

Перерасчет токов нагрузок активного многополюсника с изменяемыми параметрами на основе проективной геометрии

ПЕНИН А.А.

В рассматриваемой задаче перерасчета токов нагрузок при изменении параметров активного многополюсника постоянного тока используется подход на основе проективной геометрии для интерпретации изменений или «кинематики» режимов, что позволяет предложить формулы перерасчета токов нагрузок при изменении их проводимостей в виде проективных преобразований, которые обладают групповыми свойствами. Это устраняет недостатки традиционного подхода, основанного на введении изменений сопротивлений в виде приращений, когда при перерасчете цепи и ряде (или группе) изменений этих сопротивлений приращения приходится отсчитывать относительно исходной цепи. В предложенном же подходе изменения элементов вводятся иным образом, в отличие от как бы очевидных изменений в виде приращений, которые являются формальными и не отражают наблюдаемые взаимовлияния: сопротивление — ток. Полученные результаты могут быть полезны в учебных целях, так как предложенный для электрических цепей математический аппарат широко применяется в других областях науки.

Ключевые слова: активный многополюсник, постоянный ток, нагрузки, изменяемые параметры, перерасчет токов, проективные координаты

В системах автономного электропитания, например постоянного тока, содержащих источник питания конечной мощности и некоторое число резистивных нагрузок с изменяемыми значениями сопротивлений, отмечается взаимовлияние этих нагрузок. Поэтому одной из задач анализа таких систем (многополюсников) является получение формул перерасчета токов нагрузок. Близким к подобной задаче является перерасчет токов уже заданных нагрузок при изменении параметров этого многополюсника.

В теории электрических цепей определенное внимание уделяется расчетам цепей с изменяемыми параметрами элементов. В частности, в учебниках приводятся линейные соотношения между токами (напряжениями) в двух ветвях цепи при изменении сопротивления в любой другой ветви и излагается теорема вариации, которая связывает изменение тока и приращение сопротивления в той же или разных ветвях [1]. Известны также публикации, в которых рассматривается теорема ва-

The problem of recalculating load currents when changes occur in the parameters of an active DC multipole is solved using an approach based on projective geometry for interpreting the changes or «kinematics» of operating modes. With such an approach, it becomes possible to suggest formulas for recalculating load currents when changes occur in their conductances in the form of projective transformations that have group properties. The proposed procedure is free from the drawbacks of the traditional approach, in which the changes of resistances are introduced in the form of increments. As a result, in recalculating a circuit when a number (a group) of changes occur in these resistances, the increments have to be referred with respect to the initial circuit. In the proposed approach, changes of elements are introduced in another way unlike the seemingly obvious changes in the form of increments, which are formal in nature and do not reflect the observed mutual influence between the resistances and currents. The obtained results can be useful for education purposes, because the mathematical technique proposed for electrical circuits is widely used in other fields of science.

Key words: active multipole, direct current, loads, variable parameters, recalculation of currents, projective coordinates

риации для произвольного числа изменяемых сопротивлений [2–4]. При перерасчете цепи в связи с рядом изменений значений сопротивлений приращения отсчитываются относительно исходной цепи. Невыполнение групповых свойств ограничивает возможности теоремы вариации, особенно в случае сопоставления режимов разных цепей, задания эквивалентных режимов или их изменений.

В ряде статей автора развивается подход к интерпретации изменений или «кинематики» режимов на основе проективной геометрии [5–7]. В частности, получены формулы перерасчета токов нагрузок при изменении проводимостей последних в виде проективных преобразований, которые обладают групповыми свойствами. Это позволяет выразить конечные значения токов через промежуточные изменения токов и проводимостей. Изменения элементов вводятся иным образом в отличие от якобы очевидных изменений в виде приращений, которые являются формальными и не отражают

суть наблюдаемых взаимовлияний: сопротивление—ток.

Поэтому естественно применить проективные преобразования для перерасчета токов заданных нагрузок при изменении значений проводимостей или параметров активного многополюсника, что и составляет содержание данного исследования. Для упрощения поставленной задачи рассмотрим активный четырехполюсник с проводимостями нагрузок Y_{H1}, Y_{H2} и изменяемыми проводимостями y_N, y_{0N} на рис. 1. Указанные проводимости могут входить, соответственно, в состав буферной (или третьей) нагрузки и внутренней проводимости источника напряжения U_0 .

