*Электричество, 2019, № 3, с. 4—14* **DOI:10.24160/0013-5380-2019-3-4-14**

# Исследование позиционной модели энергетической системы

**ДАВЫДОВ В.В., АЮЕВ Б.И., ЕРОХИН П.М., ПРУДОВ М.А.**

*Исследованы особенности позиционной модели, выполнен анализ собственных значений и векторов матрицы уравнений малых колебаний, получен критерий предельных по статической апериодической устойчивости режимов, обобщающий классический критерий Вагнера—Эванса на сложные многомашинные системы. Установлено, что позиционная модель, т.е. модель, в которой мощности или моменты генераторов зависят только от относительных углов роторов машин, в неявном виде использует идеологию распределенного балансирующего узла, и ее предельные по статической апериодической устойчивости режимы в точности соответствуют предельным режимам модели потокораспределения с распределенным балансирующим узлом, в котором коэффициенты участия узлов в балансировке активной мощности назначены прямо пропорционально постоянным инерции синхронных машин. Сравнительным анализом параметров предельных режимов позиционной модели и модели с шиной неограниченной мощности найдено, что позиционная модель дает консервативную (заниженную) оценку коэффициента запаса статической устойчивости электрической системы. Показано, что для оценки коэффициентов запаса статической устойчивости наиболее адекватной является модель потокораспределения с шиной неограниченной мощности, в предельных режимах которой относительные приросты потерь мощности для всех узлов не превышают единицы.*

К л ю ч е в ы е с л о в а: *энергетическая система, статическая апериодическая неустойчивость, позиционная модель, предельные режимы, потери мощности, относительные приросты*

Развитие теории и практики расчетов и анализа статической устойчивости привели к тому, что обычно для определения предельных по статической апериодической устойчивости режимов (ПР) ЭС используются модели потокораспределения с шиной неограниченной мощности и принимается, что при определенных условиях свободный член характеристического уравнения малых колебаний изменяет свой знак одновременно с якобианом потокораспределения [1—3]. Однако особенностью таких моделей является зависимость ПР от местоположения балансирующего узла (БУ) [4]. Хотя для выбора БУ имеются определенные рекомендации, например, в качестве такого узла выбирается наиболее мощная генерирующая система либо электростанция, такие рекомендации не могут во всех случаях гарантировать адекватный выбор БУ для определения реальных коэффициентов запаса статической устойчивости. Поэтому вызывает интерес определение ПР без явного назначения и использования БУ. В этом случае исследуемая модель будет в некоторой степени соответствовать так называемой позиционной модели ЭС.

Следует отметить, что позиционная модель нашла довольно широкое применение при решении задач статической устойчивости ЭС [5—6]. За рубежом [7] позиционная модель именуется классической. Однако в 70-х годах прошлого столетия были высказаны сомнения о правомерности использования позиционной модели для расчетов статической устойчивости ЭС [8], причем основными аргументами были следующие. Во-первых, в отличие от критериев классической механики критерий ПР позиционной модели, известный как критерий Вагнера—Эванса, содержит постоянные инерции машин. Во-вторых, «центр» инерции позиционной модели не находится в состоянии покоя или равномерного движения, как в механической системе, а подвержен незатухающим колебаниям. В-третьих, если линеаризованная позиционная модель испытывает внешние возмущения моментов или мощностей, удовлетворяющих условию «равновесия», т.е. их алгебраическая сумма равна нулю, то «... позиционная система движется с постоянным ускорением за счет одних внутренних упругих деформаций без подвода энергии извне (самодвижение, свойственное perpetuum mobile)» [9]. Отсюда сделан вывод, что позиционная модель противоречит закону сохранения энергии и физике упругих колебаний. Хотя рядом авторов ([9—13] и др.) были представлены довольно убедительные доводы несостоятельности критики позиционной модели, инициатор критики в последующей работе [14] вновь поставил вопрос с более серьезной аргументацией о принципиальной неудовлетворенности позиционных моделей ЭС.

В статье рассматривается позиционная модель электрической системы и адекватность ее использования для определения ПР и оценки коэффициентов запаса статической устойчивости ЭС.

**Исследование «классической» позиционной модели.** В [8 и 14] для критики позиционной системы используются небольшие, в основном двухузловые, модели ЭС. Однако для исследования адекватности позиционной модели следует рассматривать общий многомерный случай. Напомним, что построение «классических» позиционных моделей связано с принятием упрощающих предположений, важнейшими из которых являются [15]:

1) нагрузки при составлении схемы замещения ЭС представляются эквивалентными синхронными двигателями или(и) замещаются постоянными полными сопротивлениями;

2) все синхронные машины — генераторы и двигатели — вводятся в схему замещения постоянными переходными ЭДС за расчетными индуктивными сопротивлениями, значения которых зависят от типа АРВ;

3) все остальные элементы системы представляются пассивными схемами замещения, параметры которых не зависят от режима ЭС;

4) моменты первичных двигателей (приводимых механизмов) считаются постоянными;

5) демпфирование электромеханических колебаний генераторных (двигательных) агрегатов не учитываются.

При сделанных допущениях уравнения движения позиционной модели ЭС представляют собой совокупность движения роторов синхронных машин, входящих в ЭС, причем правые части уравнений зависят лишь от угловых сдвигов роторов (т.е. от положения, «позиции» роторов). Если в полученной таким образом расчетной модели сэквивалентировать пассивные элементы, то систему нелинейных дифференциальных уравнений движения в отн. ед. можно представить в виде:

$$T_k = \frac{d^2\delta_k}{dt^2} = P_{\text{т}k} - P_k = \Delta P_k, \quad k = 1,...,n, \tag{1}$$

где $T_k$ — постоянная инерции роторов турбины (приводного механизма) и генератора (двигателя) в узле $k$; $P_{\text{т}k}$ — мощность вращающегося момента турбины или приводного механизма; $P_k$ — электромагнитная мощность тормозного момента, определяемая нагрузкой генератора или получаемая из сети двигателем привода; $n$ — число машин.

Рассмотрим особенности позиционной модели ЭС (1). Суммирование (1) по всем $k$ дает

$$T_\Sigma \frac{d^2\delta^c}{dt^2} = \Delta P_\Sigma,$$

где $\Delta P_\Sigma = \sum\limits_k (P_{\text{т}k} - P_k)$; $T_\Sigma = \sum\limits_k T_k$; $\delta^c$ — координата центра инерции системы:

$$\delta^c = \sum_k \delta_k T_k \,/\, T_\Sigma. \tag{2}$$

Если записать изменение углов в виде $\delta_k = \Delta\delta_k + \delta^c$, то уравнение (1) можно представить как

$$T_k = \frac{d^2\delta_k}{dt^2} = T_k \frac{d^2(\Delta\delta_k + \delta^c)}{dt^2} =$$

$$= T_k \frac{d^2\Delta\delta_k}{dt^2} + T_k \frac{\Delta P_\Sigma}{T_\Sigma} = \Delta P_k,$$

или

$$T_k \frac{d^2\Delta\delta_k}{dt^2} = \Delta P_k - \frac{T_k}{T_\Sigma}\Delta P_\Sigma. \tag{3}$$

В установившемся режиме ЭС левые, также как и правые, части уравнений (3) должны быть равны нулю, а это обеспечивается только тогда, когда общий небаланс мощности в ЭС $\Delta P_\Sigma$ распределяется между машинами пропорционально их постоянным инерций [7]:

$$\Delta P_k = \frac{T_k}{T_\Sigma}\Delta P_\Sigma, \quad k = 1,n. \tag{4}$$

Другие особенности позиционной модели проявляются при анализе статической устойчивости исследуемой системы.

