_\alpha &= j\omega\mu\gamma\dot{A}_\alpha; \\ \nabla^2 \dot{A}_z &= j\omega\mu\gamma\dot{A}_z. \end{aligned} \quad (2)$$

Для каждой составляющей векторного потенциала в системе (2) синтезируем двумерную A - H -схему замещения, подобную той, что приведена в [10, рис. 1]. В такой схеме замещения аналогом напряжений являются составляющие векторного потенциала, умноженные на значение толщины ячейки двумерного поля, а аналогом токов – касательные составляющие вектора магнитной напряженности, умноженные на значения длины или ширины ячейки.

Внутри трехмерной цилиндрической ячейки разместим три двумерные A - H -схемы, соответствующие составляющим векторного потенциала (рис. 2), причем расположим их таким образом, чтобы на каждую грань ячейки выходило по два разреза схем, поскольку на каждой грани имеются две касательные составляющие векторного потенциала. Будем именовать эти двумерные схемы следующим образом: схема \dot{A}_r , схема \dot{A}_α , схема \dot{A}_z .

Параметры A - H -схем замещения двумерных вихревых электромагнитных полей в декартовых и цилиндрических координатах известны и наиболее полно описаны в [11]. Активные и реактивные сопротивления в схемах на рис. 2 получим, используя аналоги этих сопротивлений из [11].

Для схемы \dot{A}_r такими аналогами служат параметры ячейки плоскопараллельного поля в декартовой системе координат:

$$\begin{aligned} Z_{1r} &= Z_{2r} = \mu\Delta r \frac{r_0\Delta\alpha}{2\Delta z}; \\ Z_{3r} &= Z_{4r} = \mu\Delta r \frac{\Delta z}{2r_0\Delta\alpha}; \\ C_{0r} &= \gamma \frac{r_0\Delta\alpha\Delta z}{2\Delta r}. \end{aligned} \quad (3)$$

Для схемы \dot{A}_α аналогами служат параметры ячейки плоскомеридианного поля в цилиндрической системе координат:

$$\begin{aligned} Z_{1\alpha} &= Z_{2\alpha} = \mu r_0\Delta\alpha \frac{\Delta r}{2\Delta z}; \\ Z_{3\alpha} &= Z_{4\alpha} = \mu r_0\Delta\alpha \frac{\Delta z}{2\Delta r}; \\ C_{0\alpha} &= \gamma \frac{\Delta r\Delta z}{r_0\Delta\alpha}. \end{aligned} \quad (4)$$

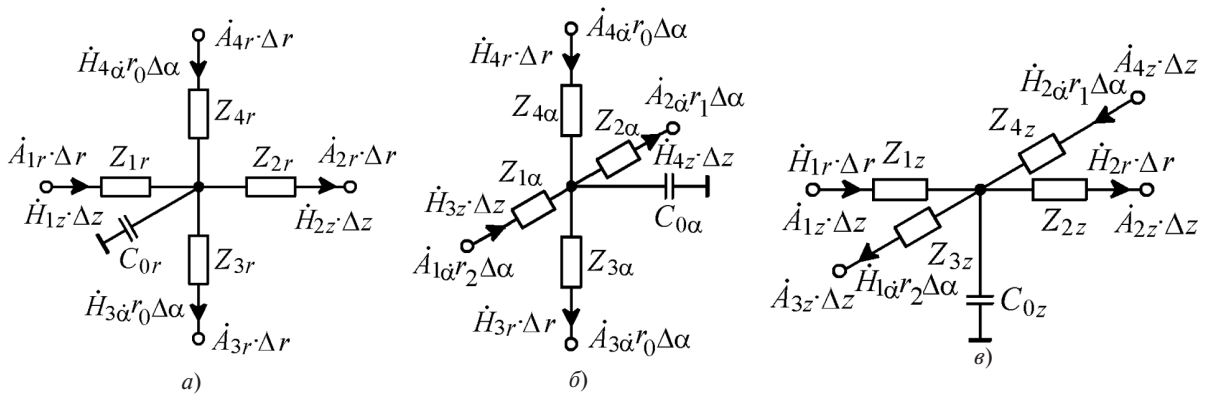


Рис. 2. Двумерные A - H -схемы, соответствующие трем составляющим векторного потенциала: a – схема \dot{A}_r ; b – схема \dot{A}_α ; v – схема \dot{A}_z