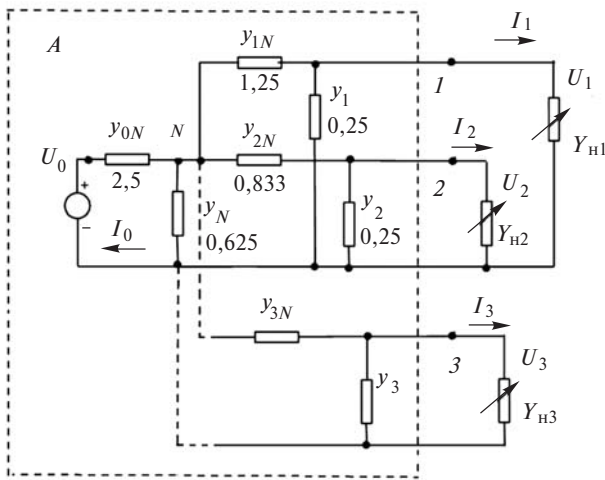


Рис. 1. Активный четырехполюсник с изменяемыми проводимостями нагрузок Y_{H1}, Y_{H2}

Проективные координаты активного четырехполюсника. Изменение проводимостей нагрузок. Запишем необходимые соотношения, полученные в [7]. С учетом указанных токов на рис. 1 четырехполюсник будет описываться через Y -параметры следующей системой:

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{12} & -Y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_1^{SC} \\ I_2^{SC} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где I_1^{SC}, I_2^{SC} – токи КЗ обеих нагрузок.

С учетом того, что $U_1 = I_1 / Y_{H1}, U_2 = I_2 / Y_{H2}$, из системы (1) получаются уравнения двух пучков прямых линий – $(I_1, I_2, Y_{H1})=0, (I_1, I_2, Y_{H2})=0$ с параметрами Y_{H1}, Y_{H2} (рис. 2). Пучку прямых с параметром Y_{H1} соответствует центр пучка в точке G_2 . Физически центр пучка соответствует такому характерному режиму нагрузки Y_{H1} , который не зависит от её значений. Это выполняется при $I_1=0$ за счет выбора параметров второй нагрузки, которые обозначим как $I_2 = I_2^{G2}, Y_{H2} = Y_{H2}^{G2}$.

Аналогично выражаются параметры центра G_1 второй нагрузки: I_1^{G1}, Y_{H1}^{G1} .

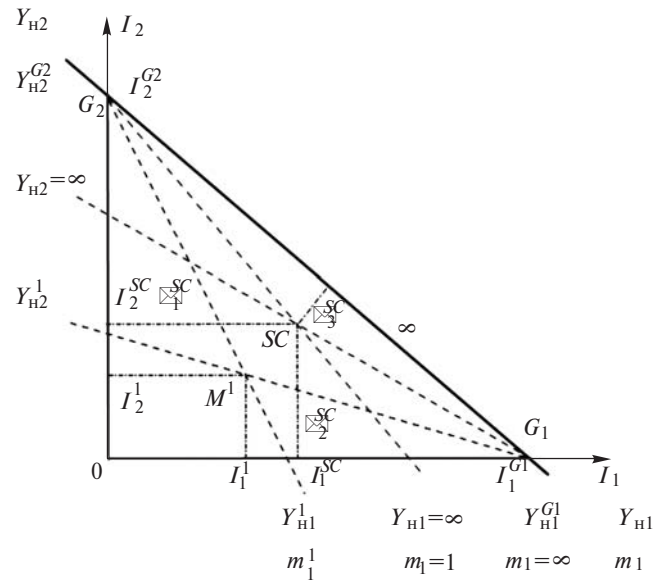


Рис. 2. Пучки нагрузочных прямых линий с параметрами Y_{H1}, Y_{H2}

Пусть текущий или исходный режим соответствует точке M^1 , которая задается значениями нагрузок Y_{H1}^1, Y_{H2}^1 и токов I_1^1, I_2^1 . Также эта точка определяется проективными неоднородными m_1^1, m_2^1 и однородными координатами $\xi_1^1, \xi_2^1, \xi_3^1$, которые задаются координатным треугольником $G_1 0 G_2$ и единичной точкой SC . Точка 0 соответствует началу координат, а прямая $G_1 G_2$ является бесконечно удаленной прямой.

Неоднородная проективная координата m_1^1 задаётся сложным отношением четырех точек:

$$m_1^1 = (0 Y_{H1}^1 \infty Y_{H1}^{G1}) = \frac{Y_{H1}^1}{Y_{H1}^1 - Y_{H1}^{G1}} \div \frac{\infty - 0}{\infty - Y_{H1}^{G1}} = \frac{Y_{H1}^1}{Y_{H1}^1 - Y_{H1}^{G1}}. \quad (2)$$

Крайним или базовым значениям соответствуют $Y_{H1} = 0, Y_{H1} = Y_{H1}^{G1}$. Точка $Y_{H1} = \infty$ является единичной. На рис. 2 показаны значения m_1 . Для точки $Y_{H1}^1 = Y_{H1}^{G1}$ проективная координата $m_1 = \infty$, что определяет смысл бесконечно удаленной прямой $G_1 G_2$.

Аналогично получается сложное отношение для проективной координаты m_2^1 .