Систему дифференциальных уравнений движения позиционной модели (1) можно представить в матричном виде:

$$[T]\frac{d^2\delta}{dt^2} = \Delta P(\delta), \tag{5}$$

где $[T]$ — диагональная матрица постоянных инерций; $\delta$ — вектор углов вращения роторов машин; $\Delta P(\delta)$ — вектор небалансов мощности на их валу.

В теории электрических систем анализ устойчивости основан на теории устойчивости движения, разработанной А.М. Ляпуновым, которая, в свою очередь, базируется на следующих положениях [16]:

1) возмущения налагаются только на начальные условия, иначе говоря, возмущенное движение происходит при тех же силах (источниках энергии), что и невозмущенное движение;

2) устойчивость рассматривается на бесконечно большом промежутке времени;

3) возмущения предполагаются малыми.

Поэтому исследуемые уравнения малых колебаний можно представить в виде

$$[T]\frac{d^2\delta}{dt^2}=[A]\Delta\delta, \tag{6}$$

где

$$[A]=\left[\frac{\partial\Delta P}{\partial\delta}\right] \tag{7}$$

является матрицей Якоби модели потокораспределения без БУ.

Выражение (6) представляет собой систему из n линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Для анализа решения этой системы введем дополнительные переменные $\Delta\omega_k = d\Delta\delta_k / dt$ и представим систему (6) в форме задачи Коши:

$$\begin{bmatrix} d\Delta\delta(t)/dt \\ d\Delta\omega(t)/dt \end{bmatrix}=[H]\begin{bmatrix}\Delta\delta(t)\\ \Delta\omega(t)\end{bmatrix};\ \Delta\delta(0)=\Delta\delta^{(0)};$$

$$\Delta\omega(0)=\Delta\omega^{(0)}, \tag{8}$$

где

$$[H]=\begin{bmatrix}0 & E\\ B & 0\end{bmatrix}, \tag{9}$$

а $[E]$ и $[0]$ – единичная и нулевые подматрицы соответствующих размерностей и

$$[B]=[T]^{-1}[A]. \tag{10}$$

Чтобы проанализировать свободное движение системы, рассмотрим собственные значения и векторы матрицы $[H]$. Собственные значения можно определить из характеристического уравнения, получаемого приравниванием определителя матрицы нулю: $\det[H-\lambda E]=0$, где $\lambda$ – собственное значение. Используя свойства определителей, можно получить:

$$\det[H-\lambda E]=\det\begin{bmatrix}-\lambda E & E\\ B & -\lambda E\end{bmatrix}=(-1)^n\det\begin{bmatrix}E & -\lambda E\\ -\lambda E & B\end{bmatrix}=$$
$$=(-1)^n\det\begin{bmatrix}E & 0\\ -\lambda E & E\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E & -\lambda E\\ 0 & -\lambda^2 E\end{bmatrix}=$$
$$=(-1)^n\det(B-\lambda^2 E)=0, \tag{11}$$

откуда следует, что собственные значения матрицы малых колебаний равны

$$\lambda_{2k-1}=\sqrt{\gamma_k};\ \lambda_{2k}=-\sqrt{\gamma_k}, \tag{12}$$

где $\gamma_k=\alpha_k+j\beta_k$ являются собственными значениями матрицы (10).

В свою очередь, левые $LH^{<\lambda_k>}$ и правые $RH^{<\lambda_k>}$ собственные векторы матрицы (9) равны:

$$LH^{<\lambda_{2k-1}>}=\left[0{,}5L^{<\gamma_k>^{\mathrm{T}}}, \frac{0{,}5}{\sqrt{\gamma_k}}L^{<\gamma_k>^{\mathrm{T}}}\right]^{\mathrm{T}};$$

$$LH^{<\lambda_{2k}>}=\left[0{,}5L^{<\gamma_k>^{\mathrm{T}}}, -\frac{0{,}5}{\sqrt{\gamma_k}}L^{<\gamma_k>^{\mathrm{T}}}\right]^{\mathrm{T}};$$

$$RH^{<\lambda_{2k-1}>}=\left[R^{<\gamma_k>^{\mathrm{T}}}, \sqrt{\gamma_k}R^{<\gamma_k>^{\mathrm{T}}}\right]^{\mathrm{T}};$$

$$RH^{<\lambda_{2k}>}=\left[R^{<\gamma_k>^{\mathrm{T}}}, -\sqrt{\gamma_k}R^{<\gamma_k>^{\mathrm{T}}}\right]^{\mathrm{T}}, \tag{13}$$

где $L^{<\gamma_k>}$ и $R^{<\gamma_k>}$ – левый и правый собственные векторы матрицы (10), соответствующие собственному значению $\gamma_k$.

Согласно (12) каждому собственному значению матрицы $[B]$ соответствуют два собственных значения матрицы $[H]$. Важной особенностью уравнений малых колебаний позиционной модели является вырожденность матрицы $[B]$, обусловленная вырожденностью матрицы $[A]$. Матрица $[A]$ представляет собой матрицу Якоби модели потокораспределения без БУ, сумма ее элементов каждой строки равна нулю, поэтому ее правым собственным вектором является вектор $e$, все компоненты которого равны единице [4]. Поэтому вырожденной будет и матрица $[H]$, причем согласно (12) и (13) она имеет два нулевых собственных значения с единичной геометрической кратностью. Другими словами матрица $[H]$ является дефектной, поэтому недиагонализуемой, но может быть представлена в виде разложения [17]:

$$[H]=[S][Jh][S]^{-1}, \tag{14}$$

где

$$[Jh]=\begin{bmatrix}Jh^{<0>} & 0\\ 0 & D^{<\lambda>}\end{bmatrix} \tag{15}$$

– жорданова каноническая форма матрицы $[H]$, где $[Jh^{<0>}]=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ – жорданова клетка двух нулевых собственных значений; $D^{<\lambda>}$ – диагональная матрица остальных собственных значений.

Тогда система (8) может быть преобразована к задаче:

$$dy(t)=[Jh]y(t);\ y(0)=y^{(0)}, \tag{16}$$

где $[\Delta\delta(t)^{\mathrm{T}}, \Delta\omega(t)^{\mathrm{T}}] = [S]y(t)$ и заданным считается вектор $y^{(0)} = [S]^{-1}[\Delta\delta^{(0)\mathrm{T}}, \Delta\omega^{(0)\mathrm{T}}]$.

