

О коэффициентах взаимной индукции и силах взаимодействия круговых коаксиальных контуров

ЦИЦИКЯН Г.Н.

Анализируя литературу, в которой приводятся выражения для взаимной индуктивности и сил взаимодействия круговых соосных контуров с током в параллельных плоскостях, можно прийти к неакцентированным заключениям. Цитируемые в списке литературы работы [1–10] довольно разнообразны, в них выражения с полными эллиптическими интегралами, включающими и их численную реализацию, занимают значительное место. В статье рассматриваются альтернативные выражения для коэффициентов взаимной индукции и сил взаимодействия круговых коаксиальных контуров. Показано преимущество применения этих выражений с присоединенными функциями Лежандра второго рода с полуцелым индексом для численной реализации.

К л ю ч е в ы е с л о в а: коэффициенты взаимной индукции, коаксиальные контуры, силы взаимодействия, альтернативные выражения

Анализ и сопоставление выражений для взаимной индуктивности и сил взаимодействия круговых соосных контуров с током в параллельных плоскостях [1–10] приводят к ряду заключений, не акцентированных в своё время. Упомянутая литература довольно разнообразна, в ней много места отводится выражениям с полными эллиптическими интегралами, включающими и их численную реализацию. Обратим внимание и на иной характер представлений во взаимосвязи с классическими результатами, обстоятельно изложенными в [2].

Выражение для взаимной индуктивности двух круговых соосных контуров радиусами R_1 и R_2 (рис. 1) записано в [2] с учётом разницы в обозначениях:

$$M = \frac{\mu_0}{2} [(R_1 + R_2)^2 + x^2]^{1/2} [2(K - E) - k^2 K], \quad (1)$$

где x – расстояние между параллельными плоскостями, в которых расположены контуры; $K = K(k)$, $E = E(k)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода с модулем k ,

$$k^2 = \frac{4R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} + x^2. \quad (2)$$

С учетом вышеизложенного нетрудно получить видоизмененные выражения для коэффициента взаимной индукции:

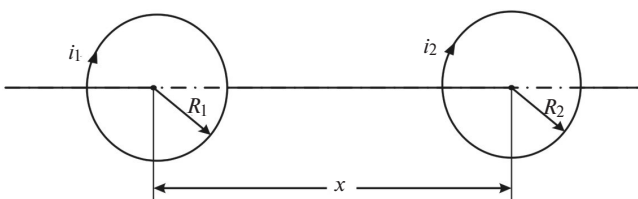


Рис. 1. Соосные контуры с током

$$M = \mu_0 (R_1 R_2)^{1/2} \left[\left(\frac{2}{k} - k \right) K - \frac{2}{k} E \right] = \mu_0 \frac{(R_1 R_2)^{1/2}}{k} [(2 - k^2)K - 2E]. \quad (3)$$

Обозначая первую по записи в (3) квадратную скобку как $f(k)$, получаем [6]:

$$M = \mu_0 (R_1 R_2)^{1/2} f(k). \quad (4)$$

Разлагая в ряд по k формулу (3), записываем:

$$M = \frac{\mu_0 \pi \sqrt{R_1 R_2}}{16} k^3 \left(1 + \frac{3}{4} k^2 + \frac{75}{128} k^4 + \frac{245}{512} k^6 \dots \right). \quad (5)$$

Внешнее отличие (5) от ряда (5-31) в [7] состоит лишь в том, что из знаменателей числовых коэффициентов в (5-31) вынесен за скобки множитель 8. Этим рядом удобно пользоваться, когда $k^2 < 0,3$.

Если ввести обозначение $m = \frac{1 - \sqrt{1 - k^2}}{1 - \sqrt{1 + k^2}}$ и выразить k^2 через m , а именно $k^2 = \frac{4m}{(1+m)^2}$, то (5) преобразуется [1]:

$$M = \frac{\mu_0}{2} \pi (R_1 R_2)^{1/2} m^{3/2} \left(1 + \frac{3}{8} m^2 + \frac{15}{64} m^4 + \dots \right). \quad (6)$$

Ряд (6) по сравнению с рядом (5) сходится быстрее. В [7] вместо обозначения m используется k_1 . С учётом замены обозначения m на k_1 вместо (3) можно записать [1, 7]:

$$M = \frac{2\mu_0 (R_1 R_2)^{1/2}}{k_1^{1/2}} [K(k_1) - E(k_1)] =$$

$$= \frac{2\mu_0(R_1 R_2)^{1/2}}{k_1^{1/2}} [K_1 - E_1],$$

где K_1, E_1 – полные эллиптические интегралы первого и второго рода с модулем $k_1 = \frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1+k^2}} = m$.