Для схемы \dot{A}_z аналогами служат параметры ячейки плоскопараллельного поля в цилиндрической системе координат:

$$\begin{aligned} Z_{1z} &= Z_{2z} = \mu \Delta z \frac{r_0 \Delta \alpha}{2 \Delta r}; \\ Z_{3z} &= \mu \Delta z \frac{\Delta r}{2 r_2 \Delta \alpha}; \\ Z_{4z} &= \mu \Delta z \frac{\Delta r}{2 r_1 \Delta \alpha}; \\ C_{0z} &= \gamma \frac{r_0 \Delta \alpha \Delta r}{\Delta z}. \end{aligned} \quad (5)$$

Составляющие магнитного потока внутри ячейки (рис. 3) связаны с векторным потенциалом выражениями:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\Phi}_r &= (\dot{A}_{3\alpha} - \dot{A}_{4\alpha}) r_0 \Delta \alpha + (\dot{A}_{2z} - \dot{A}_{1z}) \Delta z; \\ \Delta \dot{\Phi}_\alpha &= (\dot{A}_{4r} - \dot{A}_{3r}) \Delta r + (\dot{A}_{4z} - \dot{A}_{3z}) \Delta z; \\ \Delta \dot{\Phi}_z &= (\dot{A}_{1\alpha} r_2 - \dot{A}_{2\alpha} r_1) \Delta \alpha + (\dot{A}_{1r} - \dot{A}_{2r}) \Delta r. \end{aligned} \quad (6)$$

Те же составляющие магнитного потока определяются по средним значениям магнитных напряженностей на гранях ячейки. Для схемы \dot{A}_r :

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\Phi}_\alpha &= \mu \frac{\dot{H}_{3\alpha} + \dot{H}_{4\alpha}}{2} \Delta r \Delta z = \dot{H}_{3\alpha} r_0 \Delta \alpha Z_{3r} + \\ &+ \dot{H}_{4\alpha} r_0 \Delta \alpha Z_{4r}; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\Phi}_z &= \mu \frac{\dot{H}_{1z} + \dot{H}_{2z}}{2} r_0 \Delta \alpha \Delta r = \dot{H}_{1z} \Delta z Z_{1r} + \\ &+ \dot{H}_{2z} \Delta z Z_{2r}. \end{aligned}$$

Для схемы \dot{A}_α :

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\Phi}_r &= \mu \frac{\dot{H}_{3r} + \dot{H}_{4r}}{2} r_0 \Delta \alpha \Delta z = \dot{H}_{3r} \Delta r Z_{3\alpha} + \\ &+ \dot{H}_{4r} \Delta r Z_{4\alpha}; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\Phi}_z &= \mu \frac{\dot{H}_{3z} + \dot{H}_{4z}}{2} r_0 \Delta \alpha \Delta r = \dot{H}_{3z} \Delta z Z_{1\alpha} + \\ &+ \dot{H}_{4z} \Delta z Z_{2\alpha}. \end{aligned}$$

Для схемы \dot{A}_z :

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\Phi}_r &= \mu \frac{\dot{H}_{1r} + \dot{H}_{2r}}{2} r_0 \Delta \alpha \Delta z = \dot{H}_{1r} \Delta r Z_{1z} + \\ &+ \dot{H}_{2r} \Delta r Z_{2z}; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\Phi}_\alpha &= \mu \frac{\dot{H}_{1\alpha} + \dot{H}_{2\alpha}}{2} \Delta r \Delta z = \dot{H}_{1\alpha} r_2 \Delta \alpha Z_{3z} + \\ &+ \dot{H}_{2\alpha} r_1 \Delta \alpha Z_{4z}. \end{aligned}$$

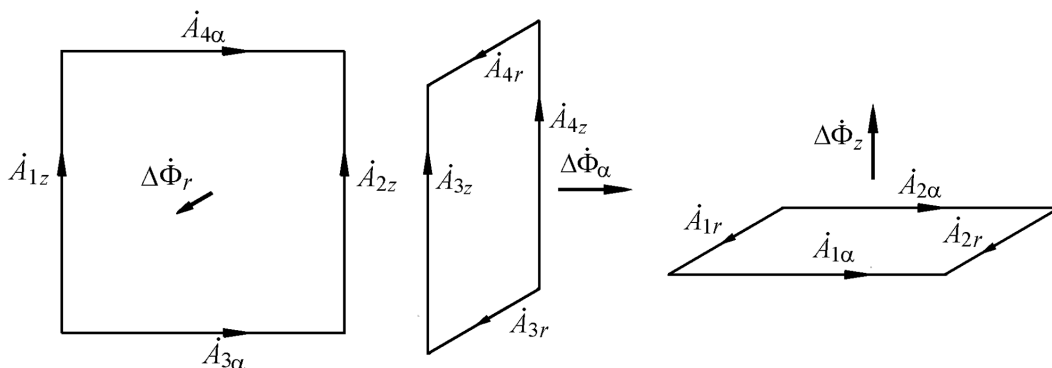


Рис. 3. Составляющие магнитного потока внутри ячейки

Сопоставим выражения (6) с выражениями (7)–(9). Например, для схемы A_r получим:

$$\begin{aligned} &(\dot{A}_{4r}\Delta r - \dot{A}_{3r}\Delta r) + (\dot{A}_{4z}\Delta z - \dot{A}_{3z}\Delta z) = \\ &= \dot{H}_{3\alpha}r_0\Delta\alpha Z_{3r} + \dot{H}_{4\alpha}r_0\Delta\alpha Z_{4r}; \quad (10) \\ &(\dot{A}_{1r}\Delta r - \dot{A}_{2r}\Delta r) + (\dot{A}_{1\alpha}r_2\Delta\alpha - \dot{A}_{2\alpha}r_1\Delta\alpha) = \\ &= \dot{H}_{1z}\Delta z Z_{1r} + \dot{H}_{2z}\Delta z Z_{2r}. \end{aligned}$$

Если в схему A_r на рис. 2,а, ввести источники ЭДС, управляемые напряжением

$$\begin{aligned} E_{1r} &= \frac{1}{2}(\dot{A}_{1\alpha}r_2\Delta\alpha - \dot{A}_{2\alpha}r_1\Delta\alpha); \quad (11) \\ E_{4r} &= \frac{1}{2}(\dot{A}_{4z}\Delta z - \dot{A}_{3z}\Delta z), \end{aligned}$$

то уравнения (10) будут аналогичны уравнениям по второму закону Кирхгофа для схемы A_r . Заметим,

что в схему A_r надо включить два источника E_{1r} и два источника E_{4r} . Тем самым будет обеспечена симметричность схемы A_r .

Введем такие же управляемые источники ЭДС в схемы A_α и A_z :

$$E_{1\alpha} = \frac{1}{2}(\dot{A}_{1r}\Delta r - \dot{A}_{2r}\Delta r); \quad (12)$$

$$E_{4\alpha} = \frac{1}{2}(\dot{A}_{1z}\Delta z - \dot{A}_{2z}\Delta z);$$

$$E_{1z} = \frac{1}{2}(\dot{A}_{4\alpha}r_0\Delta\alpha - \dot{A}_{3\alpha}r_0\Delta\alpha); \quad (13)$$

$$E_{4z} = \frac{1}{2}(\dot{A}_{4r}\Delta r - \dot{A}_{3r}\Delta r)$$

и получим A - H -схему замещения цилиндрической ячейки трехмерного синусоидального электромагнитного поля в окончательном виде (рис. 4).