Решение этой задачи:

$$y_1(t) = y_1(0) + y_2(0)t;\ \ y_2(t) = y_2(0);$$
$$y_k(t) = y_k(0)e^{\lambda_k t},\ \ k > 2.$$

Переход к исходным переменным дает решение возмущенного движения (8):

$$\begin{bmatrix}\Delta\delta(t)\\ \Delta\omega(t)\end{bmatrix} = S_1(\varsigma_1^{(0)} + t\varsigma_2^{(0)} + S_2\varsigma_2^{(0)} + \sum_{\forall k>2} S_k e^{\lambda_k t}\varsigma_k^{(0)}, \tag{17}$$

где $S_k$ — столбец $k$ матрицы $[S]$; $\varsigma_k^{(0)} = [\Delta\delta^{(0)\mathrm{T}}, \Delta\omega^{(0)\mathrm{T}}]Z_k$; $Z_k$ — столбец $k$ матрицы $[Z] = [S]^{-1^{\mathrm{T}}}$. Здесь $S_1 = [e^{\mathrm{T}}, 0^{\mathrm{T}}]$; $S_2 = [0^{\mathrm{T}}, e^{\mathrm{T}}]$; $Z_1 = [L^{<0>^{\mathrm{T}}}, 0^{\mathrm{T}}]/e^{\mathrm{T}}L^{<0>}$; $Z_2 = [0^{\mathrm{T}}, L^{<0>^{\mathrm{T}}}]/e^{\mathrm{T}}L^{<0>}$, а векторы $S_k$ и $Z_k$ для $k > 2$ соответствуют правому и левому собственным векторам (13) матрицы (9), отвечающим собственному значению $\lambda_k$.

Как и в общем случае, для устойчивости системы необходима отрицательность вещественных частей собственных значений $\lambda$. Однако из-за особенности комплексной арифметики этого добиться нельзя, возможно получить только чисто мнимые значения $\lambda_{2k-1} = j\overline{\omega}_k$; $\lambda_{2k} = -j\overline{\omega}_k$ с $\overline{\omega}_k = \sqrt{-\alpha_k}$, когда собственные числа $\gamma_k = \alpha_k + j\beta_k$ матрицы $[B]$ являются вещественными и отрицательными: $\alpha_k < 0$; $\beta_k = 0$. Тогда колебания системы будут периодическими, незатухающими:

$$\Delta\delta(t) = e(\Delta\delta^{c(0)} + t\Delta\omega^{c(0)}) + \sum_{m=2}^{n} R^{<\gamma_m>}\varsigma_m^{(0)}\cos(\overline{\omega}_m t - \varphi_m^{(0)});$$
$$\Delta\omega(t) = e\Delta\omega^{c(0)} + \sum_{m=2}^{n} R^{<\gamma_m>}\overline{\omega}_m\varsigma_m^{(0)}\sin(\overline{\omega}_m t - \varphi_m^{(0)}). \tag{18}$$

где

$$\Delta\delta^{c(0)} = L^{<0>^{\mathrm{T}}}\Delta\delta^{(0)} / e^{\mathrm{T}}L^{<0>};$$
$$\Delta\omega^{c(0)} = L^{<0>^{\mathrm{T}}}\Delta\omega^{(0)} / e^{\mathrm{T}}L^{<0>};$$
$$\varsigma_m^{(0)} = \sqrt{(L^{<\gamma_m>^{\mathrm{T}}}\Delta\delta^{(0)})^2 + (\overline{\omega}_k^{-1}L^{<\gamma_m>^{\mathrm{T}}}\Delta\omega^{(0)})^2};$$
$$\varphi_m^{(0)} = \arctan(\overline{\omega}_k^{-1}L^{<\gamma_m>^{\mathrm{T}}}\Delta\omega^{(0)} / L^{<\gamma_m>^{\mathrm{T}}}\Delta\delta^{(0)}). \tag{19}$$

Считается, что за счет рассеивания энергии, вызванного не учтенными в (5) демпфирующими силами, свободные колебания будут затухать. Таким образом, критерием статической апериодической устойчивости является вещественность и отрицательность собственных значений матрицы (10). При появлении комплексных собственных значений, в том числе с отрицательными вещественными частями, система станет статически неустойчивой, при этом нарушение устойчивости будет иметь характер самораскачивания.

В предельном по статической апериодической устойчивости режиме одно из ненулевых собственных значений матрицы $[B]$ будет равно нулю. В этом случае алгебраическая кратность нулевого собственного значения матрицы $[B]$ будет равна двум, а для матрицы $[H]$ — четырем, но геометрическая кратность останется равной единице [4]. Поэтому матрицы будут дефектными и для решения потребуются жордановы клетки большей размерности, что существенно усложняет расчетные выражения. Следует отметить, что в случае дефектной матрицы вообще не существует численно устойчивого способа вычисления жордановых канонических форм. Так например, для матрицы $[H]$ имеется бесконечное множество разложений матрицы (14). Нетрудно проверить, что если $S_2 = [0^{\mathrm{T}}, e^{\mathrm{T}}]$ заменить на $S_2 = [\rho e^{\mathrm{T}}, e^{\mathrm{T}}]$, а вектор $Z_1 = [L^{<0>^{\mathrm{T}}}, 0^{\mathrm{T}}]/e^{\mathrm{T}}L^{<0>}$ на $Z_1 = [L^{<0>^{\mathrm{T}}}, -\rho L^{<0>^{\mathrm{T}}}]/e^{\mathrm{T}}L^{<0>}$, где $\rho$ — любое число, то соотношение (14) также будет выполняться. При этом решение системы (15) останется таким же. Согласно [17] жорданова форма матрицы не является непрерывной функцией ее элементов, поэтому малые изменения элементов матрицы могут приводить к большим изменениям элементов ее жордановой формы. Обеспечение устойчивости при вычислении подобного объекта требует колоссальных вычислительных ресурсов, что делает такой подход неэффективным. Именно поэтому жордановы формы редко используют в вычислительной практике, а реализуются другие подходы.

Причиной появления жордановой клетки в (15) является постоянная вырожденность матрицы $[B]$. Для исключения вырожденности матрицы обычно используется подход, развитый П.С. Ждановым, который состоит в том, что уравнения возмущенного движения в «абсолютных углах» трансформируются в уравнения возмущенного движения в углах относительно угла одного из узлов (базисного), например, с номером $b$ [5]. Для этого уравнение узла $b$ вычитается из всех других уравнений системы. Поскольку слева в дифференциальных уравнениях будут присутствовать углы относительно базисного, а справа только относительные углы, и выполняется соотношение $\delta_{km} = \delta_k - \delta_m = (\delta_k - \delta_b) - (\delta_m - \delta_b) = \delta_{kb} - \delta_{mb}$, такой подход позволяет проводить исследование устойчивости движения, избежав вырожденности матрицы. Если воспользоваться блочным разбиением

$$[B]=\begin{bmatrix} B_{gg} & B_{gb} \\ B_{bg} & B_{bb} \end{bmatrix}, \tag{20}$$

где индекс $b$ соответствует базисному узлу, а $g$ — всем остальным узлам, то систему уравнений малых колебаний в относительных углах можно представить в виде

$$\frac{d^2\Delta\delta_g^r}{dt^2}=[B^r]\Delta\delta_g^r, \tag{21}$$

где $\Delta\delta_g^r=\Delta\delta_g-e\Delta\delta_b$,

и
$$[B^r]=[B_{gg}]-e[B_{bg}]. \tag{22}$$

В этом случае решение для (21) будет иметь вид, аналогичный (18) и (19), только без начальных слагаемых, стоящих перед знаком суммы по $m(m-1,...,n-1)$, а собственные векторы и значения будут отвечать матрице (22). Рассмотрим, чему будут соответствовать эти собственные значения и векторы.