Следует отметить, что в [2] приведены выражения коэффициентов взаимной индукции для случаев «соленоид–виток» и «соленоид–соленоид», в которых наряду с полными эллиптическими интегралами первого и второго рода содержится ещё и полный эллиптический интеграл третьего рода, что усложняет получение их численной оценки.

Представляет интерес сопоставление выражения (5) с выражением, вытекающим из (71) в [8] для наведённой φ -компоненты напряжённости электрического поля в соосной круговой петле с учётом коэффициента распространения γ , где $\gamma^2 = j\mu_0\omega(\sigma + j\omega\varepsilon)$, j – мнимая единица; σ – удельная электропроводность; ω – круговая частота; ε – диэлектрическая проницаемость окружающей среды. Обозначая ЭДС через $\dot{e}_\varphi = -2\pi R_2 \dot{E}_\varphi$, можем записать $\dot{e}_\varphi = -2\pi R_2 \frac{j\mu_0\omega I \pi R_1^2}{4\pi r^2} (1 + \gamma r) e^{-\gamma r} \sin\theta$, где $r^2 = (R_2^2 + x^2)$, $\sin\theta = R_2 / r$ и x – расстояние между контурами. Для радиусов обозначения остаются прежними. Тогда с некоторым приближением:

$$\dot{e}_\varphi \approx -\frac{j\mu_0\omega I \pi R_1^2 R_2^2}{2(R_2^2 + x^2)^{3/2}} (1 + \gamma^2 r^2).$$

Полагая $\gamma^2 r^2 \ll 1$, предыдущее выражение еще более упрощается:

$$\dot{e}_\varphi \approx -\frac{j\mu_0\omega I \pi R_1^2 R_2^2}{2(R_2^2 + x^2)^{3/2}}. \quad (7)$$

Разделив (7) на $(-j\omega I)$, для коэффициента взаимной индукции найдём:

$$M = \frac{\mu_0\pi R_1^2 R_2^2}{2(R_2^2 + x^2)^{3/2}}. \quad (8)$$

С другой стороны, в соответствии с (5) с учётом (2) можно записать:

$$M = \frac{\mu_0\pi\sqrt{R_1^2 R_2^2}}{16} \left[\frac{2\sqrt{R_1^2 R_2^2}}{[(R_1^2 + R_2^2) + x^2]^{1/2}} \right]^3 \times \left(1 + \frac{3}{4}k^2 + \frac{75}{128}k^4 + \frac{245}{512}k^6 \dots \right) =$$

$$= \frac{\mu_0\pi(R_1^2 R_2^2)^2}{2[(R_1^2 + R_2^2) + x^2]^{1/2}} \left(1 + \frac{3}{4}k^2 + \frac{75}{128}k^4 + \frac{245}{512}k^6 \dots \right). \quad (9)$$

Из сопоставления (8) и (9) с учётом общего множителя $\frac{\mu_0\pi(R_1^2 R_2^2)^2}{2}$ для отношения (9) к (8) имеем:

$$\left[\frac{1 + \left(\frac{x}{R_2}\right)^2}{\left(\frac{R_1}{R_2} + 1\right)^2 + \left(\frac{x}{R_2}\right)^2} \right]^{3/2} \left(1 + \frac{3}{4}k^2 + \frac{75}{128}k^4 + \frac{245}{512}k^6 \dots \right), \quad (10)$$

и можем выразить

$$k^2 = \frac{4R_1 / R_2}{\left(\frac{R_1}{R_2} + 1\right)^2 + \left(\frac{x}{R_2}\right)^2}.$$

При $R_1 = 2R_2$ и $x/R_2 = 5; 7; 9$ находим для k^2 соответственно 0,2353; 0,1379; 0,0889. Для этих трёх случаев в соответствии с (10) имеем: 0,669; 0,893 и 0,932, а с увеличением отношения x/R_2 различие становится всё менее заметным.

Обратим внимание на компактную запись выражения (1) через присоединённую сферическую функцию Лежандра второго рода с полуцелым индексом [9]:

$$M = \mu_0\sqrt{R_1 R_2} Q_{1/2}(g), \quad (11)$$

где

$$g = 1 + \frac{x^2(R_2 - R_1)^2}{2R_1 R_2} = \frac{x^2 + R_1^2 + R_2^2}{2R_1 R_2}. \quad (12)$$

Из сравнения (11) и (4) выясняется, что $f(k) = \left[\left(\frac{2}{k} - k\right) K - \frac{2}{k} E \right]$ и есть функция $Q_{1/2}(g)$. Как видим, выражения (2) и (12) связаны соотношениями: $g = \frac{2}{k^2} - 1 = \frac{2 - k^2}{k^2}$ и $k^2 = \frac{2}{g + 1}$, поэтому $k = \sqrt{\frac{2}{g + 1}}$.