Отношение однородных проективных координат задают неоднородные координаты:

$$m_1 = \frac{\xi_1}{\xi_3} = \frac{\rho \xi_1}{\rho \xi_3}; \quad m_2 = \frac{\xi_2}{\xi_3} = \frac{\rho \xi_2}{\rho \xi_3}, \quad (3)$$

где ρ – коэффициент пропорциональности.

Однородные координаты определяются через отношение расстояний точек M^1, SC до сторон координатного треугольника:

$$\begin{aligned} \rho \xi_1^1 &= \frac{\delta_1^1}{\delta_1^{SC}} = \frac{I_1^1}{I_1^{SC}}, \quad \rho \xi_2^1 = \frac{\delta_2^1}{\delta_2^{SC}} = \frac{I_2^1}{I_2^{SC}}, \\ \rho \xi_3^1 &= \frac{\delta_3^1}{\delta_3^{SC}} = \frac{I_3^1}{I_3^{SC}}; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\mu_3 \delta_3^{SC} = \left(\frac{I_1^{SC}}{I_1^{G1}} + \frac{I_2^{SC}}{I_2^{G2}} - 1 \right),$$

$$\mu_3 \delta_3^1 = \left(\frac{I_1^1}{I_1^{G1}} + \frac{I_2^1}{I_2^{G2}} - 1 \right) = \mu_3 \delta_3^1, \quad (5)$$

где μ_3 – нормирующий множитель.

Тогда однородные координаты можно представить в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \rho \xi_1 \\ \rho \xi_2 \\ \rho \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{I_1^{SC}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_2^{SC}} & 0 \\ \frac{1}{I_1^{G1} \mu_3 \delta_3^{SC}} & \frac{1}{I_2^{G2} \mu_3 \delta_3^{SC}} & -\frac{1}{\mu_3 \delta_3^{SC}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ 1 \end{pmatrix} = [C][I]. \quad (6)$$

Обратное преобразование имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \rho I_1 \\ \rho I_2 \\ \rho I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1^{SC} & 0 & 0 \\ 0 & I_2^{SC} & 0 \\ \frac{I_1^{SC}}{I_1^{G1}} & \frac{I_2^{SC}}{I_2^{G2}} & -\mu_3 \delta_3^{SC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = [C]^{-1}[\xi]. \quad (7)$$

Отсюда переходим к токам:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\rho I_1}{\rho_1} = \frac{I_1^{SC} m_1}{\frac{I_1^{SC}}{I_1^{G1}} m_1 + \frac{I_2^{SC}}{I_2^{G2}} m_2 - \mu_3 \delta_3^{SC}}; \\ I_2 &= \frac{\rho I_2}{\rho_2} = \frac{I_2^{SC} m_2}{\frac{I_1^{SC}}{I_1^{G1}} m_1 + \frac{I_2^{SC}}{I_2^{G2}} m_2 - \mu_3 \delta_3^{SC}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Пусть теперь режим изменился, что соответствует переходу $M^1 \rightarrow M^2$ на рис. 3. Точка M^2 (далее – последующий режим) определяется нагрузками Y_{H1}^2, Y_{H2}^2 и токами I_1^2, I_2^2 . Неоднородные координаты определяются аналогично (2). Изменение режима, естественно, выражается через сложные отношения:

$$\begin{aligned} m_1^{21} &= (0 Y_{H1}^2 Y_{H1}^1 Y_{H1}^{G1}) = \frac{Y_{H1}^2 - 0}{Y_{H1}^2 - Y_{H1}^{G1}} : \frac{Y_{H1}^1 - 0}{Y_{H1}^1 - Y_{H1}^{G1}} = \\ &= m_1^2 : m_1^1; \end{aligned} \quad (9)$$

$$m_2^{21} = (0 Y_{H2}^2 Y_{H2}^1 Y_{H2}^{G2}).$$

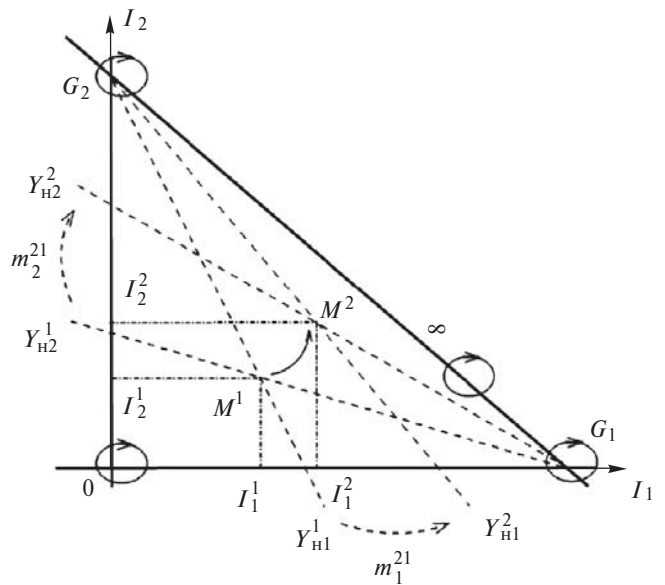


Рис. 3. Изменение режима $M^1 \rightarrow M^2$ из-за изменения проводимостей нагрузок Y_{H1}, Y_{H2}