Для собственного значения $\gamma$ матрицы справедливо

$$\det[B-\gamma E]=\det\begin{bmatrix} B_{gg}-\gamma E & B_{gb} \\ B_{bg} & B_{bb}-\gamma \end{bmatrix}=0. \tag{23}$$

Матрица $[B]$ вырождена, и если к последнему ее столбцу прибавить остальные, результатом будет нулевой столбец. Поскольку при прибавлении столбца к другому столбцу определитель матрицы не изменится, то, применив такую процедуру к (23), можно получить

$$\det\begin{bmatrix} B_{gg}-\gamma E & -\gamma e \\ B_{bg} & -\gamma \end{bmatrix}=0 \tag{24}$$

со всеми компонентами последнего столбца, равными $-\gamma$.

Поскольку при вычитании строки из других строк определитель также не изменится, то вычитание последней строки из вышестоящих дает

$$\det\begin{bmatrix} B_{gg}-eB_{bg}-\gamma E & 0 \\ B_{bg} & -\gamma \end{bmatrix}=0. \tag{25}$$

Раскрывая определитель (25) по последнему столбцу, можно получить

$$\det[B-\gamma E]=\det\begin{bmatrix} B_{gg}-eB_{bg}-\gamma E & 0 \\ B_{bg} & -\gamma \end{bmatrix}=$$

$$=-\gamma\det[B^e-\gamma E]=0, \tag{26}$$

где

$$[B^e]=[B_{gg}]-e[B_{bg}]. \tag{27}$$

Но матрица $[B^e]$ есть не что иное, как матрица (22) линеаризованных уравнений возмущенного движения роторов синхронных машин в относительных углах. Следовательно, собственные значения этой матрицы будут в точности соответствовать соответствующим собственным значениям исходной матрицы.

Таким образом, собственные значения матрицы уравнений малых колебаний в относительных углах будут одними и теми же независимо от выбора базисного узла $b$ и соответствуют собственным значениям исходной системы дифференциальных уравнений возмущенного движения. Другими словами, если исходная система устойчива (неустойчива), то она будет устойчивой (неустойчивой) при любом базисном узле. При этом согласно Приложению компоненты правых собственных векторов системы в относительных углах будут отличаться от соответствующих векторов исходной системы на одно и то же значение, равное компоненте правого собственного вектора базисного узла. Компоненты левых собственных векторов всегда будут равны соответствующим компонентам левых собственных векторов исходной системы.

**Критерий предельного по статической апериодической устойчивости режима позиционной модели.** Важным является получение критерия предельного по статической апериодической устойчивости режима позиционной модели. Для такого предельного режима одно из ненулевых собственных значений матрицы $[B^r]$ уравнений малых колебаний в относительных углах будет равно нулю. Учитывая (7) и (10), представим матрицу $[B^r]$ в виде

$$[B^r]=[T_g]^{-1}\left[\frac{\partial\Delta P_g}{\partial\delta_g}\right]-[T_b]^{-1}e\left[\frac{\partial\Delta P_b}{\partial\delta_g}\right]. \tag{28}$$

Умножая (28) слева на вектор-строку левого собственного вектора $L_g^{\mathrm{T}}$, отвечающего нулевому собственному значению матрицы $[B^r]$, и, транспонируя полученное выражение, можно получить

$$\left[\frac{\partial\Delta P_g}{\partial\delta_g}\right]^{\mathrm{T}}[T_g]^{-1}L_g-\left[\frac{\partial\Delta P_b}{\partial\delta_g}\right]^{\mathrm{T}}[T_b]^{-1}e^{\mathrm{T}}L_g=0. \tag{29}$$

Выполнив замену переменных

$$N_g^p=[T_g]^{-1}L_g;\ N_b^p=-[T_b]^{-1}e^{\text{т}}L_g, \quad (30)$$

можно представить (29) в виде

$$\left[\frac{\partial\Delta P_g}{\partial\delta_g}\right]^{\text{т}}N_g^p+\left[+\frac{\partial\Delta P_b}{\partial\delta_g}\right]^{\text{т}}N_b^p=0. \quad (31)$$

Кроме этого, (30) также дает

$$\sum_{g\neq b}T_gN_g^p+T_bN_b^p=0. \quad (32)$$

Используя (31) и (32) и учитывая (4), критерий предельного по статической апериодической устойчивости режима позиционной модели ЭС можно представить в следующем виде:

$$\left[\frac{\partial\Delta P}{\partial\delta}\,\chi\right]^{\text{т}}N^p=0, \quad (33)$$

где $\chi$ — вектор с компонентами:

$$\chi_k=T_k\Big/\sum_m T_m. \quad (34)$$

Сравнение (33) и (34) с матрицей Якоби модели потокораспределения с распределенным балансирующим узлом [4] показывает, что критерий предельного по статической апериодической устойчивости режима позиционной модели в точности соответствует критерию предельного режима модели потокораспределения ЭС с распределенным балансирующим узлом, в котором коэффициенты участия узлов в балансировке режима выбраны прямо пропорционально их постоянным инерции машин.

**Физика особенностей позиционной модели**. Полученные выражения позиционной модели позволяют опровергнуть утверждения [8 и 14] о физической несостоятельности позиционной модели, ее противоречии закону сохранения энергии и физике упругих колебаний.

По сути дела критерием предельного по статической апериодической устойчивости режима является условие (32), где компоненты вектора $N^p$ определяются решением системы линейных уравнений (31). Условие (32) ПР можно рассматривать как обобщение критерия Вагнера—Эванса на многомашинные системы. В этом критерии присутствуют постоянные инерции машин, так как согласно (3) и (4) для существования установившегося режима позиционной модели необходимо, чтобы общий небаланс мощности распределился между машинами пропорционально их постоянным инерции. Это значит, что в позиционной модели постоянные инерции играют ту же роль, что и крутизна статических характеристик автоматических регуляторов скорости (частоты) в непозиционной модели, учитывающей изменение частоты в ЭС. Можно показать для непозиционной модели, что при достаточно малом отклонении частоты критерий ее предельного режима будет аналогичен условию (33), только вместо значений постоянной инерции будут значения крутизны статических частотных характеристик автоматических регуляторов скорости.