Воспользуемся связью $Q_{1/2}(g)$ с полными эллиптическими интегралами первого и второго рода в виде (8.13.7) из [12]:

$$Q_{1/2}(g) = Q_{1/2}\left(\frac{2 - k^2}{k^2}\right) = \frac{2 - k^2}{k^2} k K(k) -$$

$$-\left[2\left(\frac{2-k^2}{k^2}+1\right)\right]^{1/2} E(k)=\frac{2-k^2}{k^2} K(k)-\frac{2}{k} E(k)=$$

$$=\left(\frac{2}{k}-k\right) K(k)-\frac{2}{k} E(k)=f(k),$$

что и требовалось показать.

С другой стороны, используя связь между k и g , можно из (5) получить:

$$M=\mu_0\sqrt{R_1 R_2}\left\{\frac{\pi}{16}\left(\frac{2}{g+1}\right)^{3/2}\times\right.$$

$$\left.\times\left[1+\frac{3}{4}\frac{2}{g+1}+\frac{75}{128}\frac{4}{(g+1)^2}+\frac{245}{512}\frac{8}{(g+1)^3}+\dots\right]\right\}. \quad (9a)$$

Выражение в фигурных скобках можно рассматривать как разложение $Q_{1/2}(g)$ по отрицательным степеням $(g+1)>2$. При $(g+1)$, близких к 2, записанный ряд плохо сходится.

Отметим ещё одно интегральное представление для $f(k)$, вытекающее из (8) [9] при $a=0$ и $z>0$ с последующей заменой обозначений z на x , записанное в виде

$$M=\mu_0 R_1 R_2 \int_0^\infty e^{-x\lambda} J_1(R_1 \lambda) J_1(R_2 \lambda) d\lambda,$$

отсюда

$$f(k)=Q_{1/2}(g)=\pi\sqrt{R_1 R_2} \int_0^\infty e^{-x\lambda} J_1(R_1 \lambda) J_1(R_2 \lambda) d\lambda, \quad (13)$$

что также было показано в [4].

Выражение (13) можно рассматривать как частный случай преобразования Ганкеля для $x^{1/2} e^{-\alpha xy} J_\nu(\beta x)$ при $\text{Re}\alpha > \text{Im}\beta > 0, \text{Re}\nu > -1/2$ (см.

т. II таблиц интегральных преобразований Г. Бейтмена и А. Эрдейи (М.: Наука, 1970), записанное в виде

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} J_\nu(\beta x) J_\nu(xy) dx =$$

$$-\pi^{-1}(\beta y)^{-1/2} Q_{\nu-1/2}\left(\frac{\alpha^2 + \beta^2 + y^2}{2\beta y}\right),$$

если $\nu=1,0, x=\lambda, \alpha=x, \beta=R_1, y=R_2$ и $\frac{x^2 + \beta^2 + y^2}{2\beta y} = \frac{x^2 + R_1^2 + R_2^2}{2R_1 R_2} = g$.

Взаимная индукция для двух витков одинакового радиуса R на расстоянии $2a$ определяется как

$$\mu_0 R Q_{1/2}\left(2\frac{a^2}{R^2}+1\right). \quad (14)$$

Это выражение, умноженное на ω , определяет собой индуктивное сопротивление, вносимое в виток, расположенный над идеально проводящим полупространством, в полном соответствии с (18) в [10].

Выражение для силы взаимодействия двух витков с учётом замены z на h, a на R_1 и ρ на R_2 дано в виде [2]:

$$F=\frac{\mu_0 i_1 i_2}{2} \frac{h}{(1-k^2)[h^2+(R_1+R_2)^2]^{1/2}} \times$$

$$\times [k^2 K+(k^2-2)(K-E)]=$$

$$=-\frac{\mu_0 i_1 i_2}{2} \frac{h}{[h^2+(R_1+R_2)^2]^{1/2}} \left[K - \frac{2-k^2}{2(1-k^2)} E(k) \right]=$$

$$=-\frac{\mu_0 i_1 i_2}{2} \frac{h}{[h^2+(R_1+R_2)^2]^{1/2}} \left[K - \frac{(R_1^2+R_2^2+h^2)E}{(R_1-R_2)^2+h^2} \right]. \quad (15)$$

Последнее равенство в (15) имеется в [1] с учётом разницы в обозначениях.