Выражения (9) можно интерпретировать как относительные изменения проводимостей нагрузок, а величины Y_{H1}^{G1}, Y_{H2}^{G2} являются масштабами для нормирования значений проводимостей нагрузок. Однородные координаты точки M^2 выражаются аналогично (4), а токи определяются по выражениям (8). С учетом (9) представим m_1^2 и m_2^2 в виде:

$$m_1^2 = m_1^{21} \frac{\xi_1^1}{\xi_3^1}; \quad m_2^2 = m_2^{21} \frac{\xi_2^1}{\xi_3^1},$$

тогда ток

$$I_1^2 = \frac{(I_1^{SC} m_1^{21}) \xi_1^1 / \xi_3^1}{\left(\frac{I_1^{SC}}{I_1^{G1}} m_1^{21} \right) \frac{\xi_1^1}{\xi_3^1} + \left(\frac{I_2^{SC}}{I_2^{G2}} m_2^{21} \right) \frac{\xi_2^1}{\xi_3^1} - \mu_3 \delta_3^{SC}}$$

и с учетом выражения (7) имеем:

$$\begin{pmatrix} \rho I_1^2 \\ \rho I_2^2 \\ \rho I^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1^{SC} m_1^{21} & 0 & 0 \\ 0 & I_2^{SC} m_2^{21} & 0 \\ \frac{I_1^{SC}}{I_1^{G1}} m_1^{21} & \frac{I_2^{SC}}{I_2^{G2}} m_2^{21} & -\mu_3 \delta_3^{SC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^1 \\ \xi_2^1 \\ \xi_3^1 \end{pmatrix}$$

Используя (6), получим результирующее преобразование как произведение двух матриц:

$$\begin{pmatrix} \rho I_1^2 \\ \rho I_2^2 \\ \rho I^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1^{21} & 0 & 0 \\ 0 & m_2^{21} & 0 \\ \frac{1}{I_1^{G1}}(m_1^{21}-1) & \frac{1}{I_2^{G2}}(m_2^{21}-1) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1^1 \\ I_2^1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

откуда переходим к искомым токам:

$$I_1^2 = \frac{I_1^1 m_1^{21}}{\frac{I_1^1(m_1^{21}-1)}{I_1^{G1}} + \frac{I_2^1(m_2^{21}-1)}{I_2^{G2}} + 1};$$

$$I_2^2 = \frac{I_2^1 m_2^{21}}{\frac{I_1^1(m_1^{21}-1)}{I_1^{G1}} + \frac{I_2^1(m_2^{21}-1)}{I_2^{G2}} + 1}. \quad (11)$$

Полученные соотношения позволяют провести перерасчет токов при соответствующем изменении проводимостей нагрузок. Выражение (11) – как проективное преобразование с параметрами m_1^{21} , m_2^{21} , позволяет перевести любые исходные точки плоскости I_1, I_2 в новое положение, как показано стрелками на рис. 3, где указаны неподвижные точки и прямые линии, которые отмечены овалами со стрелками. Как уже отмечалось, эти соотношения обладают групповыми свойствами. Пусть режим ещё раз изменился, т.е. получили значения изменений m_1^{32}, m_2^{32} . Тогда конечное значение режима: $m_1^3 = m_1^{32} m_1^{21} = m_1^{32} m_1^{21} m_1^1 = m_1^{31} m_1^1$, $m_2^3 = m_2^{31} m_2^1$. Используя (10), можем записать результирующее преобразование с параметрами m_1^{32}, m_2^{32} .

Полученные результаты позволяют исследовать влияние изменения проводимостей y_{0N}, y_N на значение тока нагрузок.

Изменение проводимости y_N как проективное преобразование на плоскости. Пусть в исходной цепи изменилось значение проводимости $y_N \rightarrow \bar{y}_N$. Изменение исходного режима и характерных режимов показано на рис. 4, сравнение которого с рис. 3 позволяет сделать вывод, что влия-

ние проводимости y_N можно интерпретировать как проективное преобразование плоскости I_1, I_2 . Расчеты показывают, что координаты точек G_1, G_2 не зависят от этого элемента. Поэтому прямая линия $G_1 G_2$ является неподвижной. Точка 0, соответствующая режиму х.х., также не зависит от этого элемента. Изменяются координаты точки КЗ $SC \rightarrow \bar{SC}$ и текущей точки $M^1 \rightarrow \bar{M}^1$ при тех же значениях проводимостей нагрузок. Задача сводится к нахождению проективного преобразования типа (10), (11), которое будет связывать исходные токи I_1^1, I_2^1 с новыми значениями \bar{I}_1^1, \bar{I}_2^1 .