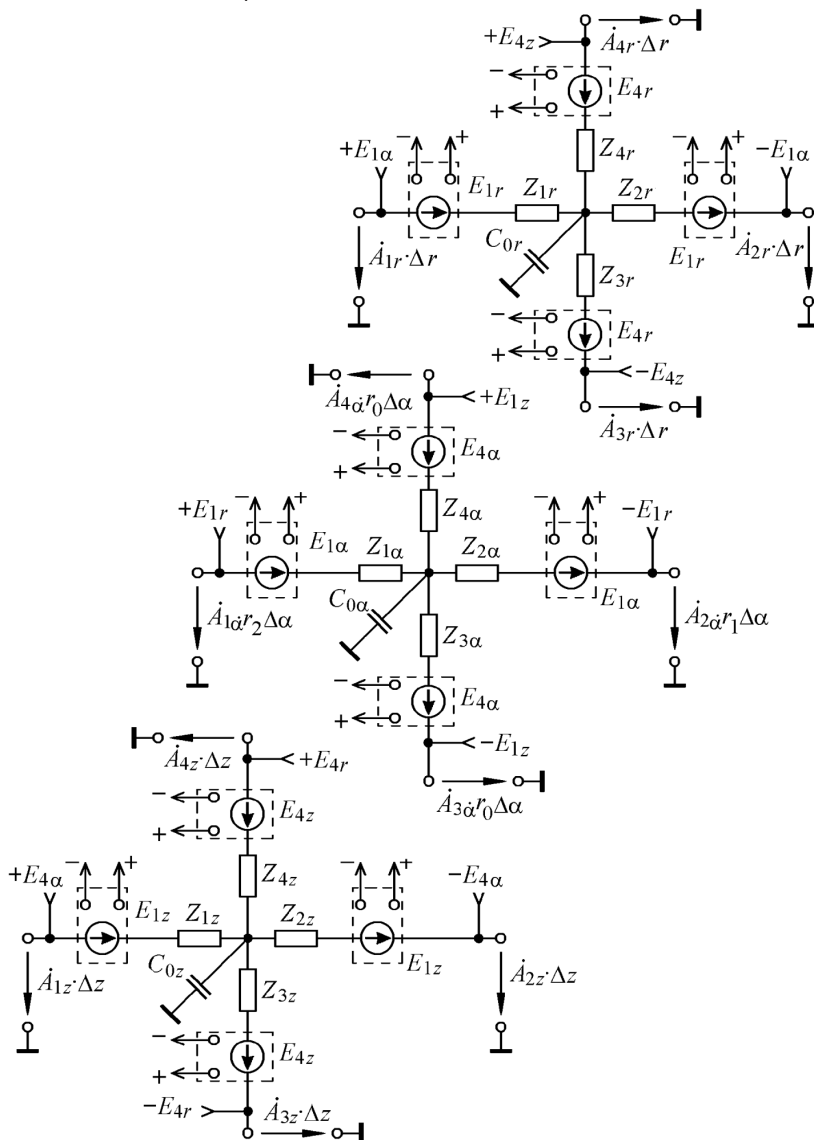


Рис. 4. A - H -схема замещения ячейки трехмерного электромагнитного поля

Аналогом напряжений в схеме замещения служат составляющие векторного потенциала, умноженные на длину ячейки вдоль составляющей потенциала. Аналоги токов — это касательные составляющие вектора магнитной напряженности, умноженные на длину ячейки вдоль составляющей магнитной напряженности.

Электромагнитные связи между схемами \dot{A}_r , \dot{A}_α и \dot{A}_z осуществляются управляемыми источниками ЭДС. За счет этих электромагнитных связей в каждой ячейке трехмерного электромагнитного поля обеспечивается условие $\text{div}\vec{A}=0$.

Тестовые расчеты электромагнитного поля с использованием решетчатой схемы. Для проверки разработанного расчетного метода были проведены тестовые расчеты трехмерного синусоидального электромагнитного поля — численно (в программе COMSOL Multiphysics 4.3) и с помощью решетчатой $A-H$ -схемы замещения (с использованием пакета Micro-Cap 7). Ниже представлены результаты решения тестовой задачи.

Стальной стержень конечной длины помещен внутрь медного индуктора (рис. 5). Поперечное сечение стержня представляет собой овал, который можно рассматривать как состоящий из прямоугольника 20×40 мм и двух полуокругов диаметром 40 мм. Длина стержня 100 мм. Поперечное сечение витка индуктора — квадрат со стороной 10 мм. Число витков индуктора 9. Расстояние между витками 1,5 мм. Зазор между боковой поверхностью стержня и индуктором 5 мм.

Относительная магнитная проницаемость стали 200. Проводимость стали $2,27 \cdot 10^6 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$. Проводимость меди $5,8 \cdot 10^7 \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$. Ток индуктора 900 А, частота 50 Гц.

В силу симметрии расчетная область представляет собой 1/8 часть всего объема системы; $A-H$ -схема замещения электромагнитного поля состоит из 321 ячейки: три слоя по 107 ячеек в каждом, два слоя цилиндрических ячеек и один слой ячеек-параллелепипедов, описание которых дано в [10].

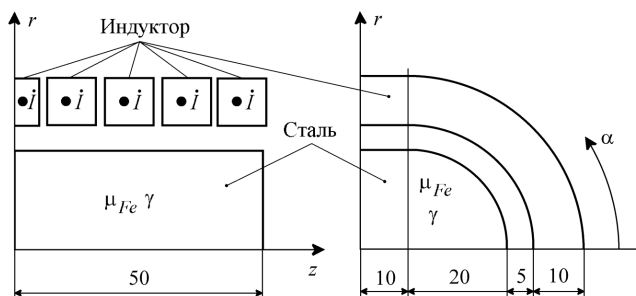


Рис. 5. Геометрия расчетной области в тестовой задаче

Расположение ячеек в каждом из слоев $A-H$ -схемы показано на рис. 6. Объем стержня (выделен жирной линией) в каждом слое разбит на 42 ячейки. У поверхности стержня толщина ячеек составляет 1 и 2 мм. Индуктор (также выделен жирной линией) в каждом слое разбит на 7 ячеек. Воздушные зазоры между витками индуктора в $A-H$ -схеме не предусмотрены. Для их учета расчетный ток индуктора уменьшен на 12%. Таким образом, весь объем стержня в расчетной области разбит на 126 ячеек, а объем индуктора — на 21 ячейку. Все остальные ячейки $A-H$ -схемы соответствуют воздушному пространству.