Если исходить из формулы (32), полученной в [9] в виде

$$F=\mu_0 i_1 i_2 \frac{h}{\sqrt{R_1 R_2}} \frac{Q_{1/2}^1(g)}{(g^2-1)^{1/2}}, \quad (16)$$

можно показать, что $Q_{1/2}^1(g)$ выражается через эллиптические интегралы следующим образом (см. Приложение 2):

$$Q_{1/2}^1(g)=\frac{(1-k^2)^{1/2}}{k} K(k)-\frac{2-k^2}{2k(1-k^2)^{1/2}} E(k), \quad (17)$$

при этом из (16) и (7) вытекают равенства формулы (15), но без знака минус перед $\mu_0 i_1 i_2$. Объяснение такому различию заключено в выборе знака в формуле для силы через производную от коэффициента взаимной индукции:

$$F=\pm i_1 \frac{\partial(Mi_2)}{\partial g}=\pm i_1 i_2 \frac{\partial M}{\partial g}, \quad (18)$$

где $\partial M/\partial g$ – производная от коэффициента взаимной индукции по обобщённой координате. В этой связи следует отметить выражение для силы взаимодействия двух витков с токами I_1 и I_2 , приведённое в [11], а именно:

$$f_{12}=-I_1 I_2 \nabla M_{12},$$

где ∇M_{12} – градиент взаимной индуктивности коаксиальных контуров

$$M_{12} = \mu_0 (R_1 R_2)^{1/2} \frac{2}{k} \left[\left(1 - \frac{k^2}{2} \right) K(k) - E(k) \right],$$

являющейся видоизменением выражения (3).

Как показано в [9], электродинамическую силу между соленоидом длиной $2s$ с числом витков w_2 радиусом R_2 и витком радиусом R_1 , расположенным на расстоянии x от середины соленоида, можно рассчитать с помощью выражения:

$$F = -\mu_0 \frac{i_1 i_2 w_2}{2s_2 / R_2} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{1/2} [Q_{1/2}(g'_1) - Q_{1/2}(g'_2)], \quad (19)$$

где

$$g'_{1,2} = 1 + \frac{(g - s_2/R_2)^2 + (R_1/R_2 - 1)^2}{2R_1/R_2};$$

$$q = \frac{x}{R_2} > \frac{s_2}{R_2}. \quad (20)$$

При $i_1 = i_2 = i$; $R_1 = R_2 = R$; $s_2 = s$; $q = x/R$

$$F = -\mu_0 \frac{i^2 w}{2s/R} \left[Q_{1/2} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x-s}{R} \right)^2 \right) - Q_{1/2} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x+s}{R} \right)^2 \right) \right]. \quad (21)$$

При $\Delta z_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\frac{x-s}{R} \right)^2 \ll 0,5$ электродинамическую силу по (21) можно рассчитать по приближённой формуле:

$$Q_{1/2}(1 + \Delta z) = \frac{1 + \frac{3}{8} \Delta z}{2} \left[\ln \left(\frac{2 + \Delta z}{\Delta z} \right) - 1,2274 \right] + \frac{3}{8} \Delta z. \quad (22)$$

Тогда, полагая в примере $\frac{x-s}{R} = 0,1$, $s/R = 0,4$ (поэтому $x/R = 0,5$), имеем:

$$\Delta z_1 = 0,005; \quad \Delta z_2 = 0,405; \quad Q_{1/2}(1,005) = 2,3898 \text{ и}$$

$$Q_{1/2}(1,405) = \frac{1 + \frac{3}{8} \cdot 0,405}{2} \left[\ln \left(\frac{2,405}{0,405} \right) - 1,2274 \right] + \frac{3}{8} \cdot 0,405 \approx 0,4709.$$

В результате получаем:

$$F = -\mu_0 i^2 w \frac{1}{0,8} (0,4709 - 0,3896) = \mu_0 i^2 w 2,3983.$$

Полагая число витков в соленоиде $w = 100$ и $i = I \sin \omega t$, получаем

$$i^2 = I_m^2 \left(\frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \right) = I - I \cos 2\omega t,$$

где I – действующее значение тока, получаем при $I = 600$ А для постоянной составляющей силы притяжения следующее значение:

$$F_{\Pi} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{600^2 \cdot 100}{0,8} = 56,55 \text{ Н} \approx 5,7 \text{ кгс.}$$

Отметим, что выражение для силы взаимодействия соленоида и витка с токами, содержащее все три полных эллиптических интеграла, приведено в [2]. Это в определённой мере затрудняет её использование с учётом усложнения численной реализации, что следует из примеров в [12]. Изложенное показывает преимущество применения присоединённых функций Лежандра второго рода с полуцелым индексом как в отношении простоты, так и с точки зрения их численной реализации с учётом готовых табличных значений, приведенных в [13] и частично воспроизведённых в *Приложении 1*. Отметим также, что ряды для присоединённых сферических функций Лежандра $Q_{1/2}^m(1 + \Delta z)$ и $P_{1/2}^m(1 + \Delta z)$ при $\Delta z \leq 0,5$ даны в *Приложении 2* работы [14].