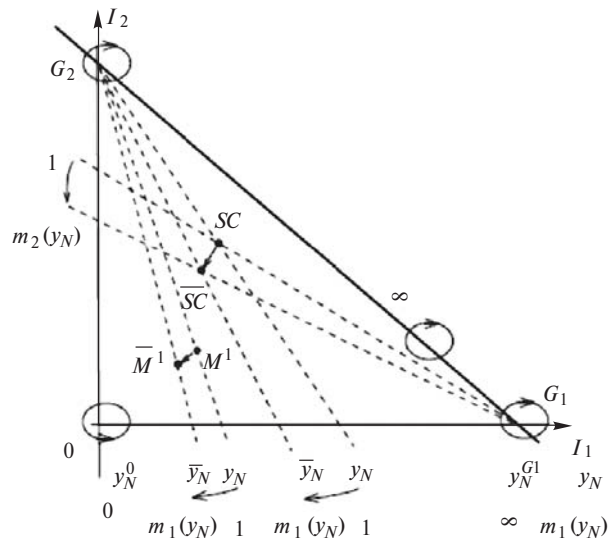


Рис. 4. Изменение режима из-за изменения проводимости y_N ; величина $m_1(y_N)$ является сложным отношением последующих точек SC, M^1 относительно исходных SC, M^1

Неизменный координатный треугольник $G_1 0 G_2$ и новая единичная точка \bar{SC} образуют уже другую проективную систему координат, в которой точка \bar{M}^1 сохраняет исходные проективные координаты (проективные координаты точки M^1), так как задаются проводимостями нагрузок относительно таких характерных величин, как Y_{n1}^{G1}, Y_{n2}^{G1} , которые не зависят от y_3 , т.е. $[\bar{\rho} \bar{\xi}^1] = [\xi^1]$. С учетом (6) получим $[\bar{\rho} \bar{\xi}] = [\bar{C}][\bar{I}]$, $[\rho \xi] = [C][I]$. Искомое преобразование получается как произведение двух матриц, т.е. $[\rho \bar{I}] = [\bar{C}]^{-1} [C][I] = [J][I]$. Матрица $[\bar{C}]^{-1}$ имеет вид (7). Результирующая матрица

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{11} & 0 & 0 \\ 0 & J_{22} & 0 \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

где $J_{11} = \frac{\bar{I}_1^{SC}}{I_1^{SC}}; J_{22} = \frac{\bar{I}_2^{SC}}{I_2^{SC}}; J_{33} = \frac{\bar{\delta}_3^{SC}}{\delta_3^{SC}};$

$$J_{31} = \frac{\bar{\delta}_3^{SC}}{\delta_3^{SC} I_1^{G1}} \left(\frac{\bar{I}_1^{SC} \delta_3^{SC}}{I_1^{SC} \bar{\delta}_3^{SC}} - 1 \right);$$

$$J_{32} = \frac{\bar{\delta}_3^{SC}}{\delta_3^{SC} I_2^{G2}} \left(\frac{\bar{I}_2^{SC} \delta_3^{SC}}{I_2^{SC} \bar{\delta}_3^{SC}} - 1 \right).$$

Из структуры элементов матрицы $[J]$ видно, что все компоненты матрицы можно разделить на величину $J_{33} = \bar{\delta}_3^{SC} / \delta_3^{SC}$, которая учитывается коэффициентом пропорциональности ρ . Тогда получается матрица преобразования в виде:

$$[J] = \begin{pmatrix} \frac{\bar{I}_1^{SC} \delta_3^{SC}}{I_1^{SC} \bar{\delta}_3^{SC}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\bar{I}_2^{SC} \delta_3^{SC}}{I_2^{SC} \bar{\delta}_3^{SC}} & 0 \\ \frac{\bar{I}_1^{SC} \delta_3^{SC}}{I_1^{SC} \bar{\delta}_3^{SC}} - 1 & \frac{\bar{I}_2^{SC} \delta_3^{SC}}{I_2^{SC} \bar{\delta}_3^{SC}} - 1 & 1 \\ I_1^{G1} & I_2^{G2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Из этого выражения следует, что величины $m_1(y_N)$, $m_2(y_N)$, где

$$m_1(y_N) = \frac{\bar{I}_1^{SC} \delta_3^{SC}}{I_1^{SC} \bar{\delta}_3^{SC}}; \quad m_2(y_N) = \frac{\bar{I}_2^{SC} \delta_3^{SC}}{I_2^{SC} \bar{\delta}_3^{SC}} \quad (13)$$