Теперь рассмотрим систему уравнений малых колебаний позиционной модели (6) и (7). Для механических систем в аналогичном выражении матрица $[A^{\text{мех}}]$ системы линеаризованных дифференциальных уравнений является лапласианом, т.е. симметричной с диагональными элементами $A_{kk}^{\text{мех}}=-\sum_{\forall m\neq k}A_{k,m}^{\text{мех}}=-\sum_{\forall m\neq k}A_{m,k}^{\text{мех}}$. В противоположность этому матрица $[A]$ в (6) и (7) для неконсервативной системы несимметрична с $A_{kk}=-\sum_{\forall m\neq k}A_{k,m}\neq-\sum_{\forall m\neq k}A_{m,k}$, т. е. коэффициенты «жесткости» упругих связей позиционной модели не обладают свойством взаимности. Поэтому использование выражения координаты центра инерции (2), заимствованного из классической механики, для позиционной модели является некорректным. Согласно (18) и (19) координата центра инерции позиционной системы определяется выражением

$$\Delta\delta^c=L^{<0>\text{т}}\Delta\delta\,/\,e^{\text{т}}L^{<0>} \quad (35)$$

и в зависимости от начальных условий в процессе малых колебаний системы (18) будет находиться или в состоянии покоя, или равномерного движения аналогично поведению механической системы. Действительно, вектор $L^{<0>}$ является левым собственным вектором, отвечающим нулевому собственному значению матрицы $[B]$. Из теории матриц известно, что любой левый собственный вектор, отвечающий одному собственному значению, ортогонален любому правому собственному вектору другого, не равного ему, собственного значения. Поэтому умножение (18) слева на вектор строку $L^{<0>\text{т}}\Delta\delta/e^{\text{т}}L^{<0>}$ дает:

$$\Delta\delta^c(t)=\Delta\delta^{c(0)}+t\Delta\omega^{c(0)};\ \Delta\omega^c(t)=\Delta\omega^{c(0)}. \quad (36)$$

Если учесть, что $L^{<0>}=[T]N^p$, где вектор $N^p$ является собственным вектором матрицы $[B]=[\partial\Delta P/\partial\delta]$, отвечающим ее нулевому собственному значению и (28), то выражение для координаты центра инерции позиционной модели можно представить в более привычном виде:

$$\Delta\delta^c=([T]N^p)^{\text{т}}\Delta\delta/e^{\text{т}}[T]N^p=$$

$$=\sum_{\forall k} T_k N_k^p \Delta\delta_k \Big/ \sum_{\forall k} T_k N_k^p. \qquad (37)$$

Для анализа выполнения закона сохранения энергии в позиционной модели рассмотрим уравнения малых колебаний при приложении малых внешних возмущений $\Delta P$:

$$[T]\frac{d^2\Delta\delta}{dt^2}=[\partial\Delta P/\partial\delta]\Delta\delta+\Delta P]. \qquad (38)$$

В [14] для критики позиционной модели используется случай, «... когда внешние возмущения удовлетворяют условиям равновесия ...» $\sum_k \Delta P_k = 0.$ Однако такое условие соответствует «уравновешенным» возмущениям только для консервативной системы. В установившемся режиме должен выполняться баланс мощности с учетом потерь в сети. Поэтому в неконсервативной позиционной системе «уравновешенные» внешние возмущения должны удовлетворять условию:

$$\sum_k (1-\partial\pi/\partial P_k)\Delta P_k = 0, \qquad (39)$$

где $\partial\pi/\partial P_k$ – относительный прирост потерь узла $k$.

В [4] было показано, что компоненты собственного вектора $N^p$ матрицы $[\partial\Delta P/\partial\delta]$, отвечающего нулевому собственному значению, взаимосвязаны через относительные приросты потерь:

$$N_k^p = (1-\partial\pi/\partial P_k)N_b^p. \qquad (40)$$

Этот вектор является вектором нормали к гиперповерхности мощностей уравнений установившихся режимов ЭС [18] и отвечает (39). Поэтому умножение (38) слева на вектор-строку $N^{p\mathrm{T}}$ с учетом (37) дает

$$T^c d^2\Delta\delta^c/dt^2 = 0, \qquad (41)$$

где $T^c = \sum_{\forall k} T_k N_k^p$.

Таким образом, при приложении «уравновешенных» малых внешних возмущений (39) центр инерции позиционной системы (37) будет находиться или в состоянии покоя, или равномерного движения точно так же, как в механической системе. В случае, когда внешние возмущения будут отвечать условию $\sum_k \Delta P_k = 0$, они уже не будут «уравновешенными», в позиционной системе возникнет общий небаланс мощности и центр инерции будет двигаться с постоянным ускорением. Поэтому закон сохранения энергии в позиционной системе не нарушается, показывая несостоятельность утверждений [8 и 14].

**Сравнительный анализ предельных по статической апериодической устойчивости режимов позиционной модели и модели с шиной неограниченной мощности.** Представленный анализ выполнен для классической позиционной системы, в которой нагрузки ЭС задаются эквивалентными синхронными двигателями или(и) замещаются полными сопротивлениями. Такая модель нашла широкое применение при анализе динамической устойчивости ЭС [5 и 7]. В реальных энергосистемах кроме синхронных машин имеются и другие виды нагрузок, включая асинхронные двигатели. Следует отметить, что полной информации о составе работающего электрооборудования, как правило, нет и всё ограничивается данными о значениях нагрузок, иногда могут быть известны статические характеристики нагрузок. Поэтому обычно при анализе статической устойчивости нагрузка задается постоянными мощностями, иногда статическими характеристиками и для исследования статической устойчивости используется так называемая система дифференциально-алгебраических уравнений, включающая дифференциальные уравнения движения и алгебраические уравнения баланса мощности нагрузочных узлов.

Можно показать, что если такой подход применить к позиционной системе, то уравнения малых колебаний роторов синхронных машин будут иметь вид, аналогичный (6) и (7), только вместо матрицы $[\partial\Delta P/\partial\delta]$ в (7) будет матрица, полученная в результате прямого хода исключения Гаусса неинерционных переменных из линеаризованных дифференциально-алгебраических уравнений. Эта матрица имеет свойства, аналогичные матрице (7). Поэтому все ранее полученные результаты справедливы также и для такой позиционной системы. Если воспользоваться подходом, аналогично реализованным при выводе (30), можно получить критерий предельного по статической апериодической устойчивости режима такой позиционной системы:

$$\begin{bmatrix} \partial\Delta P/\partial\delta & \partial\Delta P/\partial V_{PQ} & \chi \\ \partial\Delta Q_{PQ}/\partial\delta & \partial\Delta Q_{PQ}/\partial V_{PQ} & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} N^P \\ N^Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (42)$$

Здесь матрица Якоби потокораспределения включает частные производные уравнений баланса активных мощностей всех узлов, а также уравнений баланса реактивных мощностей только $PQ$ узлов. Компоненты вектора $\chi$ определяются согласно (34), для компонент вектора $N^P$ справедливо (40), а компоненты вектора $N^Q$ удовлетворяют соотношению

$$N_k^Q = -\partial\pi / \partial Q_k N_k^P. \qquad (43)$$

Таким образом, критерий (42) предельного по статической апериодической устойчивости режима такой позиционной модели также полностью соответствует критерию предельного режима модели потокораспределения с распределенным БУ, в котором коэффициенты участия узлов в балансировке активной мощности назначены прямо пропорционально постоянным инерции синхронных машин.