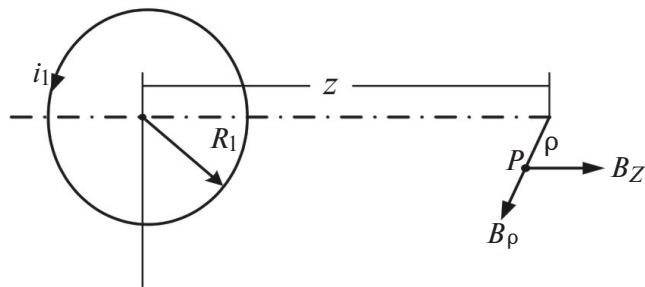


Рис. 2. Составляющие магнитной индукции

Запишем выражения для составляющих магнитной индукции в точке P с координатами z и ρ , известных по [1,15], которые с учётом обозначений (рис. 2) имеют вид:

$$B_z = \frac{\mu_0 i}{2\pi [(R_1 + \rho)^2 + z^2]^{1/2}} \left[\frac{R_1^2 - \rho^2 - z^2}{(R_1 - \rho)^2 + z^2} E(k) + K(k) \right]; \quad (23)$$

$$B_{\rho} = \frac{\mu_0 i z}{2\pi \rho [(R_1 + \rho)^2 + z^2]^{1/2}} \left[\frac{R_1^2 + \rho^2 + z^2}{(R_1 - \rho)^2 + z^2} E(k) - K(k) \right], \quad (24)$$

где i – ток в круговой петле радиусом R_1 ; z – расстояние до параллельной плоскости нахождения точки на расстоянии ρ от общей оси;

$$k^2 = 4R_1 \rho [(R_1 + \rho)^2 + z^2]^{-1}.$$

Приложение 1

$$(-1)^m Q_{n+\frac{1}{2}}^m(x)$$

x	$n=0; m=0$	$n=0; m=1$	x	$n=0; m=0$	$n=0; m=1$
1,0	∞	∞	5,6	0,0425474	0,06408153
1,1	0,978760	1,947114	5,7	0,0414106	0,062360
1,2	0,699555	1,25240	5,8	0,0403238	0,0607154
1,3	0,553649	0,944080	5,9	0,0392841	0,0591423
1,4	0,459794	0,761822	6,0	0,0382887	0,0576365
1,5	0,393175	0,639132	6,1	0,0373348	0,0561941
1,6	0,343018	0,550077	6,2	0,0364202	0,0548113
1,7	0,303724	0,482152	6,3	0,0355425	0,0534848
1,8	0,272040	0,428485	6,4	0,0346998	0,0522114
1,9	0,245923	0,384949	6,5	0,0338900	0,0509881
2,0	0,224014	0,348896	6,6	0,0331115	0,0498121
2,1	0,205373	0,318539	6,7	0,0323624	0,0486810
2,2	0,18932362	0,292629	6,8	0,0316413	0,0475923
2,3	0,175363	0,270260	6,9	0,0309468	0,0465439
2,4	0,163117	0,250757	7,0	0,0302774	0,04553375
2,5	0,152291	0,233610	7,1	0,0296319	0,0445597
2,6	0,142658	0,218422	7,2	0,0290092	0,0436202
2,7	0,134035	0,204883	7,3	0,0284080	0,0427134
2,8	0,126276	0,192742	7,4	0,0278275	0,0418378
2,9	0,119260	0,181800	7,5	0,0272665	0,0409918
3,0	0,112889	0,171891	7,6	0,0267242	0,0401742
3,1	0,107080	0,162880	7,7	0,0261997	0,0393835
3,2	0,10176	0,15465	7,8	0,0256923	0,0386185
3,3	0,0968869	0,1471170	7,9	0,0252010	0,0378782
3,4	0,0923943	0,14019	8,0	0,0247253	0,0371612
3,5	0,0882457	0,133804	8,1	0,0242644	0,0364668
3,6	0,0844045	0,127900	8,2	0,0238178	0,0357938
3,7	0,080839	0,122428	8,3	0,0233847	0,0351413
3,8	0,0775224	0,117343	8,4	0,0229646	0,034508
3,9	0,0744302	0,112609	8,5	0,0225570	0,0338946
4,0	0,0715413	0,108190	8,6	0,0221613	0,0332987
4,1	0,0688375	0,104058	8,7	0,0217771	0,0327202
4,2	0,0663021	0,100188	8,8	0,0214040	0,0321582
4,3	0,06392085	0,0965557	8,9	0,0210414	0,0316123
4,4	0,061680	0,0931412	9,0	0,0206889	0,0310817
4,5	0,0595697	0,0899265	9,1	0,0203462	0,0305658
4,6	0,0575780	0,0868952	9,2	0,0200129	0,0300641
4,7	0,0556961	0,0840329	9,3	0,0196886	0,0295760
4,8	0,0539157	0,0813264	9,4	0,0193731	0,0291010
4,9	0,0522291	0,0787641	9,5	0,0190658	0,0286387
5,0	0,0506295	0,0763353	9,6	0,0187667	0,0281885
5,1	0,0491107	0,0740302	9,7	0,0184753	0,0277500
5,2	0,0476671	0,0718402	9,8	0,0181913	0,0273228
5,3	0,0462935	0,0697573	9,9	0,0179146	0,0269065
5,4	0,0449851	0,0677742	10,0	0,0176449	0,0265007
5,5	0,0437377	0,0658843			