определяют параметры преобразования $y_N \rightarrow \bar{y}_N$. Поэтому преобразование примет окончательный вид:

$$\begin{pmatrix} \rho \bar{I}_1 \\ \rho \bar{I}_2 \\ \rho 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1(y_N) & 0 & 0 \\ 0 & m_2(y_N) & 0 \\ \frac{m_1(y_N) - 1}{I_1^{G1}} & \frac{m_2(y_N) - 1}{I_2^{G2}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Выясним смысл параметров $m_1(y_N)$, $m_2(y_N)$. Для этого рассмотрим структуру выражения неоднородных проективных координат (2). Поэтому выражение (13) для $m_1(y_N)$ можно рассматривать как неоднородную координату:

$$m_1(y_N) = \frac{\bar{I}_1^{SC} \delta_3^{SC}}{I_1^{SC} \bar{\delta}_3^{SC}} = \frac{\bar{I}_1^{SC}}{\delta_3^{SC}} : \frac{I_1^{SC}}{\bar{\delta}_3^{SC}} = \bar{\xi}_3^1 : \xi_3^1.$$

Следовательно, параметр $m_1(y_N)$ является сложным отношением проводимостей y_N , \bar{y}_N как координат новой точки \bar{SC} и исходной точки SC , базовыми значениями проводимостей для этого сложного отношения являются y_N^0 , y_N^{G1} , что пока-

зано на рис. 4. Аналогичное сложное отношение можно составить для токов \bar{I}_1^1 , I_1^1 как координат новой и исходной точек. Значение y_N^0 определяет $I_1=0$, что физически соответствует замыканию, когда $y_N^0 = \infty$. Значение y_N^{G1} определяет ток $I_1 = I_1^{G1}$, а ток $I_2 = 0$. Из выражения (14) получаем преобразование для тока I_1 :

$$\bar{I}_1 = \frac{I_1 m_1(y_N)}{\frac{I_1}{I_1^{G1}} [m_1(y_N) - 1] + \frac{I_2}{I_2^{G2}} [m_2(y_N) - 1] + 1}.$$

Рассмотрим случай, когда $I_2 = 0$. Тогда получается преобразование точек $I_1 \rightarrow \bar{I}_1$ на прямой линии (ось тока I_1):

$$\bar{I}_1 = \frac{I_1 m_1(y_N)}{\frac{I_1}{I_1^{G1}} [m_1(y_N) - 1] + 1}. \quad (15)$$

Неподвижными точками (значения токов $I_1 = \bar{I}_1$) являются $I_1 = 0$, $I_1 = I_1^{G1}$. Физически это связано с тем, что эти значения тока не зависят от y_N . Сложное отношение для разных исходных точек составляется формализованно относительно неподвижных точек:

$$m_1(y_N) = (0 \bar{I}_1 I_1^{G1}) = \frac{\bar{I}_1 - 0}{\bar{I}_1 - I_1^{G1}} \div \frac{I_1 - 0}{I_1 - I_1^{G1}} = (0 \bar{I}_1^{SC} I_1^{SC} I_1^{G1}). \quad (16)$$

Таким образом, на прямой линии происходит движение отрезка, проективная «длина» которого не зависит от выбора текущей точки. Выразим явно $m_1(y_N)$ через y_N и \bar{y}_N уже для общего случая. Для этого надо раскрыть выражение (13). Определим отношение токов КЗ, используя выражение (1) для значения \bar{y}_N . Так как токи КЗ равны соответственно

$$\bar{I}_1^{SC} = U_0 y_{0N} \frac{y_{1N}}{\bar{y}_\Sigma}, \quad I_1^{SC} = U_0 y_{0N} \frac{y_{1N}}{y_\Sigma},$$

$$y_\Sigma = y_{0N} + y_N + y_{1N} + y_{2N},$$

$$\bar{y}_\Sigma = y_{0N} + \bar{y}_N + y_{1N} + y_{2N},$$

то отношение

$$\frac{\bar{I}_1^{SC}}{I_1^{SC}} = \frac{y_\Sigma}{\bar{y}_\Sigma} = \frac{y^{ser} + y_N}{y^{ser} + \bar{y}_N}, \quad y^{ser} = y_{0N} + y_{1N} + y_{2N}.$$

Отношение расстояний точек КЗ до прямой $G_1 G_2$ с учетом (5) будет иметь вид

$$\frac{\bar{\delta}_3^{SC}}{\delta_3^{SC}} = \frac{y^{ser} + y_N y^i(y_N) - \bar{y}_N}{y^{ser} + \bar{y}_N y^i(y_N) - y_N},$$

$$y^i(y_N) = \left(\frac{y_1 y_{1N}}{y_1 + y_{1N}} + \frac{y_2 y_{2N}}{y_2 + y_{2N}} + y_{0N} \right).$$

Тогда

$$m_1(y_N) = \frac{y^i(y_N) - y_N}{y^i(y_N) - \bar{y}_N}.$$

Таким образом, получено дробно-линейное выражение, которое можно представить в виде сложного выражения типа (16):

$$m_1(y_N) = (\infty \bar{y}_N y_N y^i(y_N)) = \frac{\bar{y}_N - \infty}{\bar{y}_N - y^i(y_N)} \div \frac{y_N - \infty}{y_N - y^i(y_N)}. \quad (17)$$