Возникает важный вопрос: какую модель следует использовать для оценки коэффициентов запаса статической устойчивости ЭС? Согласно [18] для модели с шинами неограниченной мощности область статически апериодически устойчивых режимов ЭС зависит от месторасположения БУ. Для позиционной модели область статически апериодически устойчивых режимов зависит от значений постоянной инерции, которые фактически действуют как коэффициенты участия в балансировке активной мощности и в скрытой форме вводят распределенный БУ в позиционную модель. Ответ на этот вопрос дает анализ критериев предельных по статической апериодической устойчивости режимов модели с шинами неограниченной мощности [4] и позиционной модели (42).

Проанализируем критерий (42). Вектор $N = [N^{P\,\mathrm{T}}, N^{Q\,\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ является собственным вектором матрицы Якоби потокораспределения без назначенного БУ [4]. Этот вектор представляет собой вектор нормали к гиперповерхности мощностей уравнений установившихся режимов ЭС [18], его компоненты отвечают (40) и (43). Согласно (43) в ПР позиционной модели

$$\sum_{\forall k} T_k N_k^p = 0. \qquad (44)$$

Согласно [4] в ПР модели с шиной неограниченной мощности (БУ в узле $m$) $N_m^p = 0$, т.е. $\partial\pi / \partial P_m = 1$.

Постоянные инерции всегда положительны. Поэтому согласно (44) в ПР позиционной модели, по крайней мере, одна из компонент вектора нормали, например $m$, должна быть отрицательной. Но тогда согласно (40) это означает, что относительный прирост потерь для узла $m$ в ПР больше единицы. Поэтому этот ПР и его ближайшая окрестность будут статически апериодически неустойчивыми, если в качестве БУ назначен узел $m$. Если в этом ПР уменьшить генерацию в узле $m$, то можно дополнительно увеличить мощность нагрузки. Другими словами, ПР позиционной модели находится дальше в пространстве напряжений, но ближе в пространстве мощностей [19], чем ПР модели с шиной неограниченной мощности с БУ в узле $m$. В теории и практике коэффициент запаса статической устойчивости ЭС обычно определяется в терминах мощностей [20]. В этом случае позиционная модель будет давать заниженную оценку коэффициента запаса статической устойчивости. Поэтому наиболее подходящей для определения расчетного предельного режима является модель ЭС с шинами неограниченной мощности, в ПР которой относительные приросты потерь всех узлов не превышают единицу [21]. Этот ПР будет статически устойчивым как для позиционной модели, так и для модели с шинами неограниченной мощности при любом другом местоположении БУ. Для реализации такой расчетной модели программные блоки утяжеления следует дополнить проверкой относительных приростов потерь мощности $\partial\pi / \partial P_m < 1$ или $N_m^p > 0$ для всех узлов. Если на очередном шаге утяжеления окажется, что $\partial\pi / \partial P_k > 1$ или $N_k^p < 0$ для какого-то узла $k$, этот узел следует переназначить балансирующим и продолжить расчет. Найденный таким образом предельный режим определит наибольшее значение нагрузки ЭС для заданной траектории утяжеления [19]. При этом информации о параметрах синхронных машин не требуется.

**Приложение.** *Взаимосвязь между собственными векторами матриц уравнений малых колебаний в абсолютных и относительных углах.* Рассмотрим, чему будут соответствовать компоненты правых собственных векторов $R^r$ матрицы $[B^r]$. Воспользуемся соотношениями для правого собственного вектора исходной матрицы $[B]$, отвечающего собственному значению $\gamma$:

$$[B_{gg}]R_g + [B_{gb}]R_b = \gamma R_g; \qquad (\text{П-1})$$

$$[B_{bg}]R_g + B_{bb}R_b = \gamma R_b. \qquad (\text{П-2})$$

Из вырожденности матрицы $[B]$ следует:

$$B_{gb} = -[B_{gg}]e; \;\; B_{bb} = -[B_{bg}]e. \qquad (\text{П-3})$$

Подставляя эти выражения в (П-1) и (П-2), можно получить:

$$[B_{gg}][R_g - eR_b] = \gamma R_g; \qquad (\text{П-4})$$

$$[B_{bg}][R_g - eR_b] = \gamma R_b. \qquad (\text{П-5})$$

Вычитание (П-5) из каждого уравнения (П-4) дает

$$([B_{gg}] - e[B_{bg}])(R_g - eR_b) = \gamma(R_g - eR_b). \qquad (\text{П-6})$$

При сравнении (П-6) с

$$[B^r]R^r = ([B_{gg}] - e[B_{bg}])R^r = \gamma R^r \qquad (\text{П-7})$$

обнаруживается, что

$$R^r = R_g - eR_b.$$

Для левого собственного вектора $[L]=[L_g^{\text{T}}, L_b]^{\text{T}}$ справедливо

$$\begin{aligned} &L_g^{\text{T}}[B_{gg}] + L_b[B_{bg}] = \gamma L_g^{\text{T}};\\ &L_g^{\text{T}}[B_{gb}] + L_b B_{bb} = \gamma L_b \end{aligned} \qquad (\text{П-8})$$

или

$$[L_g^{\text{T}}, L_b]\begin{bmatrix} B_{gg} & B_{gb} \\ B_{bg} & B_{bb} \end{bmatrix} = \gamma[L_g^{\text{T}}, L_b]. \qquad (\text{П-9})$$

Умножая (П-9) справа на вектор $e$, можно получить

$$0 = \gamma(L_g^{\text{T}} e + L_b), \qquad (\text{П-10})$$

поскольку этот вектор является правым собственным вектором, отвечающим нулевому собственному значению этой матрицы. Таким образом, при ненулевых значениях $\gamma$

$$L_b = -L_g^{\text{T}} e. \qquad (\text{П-11})$$

Подстановка (П-11) в (П-8) дает

$$L_g^{\text{T}}([B_{gg}] - e[B_{bg}]) = L_g^{\text{T}}[B^r] = \gamma L_g^{\text{T}} e. \qquad (\text{П-12})$$

Если $\gamma=0$, (П-9) примет вид

$$\begin{aligned} &L_g^{\text{T}}[B_{gg}] + L_b[B_{bg}] = 0;\\ &L_g^{\text{T}}[B_{gb}] + L_b B_{bb} = 0, \end{aligned} \qquad (\text{П-13})$$

то для матрицы $[B^r]$ можно записать:

$$L^{r\,\text{T}}[B^r] = L^{r\,\text{T}}([B_{gg}] - e[B_{bg}]) = 0 \qquad (\text{П-14})$$

или

$$L^{r\,\text{T}}[B_{gg}] - L^{r\,\text{T}} e([B_{bg}] = L_g^{r\,\text{T}}[B_{gg}] + L^b[B_{bg}] = 0, \qquad (\text{П-15})$$

где

$$L^b = -L^{r\,\text{T}} e. \qquad (\text{П-16})$$

Умножая (П-15) справа на вектор $e$ и учитывая свойства матрицы $[B^r]$, можно получить

$$L^{r\,\text{T}}[B_{gb}] + L^b[B_{bb}] = 0. \qquad (\text{П-17})$$

Из сравнения (П-15) и (П-17) с (П-13), а также рассмотрения (П-11), (П-12) и (П-16) следует, что левый собственный вектор $L^r$ матрицы $[B^r]$ будет равен левому собственному вектору $L_g$ исходной матрицы $[B]$: $L^r = L_g$; $L_b = -L_g^{\text{T}} e$.