В [16] даны следующие видоизменения для составляющих магнитных индукций:

$$B_z = \frac{\mu_0 i}{2\pi} (\alpha^2 \beta)^{-1} [R_1^2 - \rho^2 - z^2] E(k) + \alpha^2 K(k); \quad (25)$$

$$B_\rho = \frac{\mu_0 i}{2\pi \rho} (\alpha^2 \beta)^{-1} [R_1^2 + \rho^2 + z^2] E(k) - \alpha^2 K(k); \quad (26)$$

где $\alpha^2 = R_1^2 + \rho^2 + z^2 - 2R_1\rho$, $\beta^2 = R_1^2 + \rho^2 + z^2 + 2R_1\rho$;

$$k^2 = 1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2}.$$

С учетом (26) могут быть записаны выражения компонент магнитной индукции и в декартовой системе координат. Компонента B_z остается без изменения.

Приложение 2. Было уже отмечено, что выбор знака для определения электродинамической силы в виде

$$f = \pm i_1 i_2 \nabla M,$$

полученной с применением различных специальных функций, следует учитывать при сопоставлении численных результатов, а также при определении связей между ними. Сравнивая, например, известные выражения для силы взаимодействия двух соосных круговых контуров радиусами R_1 и R_2 с токами i_1 и i_2 на расстоянии x между плоскостями их расположения (рис. 1), можно сопоставить два известных представления, внешне существенно различных, а именно,

$$f_x = \mu_0 i_1 i_2 \frac{x}{\sqrt{R_1 R_2}} \frac{Q_{1/2}^1(g)}{(g^2 - 1)^{1/2}}, \quad (П2-1)$$

где

$$g = 1 + \frac{x^2 + (R_2 - R_1)^2}{2R_1 R_2} = \frac{x^2 + R_1^2 + R_2^2}{2R_1 R_2}; \quad (П2-2)$$

$$f_x = \mu_0 i_1 i_2 \frac{x}{x^2 + (R_1 + R_2)^2} \left[-K + \frac{x^2 + R_1^2 + R_2^2}{x^2 + (R_1 - R_2)^2} E \right]; \quad (П2-3)$$

где, как и ранее, для модулей полных эллиптических интегралов имеем:

$$k^2 = \frac{4R_1 R_2}{x^2 + (R_2 - R_1)^2}; \quad (П2-4)$$

$$g = \frac{2 - k^2}{k^2}. \quad (П2-5)$$

Используя (П2-5), для (П2-1) можно записать:

$$f_x = \mu_0 i_1 i_2 \frac{x}{\sqrt{R_1 R_2}} \frac{Q_{1/2}^1(g)}{\sqrt{\left(\frac{2 - k^2}{k^2}\right)^2 - 1}} =$$

$$= \mu_0 i_1 i_2 \frac{x}{\sqrt{R_1 R_2}} \frac{k^2}{2\sqrt{1 - k^2}} Q_{1/2}^1(g) =$$

$$= \mu_0 i_1 i_2 \frac{x}{[x^2 + (R_1 + R_2)^2]^{1/2}} \frac{k^2}{\sqrt{1 - k^2}} Q_{1/2}^1(g). \quad (П2-6)$$