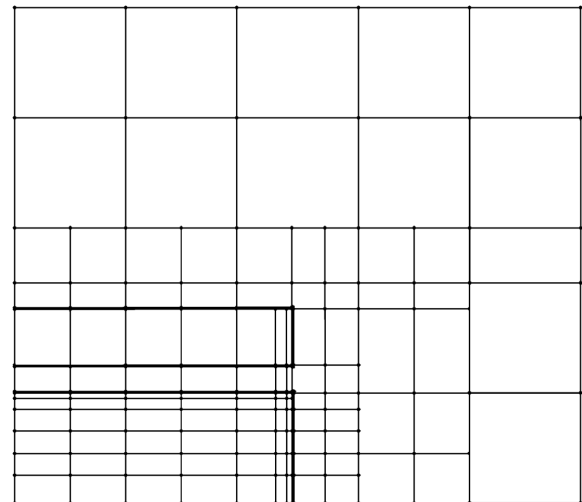


Рис. 6. Расположение ячеек в каждом слое $A-H$ -схемы

Выводы ячеек, примыкающие к левой вертикальной границе расчетной области, разомкнуты, поскольку эта граница является плоскостью симметрии, на которой отсутствуют касательные составляющие вектора индукции. Нижняя граница расчетной области соответствует оси стержня, здесь выводы ячеек также разомкнуты. Все остальные выводы ячеек, примыкающие к внешним границам расчетной области, замкнуты на общую шину, имеющую нулевой потенциал.

Источником электромагнитного поля служит ток индуктора, который имеет лишь одну α -составляющую. Следовательно, в каждой ячейке, моделирующей какой-либо участок индуктора, вместо конденсатора $C_{0\alpha}$ (см. рис. 4) следует включить синусоидальный источник тока. Ток этого источника должен быть равен полному току, проходящему через поперечное сечение ячейки. Кроме того, конденсаторы C_{0r} и C_{0z} необходимо удалить.

Совпадение кривых электрической напряженности на боковой поверхности стержня при нулевом значении текущей координаты α , полученных численным расчетом и расчетом по $A-H$ -схеме замещения, свидетельствует о приемлемой точности предлагаемого метода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шакиров М.А., Кияткин Р.П. Динамика электромагнитных сил при переходном скин-эффекте в прямолинейных шинах. — *Электричество*, 1998, № 4, с. 62–69.
2. Волобоев В.П., Клименко В.П. Метод конечных элементов и теория графов. — *Математические машины и системы*, 2013, № 4, с. 114–125.
3. Freschi F., Repetto M. A General Framework for Mixed Structured. Unstructured PEEC Modeling. — *ACES Journal*, Sep. 2008, vol. 23, pp. 200–206.
4. Alotto P., Desideri F., Freschi F., Maschio A., Repetto M. Dual-PEEC modeling of a two-port TEM cell for VHF applications. — *IEEE Trans. Magn.*, May 2011, vol. 47, pp. 1486–1489.
5. Инкин А.И., Алиферов А.И., Бланк А.В. Типовые базовые ячейки-многополюсники решетчатых схем замещения плоскостепенных электромагнитных полей. — *Электричество*, 2014, № 1, с. 56–60.
6. Инкин А.И., Алиферов А.И., Бланк А.В. Аналитический расчет индуцированного электромагнитного поля в слое прямоугольного поперечного сечения на базе решетчатых схем. — *Электротехника*, 2014, № 12, с. 59–62.
7. Инкин А.И., Алиферов А.И., Бланк А.В. Типовые ячейки-многополюсники решетчатых схем замещения плоскомеридианных электромагнитных и температурных полей в задачах электротехники. — *Электричество*, 2014, № 11, с. 53–57.
8. Инкин А.И., Алиферов А.И., Бланк А.В. Типовые звенья и решетчатые схемы замещения индукционных магнитоэлек-

трических систем с движущимся проводящим элементом. — *Электричество*, 2015, № 12, с. 38–44.