**Выводы.** 1. Анализ уравнений малых колебаний позиционной модели показал, что собственные значения позиционной модели взаимного (относительного) движения роторов синхронных машин будут одними и теми же независимо от выбора базисного узла и соответствуют собственным значениям системы линеаризованных дифференциальных уравнений абсолютного движения позиционной системы.

2. Позиционная модель неявно использует идеологию распределенного балансирующего узла, и ее предельные режимы в точности соответствуют предельным режимам модели потокораспределения с распределенным балансирующим узлом, в котором коэффициенты участия узлов в балансировке активной мощности электрической системы выбраны прямо пропорционально постоянным инерции синхронных машин.

3. Получен критерий предельных по статической апериодической устойчивости режимов позиционной модели, обобщающий критерий Вагнера–Эванса на сложные многомашинные системы. Установлено, что в предельном режиме позиционной модели вектор постоянных инерций ортогонален вектору нормали гиперповерхности мощностей. Поскольку постоянные инерции всегда положительны, а компоненты вектора нормали гиперповерхности мощностей взаимосвязаны через относительные приросты потерь мощности, предельный режим позиционной модели в заданном направлении утяжеления будет находиться дальше в пространстве напряжений, но ближе в пространстве мощностей нагрузки, чем предельный режим модели с шинами неограниченной мощности.

4. Для определения расчетных предельных режимов наиболее адекватной является модель потокораспределения с шиной неограниченной мощности, в предельных режимах которой относительные приросты потерь мощности для всех узлов не превышают единицу.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Venikov V.A., Stroev V.A., Idelchik V.I., Tarasov V.I.** Estimation of electrical power system steady state stability in load flow calculations. – IEEE Trans. on PAS, May/June 1975, vol. PAS-94, No. 3, pp. 1034–1041,

2. **Идельчик В.И.** Расчеты установившихся режимов электрических систем. М.: Энергия, 1977, 192 с.

3. **Sauer P.W., Pai M.A.** Power system steady-state stability and the load-flow Jacobian. – IEEE Trans. Power Syst., Nov., 1990, vol. 5, No. 4, pp. 1374–1383.

4. **Аюев Б.И., Давыдов В.В., Ерохин П.М.** Оптимизационная модель предельных режимов электрических систем. – Электричество, 2010, № 11, с. 2–14.

5. **Жданов П.С.** Вопросы устойчивости электрических систем / Под ред. Л.А. Жукова. М.: Энергия, 1979, 456 с.

6. **Веников В.А.** Переходные электромеханические процессы в электрических системах. М.: Энергия, 1964, 379 с.

7. **Андерсон П., Фуад А.** Управление энергосистемами и устойчивость. М.: Энергия, 1980, 568 с.

8. **Костюк О.М.** Позиционная идеализация энергосистем и закон сохранения энергии. Киев: Изд. ИЭД АН УССР, 1974.

9. **Материалы** дискуссии по теории статической устойчивости энергосистемы. – Электричество, 1975, № 8, с. 66–93.

10. **Цукерник Л.В.** О критике теории статической устойчивости энергосистем. – Электричество, 1974, № 5, с. 21–31.

11. **Ушаков Е.И.** Некоторые свойства математических моделей электрических систем и их анализ применительно к задаче статической устойчивости. – Электричество, 1977, № 10, с. 19–26.

12. **Лушаков Э.С.** О некоторых свойствах позиционной модели электрических систем. – Электричество, 1977, № 10, с. 26–29.

13. **Веников В.А., Цукерник Л.В.** Развитие методов исследования устойчивости электрических систем (К 75-летию со дня рождения П.С. Жданова). – Электричество, 1978, № 2, с. 1–7.

14. **Костюк О.М.** Элементы теории устойчивости энергосистем. Киев: Наукова думка, 1983, 296 с.

15. **Рудницкий М.П.** Элементы теории устойчивости и управления режимами энергосистем: Учебное пос. Свердловск: УПИ, 1984, 96 с.

16. **Меркин Д.Р.** Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1987, 304 с.

17. **Хорн Р., Джонсон Ч.** Матричный анализ. М.: Мир, 1989, 655 с.

18. **Давыдов В.В., Ерохин П.М., Кирилов К.Ю**. Гиперповерхность мощностей установившихся режимов электрической системы. – Научные труды III Междунар. науч.-техн. конф. «Электроэнергетика глазами молодежи», Екатеринбург, 22–26 октября 2012 г. Екатеринбург: УрФУ, 2012, т.1. с. 191–197.

19. **Давыдов В.В., Ерохин П.М., Прудов М.А**. Исследование моделей электрической системы для оценки коэффициента запаса статической устойчивости. – Научные труды. V Междунар. науч.-техн. конф. «Электроэнергетика глазами молодежи», Томск, 10–14 ноября 2014 г. Томск: ТПУ, 2014, т. 1. с. 66–70.

20. **Гуревич Ю.Е., Либова Л.Е., Окин А.А.** Расчеты устойчивости и противоаварийной автоматики в энергосистемах. М.: Энергоатомиздат, 1990, 390 с.

21. **Давыдов В.В., Ерохин П.М., Прудов М.А**. Исследование предельных режимов моделей электрической системы. – Научные труды VI Междунар. науч.-техн. конф. «Электроэнергетика глазами молодежи», Иваново, 9–13 ноября 2015 г. Иваново: ИГЭУ, 2015, т. 1. с. 187–192.