Отсюда ясно, что с учётом (П2-3) с точностью до знака справедливо равенство:

$$\frac{k}{\sqrt{1 - k^2}} Q_{1/2}^1(g) = -K + \frac{x^2 + R_1^2 + R_2^2}{x^2 + (R_1 - R_2)^2} =$$

$$= -K + \frac{2 - k^2}{2(1 - k^2)} E, \quad (П2-7)$$

из которого получаем связь между $Q_{1/2}^1(g)$, где

$$g = \frac{2 - k^2}{k^2},$$

и полными эллиптическими интегралами

первого и второго рода (с точностью до знака):

$$Q_{1/2}^1\left(\frac{2 - k^2}{k^2}\right) = -\frac{(1 - k^2)^{1/2}}{k} K + \frac{2 - k^2}{2k(1 - k^2)^{1/2}} E. \quad (П2-8)$$

Полагая $k^2 = 0,5$, согласно табличным значениям для $Q_{1/2}^1$, K и E [13,12] имеем: $Q_{1/2}^1(3) = -0,17189$; $K = 1,85407$; $E = 1,35064$.

Подстановка значений для K , E и k^2 в правую часть (П2-8) даёт $-1,85407 + 1,5 \cdot 1,35064 = 0,17189$. Отсюда вытекает корректировка знака для соотношения (П2-8):

$$Q_{1/2}^1(g) = \frac{(1 - k^2)^{1/2}}{k} K - \frac{2 - k^2}{2k(1 - k^2)^{1/2}} E. \quad (П2-9)$$

Предположим теперь для примера, что $k^2 = 0,25$, $k = 0,5$, тогда $Q_{1/2}^1(7) = -0,045534$. Для правой стороны с учётом того, что $K = 1,68575$ и $E = 1,46746$, подстановкой в (П2-9) получаем такой же результат:

$$2,919805 - 2,9653345 = -0,04553.$$

Выражением (П2-9) установлена связь между $Q_{1/2}^1$ и полными эллиптическими интегралами K и E .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **William R. Smythe.** Static and Dynamic Electricity. Third edition. Revised printing. Taylor and Francis, 1989, 623 p.
2. **Milan Wayne Garret.** Calculation of Field, Forces, and Mutual Inductances of Current systems by Elliptic integrals. — Journal of Applied Physics, 1963, vol. 34, No. 9, pp. 2567–2573.
3. **Simon Ramo, John R. Whinnery, Theodore Van Duzer.** Field and waves in communication electronics, 1993, 844 p.
4. **Gerard Hurley W. and Maeve C. Duffy.** Calculation of self- and mutual impedances in planar sandwich inductors. — IEEE Trans. on Magnetics, 1997, vol. 33, No. 3, pp. 2282–2290.
5. **Clayton Paul R.,** Inductance: Loop and Partial. New-York: Wiley, 2011. 379 p.

6. Демирчян К.С., Нейман Л.Р., Коровкин Н.В., Чечурин В.Л. Теоретические основы электротехники: Учебник для вузов, СПб.: Питер, 2003, т. 3, 377 с.

7. Калантаров П.Л., Цейтлин Л.А. Расчёт индуктивностей: Справочная книга. Л.: Энергоатомиздат, 1986, 488 с.

8. Уэйт Д.Р. Электромагнитное излучение из цилиндрических систем/Пер. с англ. М.: Советское радио, 1963, 238 с.

9. Цицикян Г.Н. Взаимные индуктивности и силы взаимодействий соосных контуров, соленоидов и катушек. — Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1985, № 6, с. 90–100.

10. Ганичев Г.А., Цицикян Г.Н. Электромагнитное поле цилиндрической катушки, экранированной плоским проводящим слоем. — Электричество, 1972, № 8, с. 6–10.

11. Marc T. Thompson. Inductance calculation Techniques. Part 2. Approximation and handbook methods. Power control and intelligent motion. December 1999, pp. 1–11 [Электрон. ресурс] website <http://www.pcim.com>. (Дата обращения 11.02.2019).

12. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами/Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979.

13. Таблицы присоединённых функций Лежандра. М.: ВЦ АН СССР, 1965, вып. 26.

14. Цицикян Г.Н. Векторный потенциал поля медленно движущихся тел в приложении к задачам электродинамической левитации. — Изв. РАН. Энергетика, 1994, № 4, с.130–144.

15. Ki-Bong Kim, Enrico Levi, Zivan Zabar, Leo Birenbaun. Restoring Force between two noncoaxial circular coils. — IEEE Trans. on Magnetics, 1996, vol. 32, No. 2, pp. 478–484.

16. Simpsons J., Lane J., Immer C., Youngquist R. Simple analytic expressions for the magnetic field of a circular current loop. NASA technical documents, 2001.