Величину $m_1(y_N)$ можно интерпретировать как относительное изменение проводимости y_N . Физически величину $y^i(y_N)$ можно интерпретировать как внутреннюю проводимость всей цепи относительно проводимости y_N с противоположным знаком при отключенных нагрузках. Если $y_N = y^i(y_N)$, то токи I_1, I_2 задают точки на прямой $G_1 G_2$ для всех значений нагрузок. Это связано с тем, что определитель матрицы Y -параметров (1) равен нулю.

Пример. Параметры исходного режима:

$$Y_{n1}^1 = 0,5; \quad Y_{n2}^1 = 0,5; \quad y_N = 0,625; \quad I_1^1 = 0,979;$$

$$I_2^1 = 0,8247; \quad I_1^{SC} = 3; \quad I_2^{SC} = 2; \quad \delta_3^{SC} = -0,677 / \mu_3.$$

Параметры последующего режима:

$$\bar{y}_N = 1,25; \quad \bar{I}_1^1 = 0,8465; \quad \bar{I}_2^1 = 0,713; \quad \bar{I}_1^{SC} = 2,679;$$

$$\bar{I}_2^{SC} = 1,785; \quad \bar{\delta}_3^{SC} = -0,7116 / \mu_3.$$

Параметры преобразования (14): $m_1(y_N) = 0,84937; m_2(y_N) = 0,84937.$

Само преобразование (14) будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} \rho \bar{I}_1 \\ \rho \bar{I}_2 \\ \rho 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,84937 & 0 & 0 \\ 0 & 0,84937 & 0 \\ -0,01 & -0,009262 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Изменение проводимости y_{0N} . Пусть в цепи на рис. 1 изменилось значение проводимости $y_{0N} \rightarrow \bar{y}_{0N}$. Изменение исходного режима и характерных режимов показано на рис. 5. Также полагаем, что изменение проводимости y_{0N} определяет проективное преобразование плоскости $I_1 I_2$. Координаты точек G_1, G_2 согласно (4), (5) пропорциональны величине этого элемента. Поэтому пря-

мая $\bar{G}_1 \bar{G}_2$ параллельна исходной прямой $G_1 G_2$, а значения проводимостей Y_{n1}^{G1}, Y_{n2}^{G2} не меняются. Изменяются координаты точки КЗ $SC \rightarrow \bar{SC}$ и текущей точки $M^1 \rightarrow \bar{M}^1$ при тех же значениях проводимостей нагрузок. Рассмотрим неподвижные точки и прямые – это точка 0 и прямая $S_1 S_2$, что физически соответствует току $I(y_{0N}) = 0$ благодаря вы-

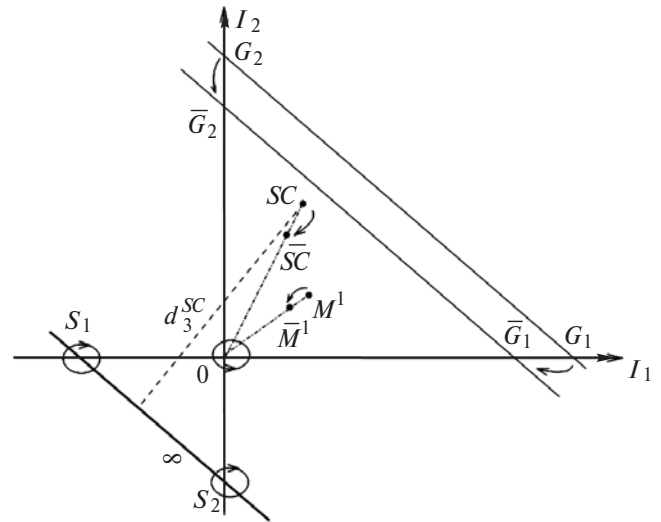


Рис. 5. Изменение режима за счет изменения проводимости y_{0N}

бору соотношения токов I_1, I_2 . Уравнение прямой $S_1 S_2$:

$$\frac{y_{1N}}{y_1 + y_{1N}} I_1 + \frac{y_{2N}}{y_2 + y_{2N}} I_2 - y^i(y_{0N}) U_0 = 0.$$

Внутренняя проводимость всей цепи $y^i(y_{0N})$ относительно элемента y_{0N} при отключенных нагрузках равна:

$$y^i(y_{0N}) = y_N + \frac{y_1 y_{1N}}{y_1 + y_{1N}} + \frac{y_2 y_{2N}}{y_2 + y_{2N}}.$$

В нормированном виде уравнение прямой $S_1 S_2$ имеет вид

$$\frac{I_1}{I_1^{S1}} + \frac{I_2}{I_2^{S2}} - 1 = 0,$$

где координаты точек S_1, S_2 равны соответственно:

$$I_1^{S1} = -U_0 y^i(y_{0N}) \left(1 + \frac{y_1}{y_{1N}} \right);$$

$$I_2^{S2} = -U_0 y^i(y_{0N}) \left(1 + \frac{y_2}{y_{2N}} \right).$$

В качестве координатного треугольника выбираем треугольник $S_1 0 S_2$, который с единичной точкой SC образует исходную проективную систему координат.