*[23.07.2018]*

*А в т о р ы:* ***Давыдов Виктор Васильевич*** *окончил в 1979 г. электротехнический факультет Восточно-Сибирского технологического института (г. Улан-Удэ). В 1987 г. защитил кандидатскую диссертацию «Методы оперативного расчета потерь электрической энергии и компенсации реактивной мощности в больших энергосистемах» в Уральском политехническом институте (УПИ). Ведущий специалист Филиала АО «СО ЕЭС» «Объединенное диспетчерское управление энергосистемами Сибири».*

***Аюев Борис Ильич*** *окончил в 1979 г. УПИ. В 2008 г. защитил докторскую диссертацию «Методы и модели эффективного управления режимами Единой электроэнергетической системы России» в Новосибирском государственном техническом университете. Председатель Правления АО «СО ЕЭС».*

***Ерохин Петр Михайлович*** *окончил в 1969 г. электротехнический факультет УПИ. В 2005 г. защитил докторскую диссертацию «Задачи и технологии оперативно-диспетчерского управления режимами ЕЭС в конкурентно-рыночной энергетике России» в Уральском государственном техническом университете. Сотрудник АО «СО ЕЭС» ОДУ Урала (г. Екатеринбург), советник директора АО «СО ЕЭС».*

***Прудов Максим Александрович*** *окончил в 2014 г. Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления (ВСГУТУ). Аспирант ВСГУТУ.*

***Elektrichestvo, 2019, No. 3, pp. 4–14*** ***DOI:10.24160/0013-5380-2019-3-4-14***

# Studying a Power System Position Model

**DAVYDOV Victor V.** *(Incorporated Controller's Management by the Grids of Siberia, Ulan-Ude, Russia) – Leading Specialist, Cand. Sci. (Eng.)*

**AYUYEV Boris I.** *(Joint-Stock Company «System Operator of the Single Power System» (JSC «SOSPS»), Moscow, Russia) – Chairman of Rule, Dr. Sci. (Eng.)*

**YEROKHIN Petr M.** *(Ural JSC «SOSPS», Yekaterinburg, Russia) – Employee, Adviser of Director of JSC «SOSPS», Dr. Sci. (Eng.)*

**PRUDOV Maxim A.** *(East Siberia State University of Technologies and Management, Ulan-Ude, Russia) – Graduate Student*

*The position model specific features are investigated; the eigenvalues and eigenvectors of the small perturbation equation matrix are analyzed, and a criterion of limiting operation modes in terms of aperiodic steady-state stability is obtained, which generalizes the classic Wagner - Evans criterion for complex multimachine systems. It has been found that the position model, i.e., a model in which the powers* *and torques of generators depend only on the relative angles of machine rotors, implicitly uses the distributed slack bus philosophy, and its limiting modes in terms of aperiodic steady-state stability are exactly identical with the limiting modes of a load flow model with a distributed slack bus in which the coefficients characterizing the participation of nodes in active power balancing are assigned to be directly proportional of the synchronous machines' inertia constants. It has been found from a comparative analysis of the limiting mode parameters in the position model and the model with an infinite bus that the position model yields a conservative (underestimated) assessment of the electric power system steady-state stability margin. It is shown that the steady-state stability margins are estimated in the most adequate manner by means of the load flow model with an infinite bus, in the limiting modes of which the relative power loss increments do not exceed unity for all nodes.*

Key words: *power system, aperiodic steady-state instability, position model, limiting modes, power loss, relative increases*

REFERENCES

1. **Venikov V.A., Stroev V.A., Idelchik V.I., Tarasov V.I.** Estimation of electrical power system steady state stability in load flow calculations. – IEEE Trans. on PAS, May/June 1975, vol. PAS-94, No. 3, pp.1034–1041,

2. **Idel'chik V.I.** *Raschety ustanovivshikhsya rezhimov elektricheskikh sistem* (Calculations of Steady-State Conditions of the Electric Systems). Moscow, Energia, 1977, 192 p.

3. **Sauer P.W., Pai M.A.** Power system steady-state stability and the load-flow Jacobian. – IEEE Trans. Power Syst., Nov., 1990, vol. 5, No. 4, pp. 1374–1383.

4. **Ayuyev B.I., Davydov V.V., Yerokhin P.M**. *Elektrichestvo – in Russ. (Electricity)*, 2010, No. 11, pp. 2–14.

5. **Zhdanov P.S.** *Voprosy ustoichivosti elektricheskikh sistem – in Russ.* (Questions of Stability of the Electric Systems). Moscow, Energiya, 1979, 456 p.

6. **Venikov V.A.** *Perekhodnye elektromekhanicheskiye protsessy v elektricheskikh sistemakh* (Electromechanics Transients are in the Electric System). Moscow, Energiya, 1964, 379 p.

7. **Anderson P., Fuad A.** *Upravleniye energosistemami i ustoichivost'* (Management by grids and Stability). Moscow, Energiya, 1980, 568 p.

8. **Kostyuk O.M.** *Pozitsionnaya idealizatsiya energosistem i zakon sokhraneniya energii* (Position Idealization of Grid and Law of Conservation of Energy). Kiyev, IED AN USSR, 1974.

9. **Materialy** *diskussii po teorii staticheskoi ustoichivosti energosistemy* (Materials of Discussion on the Theory of Static Stability of Grid). *Elektrichestvo – in Russ. (Electricity)*, 1975, No. 8, pp. 66–93.

10. **Tsukernik L.V.** *Elektrichestvo – in Russ. (Electricity)*, 1974, No. 5, pp. 21–31.

11. **Ushakov Ye.I.** *Elektrichestvo – in Russ. (Electricity)*, 1977, No. 10, pp. 19–26.

12. **Lushakov E.S.** *Elektrichestvo – in Russ. (Electricity)*, No. 10, pp. 26–29.

13. **Venikov V.A., Tsukernik L.V.** *Elektrichestvo – in Russ. (Electricity)*, 1978, No. 2, pp. 1–7.

14. **Kostyuk O.M.** *Elementy teorii ustoichivosti energosistem* (Elements of Theory of Stability of Grids). Kiyev, Naukova dumka, 1983, 296 p.

15. **Rudnitskiy M.P.** *Elementy teorii ustoichivosti i upravleniya rezhimami energosistem* (Elements of Theory of Stability and Management by the Modes of Grids). Sverdlovsk: Ural Politechnic Institute, 1984, 96 p.

16. **Merkin D.R.** *Vvedeniye v teoriyu ustoichivosti dvizheniya* (Introduction to the Theory of Stability of Motion). Moscow, Nauka, 1987, 304 c.

17. **Khorn R., Johnson Ch.** *Matrichnyi analiz* (Matriz Analysis). Moscow, Mir, 1989, 655 p.

18. **Davydov V.V., Yerokhin P.M., Kirilov K.Yu.** Proc. of the III Intern. scientific and technical conf. «Power Engineering by the eyes of young people» Ekaterinburg, 22–26 Octjber 2012. – Ekaterinburg, Ural Federal University, 2012, vol. 1. pp. 191–197.

19. **Davydov V.V., Yerokhin P.M., Prudov M.A**. Proc. of the V Intern. scientific and technical conf. «Power Engineering by the eyes of young people». Tomsk, Tomsk Polytechnic University, 2014, vol. 1. pp. 66–70.

20. **Gurevich Yu.Ye., Libova L.Ye., Okin A.A.** *Raschety ustoichivisti i protivoavariinoi avtomatiki v energosistemakh* (Calculations of stability and emergency control schemes in grids). Moscow, Energoatomizdat, 1990, 390 p.

21. **Davydov V.V., Yerokhim P.M., Prudov M.A.** Proc of the VI Intern. scientific and technical conf. «Power Engineering by the eyes of young people». Ivanovo, 9–13 November 2015. Ivanovo, State Power University, 2015, т. 1. pp. 187–192.

*[23.07.2018]*