[04.02.2019]

А в т о р: Цицикян Георгий Николаевич окончил в 1963 г. Ереванский политехнический институт. Докторскую диссертацию защитил в 1990 г. Зам. начальника отдела, ученый секретарь НТС филиала ЦНИИ СЭТ ФГУП «Крыловский государственный научный центр».

Elektrichestvo, 2019, No. 6, pp. 59–65

DOI:10.24160/0013-5380-2019-6-59-65

About the Mutual Induction Coefficients and Interaction Forces in Circular Coaxial Loops

TSITSIKYAN Georgiy N. (*Branch of the Central Scientific Research Institute of Ship Electrical Engineering and Technology Krylov State Scientific Centre, St. Petersburg, Russia*) — Deputy Head of Department, Academic secretary of Scientific and Technical Council, Dr. Sci. (Eng.)

An analysis of the literature suggesting expressions for mutual inductances and interaction forces in circular coaxial loops with current in parallel planes may lead to conclusions lacking strict uniqueness. These literary sources [1–10] are quite diverse in nature, and expressions with full elliptical integrals, including their numerical realization, occupy a significant place in them. The article considers alternative expressions for the mutual induction coefficients and interaction forces between circular coaxial loops. The advantage of using these expressions with the associated second-kind Legendre functions with a semi-integer index for numerical realization is shown.

Key words: *mutual induction coefficients, coaxial loops, interaction forces, alternative expressions*

REFERENCES

1. William R. Smithe. Static and Dynamic Electricity. Third edition. Revised printing. Taylor and Francis, 1989, 623 p.

2. Milan Wayne Garret. Calculation of Field, Forces, and Mutual Inductances of Current systems by Elliptic integrals. — Journal of Applied Physics, 1963, vol. 34, No. 9, pp. 2567–2573.

3. Simon Ramo, John R. Whinnery, Teodore Van Duzer. Field and waves in communication electronics, 1993, 844 p.

4. Gerard Hurley W. and Maeve C. Duffy. Calculation of self- and mutual impedances in planar sandwich inductors. — IEEE Trans. on Magnetics, 1997, vol. 33, No. 3, pp. 2282–2290.

5. Clayton Paul R., Inductance: Loop and Partial. New-York: Wiley, 2011. 379 p.

6. Demirchyan K.S., Neyman L.R., Korovkin N.V., Chechurin V.L. *Teoreticheskiye osnovy elektrotehniki* (Theoretical principles of electrical engineering). St. Petersburg, Piter, 2003, vol. 3, 377 p.

7. Kalantarov P.L., Tseytlin L.A. *Raschet inguktivnostey* (Calculation of inductances). Leningrad, Energoatomizdat, 1986, 488 p.

8. Ueyt D.R. *Elektromagnitnoe izlucheniye iz tsilindricheskikh sistem/Per. s angl.* (Electromagnetic radiation from cylindrical systems/Trans. from English). Moscow, Sovetskoe radio, 1963, 238 p.

9. Tsitsikyan G.N. *Izv. AN SSSR. Energetika i transport — in Russ.* (News of the USSR Academy of Sciences. Power Engineering and Transport), 1985, No. 6, pp. 90–100.

10. Ganichev G.A., Tsitsikyan G.N. *Elektrichestvo — in Russ.* (Electricity), 1972, No. 8, pp. 6–10.

11. Marc T. Thompson. Inductance calculation Techniques. Part 2. Approximation and handbook methods. Power control and intelligent motion. December 1999, pp. 1–11 [Electron. Resurs] website <http://www.pcim.com>. (Data obrashsheniya 11.02.2019).

12. *Spravochnik po spetsial'nym funktsiyam s formulami, grafikami i matematicheskimi tablitsami/ Pod red. M. Abramovitsa i I. Stigan* (Handbook of special functions with formulas, graphs and mathematical tables/Edit. by M. Abramovits and I. Stigan). Moscow, Nauka, 1979.

13. *Tablitsy prisoedinennykh funktsiy Lezhandra* (Tables of associated Legendre functions). Moscow, Computing Center of the USSR Academy of Sciences, 1965, iss. 26.

14. Tsitsikyan G.N. *Izv. RAN. Energetika — in Russ.* (News of Russian Academy of Sciences), 1994, No. 4, pp.130–144.

15. Ki-Bong Kim, Enrico Levi, Zivan Zabar, Leo Birenbaun. Restoring Force between two noncoaxial circular coils. — IEEE Trans. on Magnetics, 1996, vol. 32, No. 2, pp. 478–484.

16. Simpsons J., Lane J., Immer C., Youngquist R. Simple analytic expressions for the magnetic field of a circular current loop. NASA technical documents, 2001.

[04.02.2019]