9. Бланк А.В. Треугольные ячейки решетчатых схем замещения плоскостепенных электромагнитных полей. — *Электричество*, 2017, № 11, с. 49–53.

10. Инкин А.И., Бланк А.В. Объемная ячейка-многополюсник и пространственная схема замещения трехмерного электромагнитного поля. — *Электричество*, 2016, № 10, с. 53–57.

11. Инкин А.И., Бланк А.В. Решетчатые схемы замещения двумерных и трехмерных электромагнитных полей в задачах электротехники: монография. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2017, 180 с.

[05.02.2018]

А в т о р: Бланк Алексей Валерьевич окончил электромеханический факультет Новосибирского государственного технического университета в 1999 г. В 2005 г. защитил кандидатскую диссертацию «Разработка метода расчета магнитного поля в дискретно-однородных цилиндрических структурах явнопольных электрических машин». Доцент кафедры теоретических основ электротехники Новосибирского государственного технического университета.

Elektrichestvo, 2018, No. 10, pp. 61–66

DOI:10.24160/0013-5380-2018-10-61-66

The Cell of a 3D Electromagnetic Field Lattice Equivalent Circuit in the Cylindrical System of Coordinates

BLANK Aleksei V. (Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia) — Associate Professor, Cand. Sci. (Eng.)

Standard cylindrical sections-cells for the lattice equivalent circuits of 3D vortex sine-wave electromagnetic fields in conducting media are developed proceeding from the laws and theorems of electricity and magnetism. The use of cylindrical cells in combination with the known parallelepiped-shaped cells facilitates the modeling of intricately configured calculation regions and makes it possible to broaden the application field of the lattice equivalent circuits of 3D fields. Cylindrical cells are synthesized on the basis of the fundamental laws of electromagnetism and circuit theory and are in fact a section of theoretical electrical engineering, which can be included in the programs of student and other education courses. The results from test calculations of the lattice equivalent circuits of 3D fields constructed using cylindrical cells testify that the developed calculation method has quite acceptable accuracy.

Key words: 3D vortex electromagnetic field, calculation, theory of electric circuits, cascade equivalent circuits, lattice equivalent circuits

REFERENCES

1. Shakirov M.A., Kiyatkin R.P. *Elektrichestvo — in Russ. (Electricity)*, 1998, No. 4, pp. 62–69.
2. Voloboyev V.P., Rlimenko V.P. *Matematicheskiye mashiny i sistemy — in Russ. (Mathematical machines and systems)*, 2013, No. 4, pp. 114–125.
3. Freschi F., Repetto M. A General Framework for Mixed Structured. Unstructured PEEC Modeling. — *ACES Journal*, Sep. 2008, vol. 23, pp. 200–206.
4. Alotto P., Desideri F., Freschi F., Maschio A., Repetto M. Dual-PEEC modeling of a two-port TEM cell for VHF applications. — *IEEE Trans. Magn.*, May 2011, vol. 47, pp. 1486–1489.
5. Inkin A.I., Aliferov A.I., Blank A.V. *Elektrichestvo — in Russ. (Electricity)*, 2014, No. 1, pp. 56–60.
6. Inkin A.I., Aliferov A.I., Blank A.V. *Elektrotehnika — in Russ. (Power Engineering)*, 2014, No. 12, pp. 59–62.
7. Inkin A.I., Aliferov A.I., Blank A.V. *Elektrichestvo — in Russ. (Electricity)*, 2014, No. 11, pp. 53–57.
8. Inkin A.I., Aliferov A.I., Blank A.V. *Elektrichestvo — in Russ. (Electricity)*, 2015, No. 12, pp. 38–44.
9. Blank A.V. *Elektrichestvo — in Russ. (Electricity)*, 2017, No. 11, pp. 49–53.
10. Inkin A.I., Blank A.V. *Elektrichestvo — in Russ. (Electricity)*, 2016, No. 10, pp. 53–57.
11. Inkin A.I., Blank A.V. *Reshetchatye skhemy zameshcheniya dvumernykh i trekhmernykh elektromagnitnykh poлей v zadachakh elektrotehniki* (Sieve circuit for the replacement of two-dimensional and three-dimensional electromagnetic fields in electrical engineering problems). Novosibirsk, Publ. of the Novosibirsk State Technical University, 2017, 180 p.

[05.02.2018]