Установим связь проективных и декартовых координат в виде, аналогичном выражению (6).

Однородные координаты точки M^1 :

$$\rho \xi_1^1 = I_1^1 / I_1^{SC}; \quad \rho \xi_2^1 = I_2^1 / I_2^{SC}; \quad \rho \xi_3^1 = \delta_3^1 / \delta_3^{SC}.$$

В данном случае расстояния отсчитываются от прямой $S_1 S_2$:

$$\delta_3^1 = \frac{1}{\mu_3} \left(\frac{I_1^1}{I_1^{S1}} + \frac{I_2^1}{I_2^{S2}} - 1 \right); \quad \delta_3^{SC} = \frac{1}{\mu_3} \left(\frac{I_1^{SC}}{I_1^{S1}} + \frac{I_2^{SC}}{I_2^{S2}} - 1 \right).$$

В свою очередь, неоднородные координаты точки M^1 определяются по (3).

Для большей ясности неоднородные координаты изображены на рис. 6.

Матрицы преобразований типа (6), (7) в рассматриваемом случае имеют вид:

$$[C] = \begin{pmatrix} \frac{1}{I_1^{SC}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_2^{SC}} & 0 \\ \frac{1}{I_1^{S1} \mu_3 \delta_3^{SC}} & \frac{1}{I_2^{S2} \mu_3 \delta_3^{SC}} & -\frac{1}{\mu_3 \delta_3^{SC}} \end{pmatrix};$$

$$[C]^{-1} = \begin{pmatrix} I_1^{SC} & 0 & 0 \\ 0 & I_2^{SC} & 0 \\ \frac{I_1^{SC}}{I_1^{S1}} & \frac{I_2^{SC}}{I_2^{S2}} & -\mu_3 \delta_3^{SC} \end{pmatrix}.$$

Неизменный координатный треугольник $S_1 0 S_2$ и новая единичная точка SC образуют уже другую проективную систему координат со своим значением расстояния $\bar{\delta}_3^{SC}$. Тогда преобразование токов задается выражением, аналогичным (14):

$$\begin{pmatrix} \rho \bar{I}_1 \\ \rho \bar{I}_2 \\ \rho 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1(y_{0N}) & 0 & 0 \\ 0 & m_2(y_{0N}) & 0 \\ \frac{m_1(y_{0N})-1}{I_1^{S1}} & \frac{m_2(y_{0N})-1}{I_2^{S2}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где $m_1(y_{0N}) = \frac{\bar{I}_1^{SC}}{I_1^{SC}} \frac{\delta_3^{SC}}{\bar{\delta}_3^{SC}}$; $m_2(y_{0N}) = \frac{\bar{I}_2^{SC}}{I_2^{SC}} \frac{\delta_3^{SC}}{\bar{\delta}_3^{SC}}$.

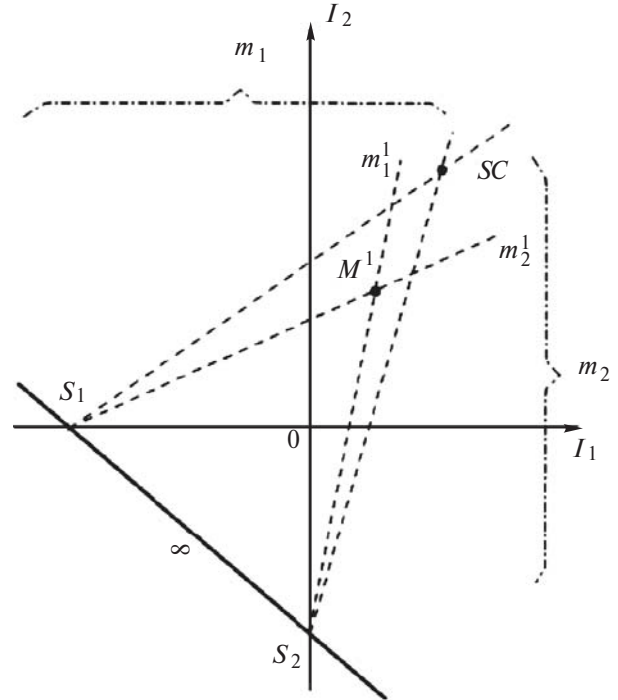


Рис. 6. Представление неоднородных координат m_1, m_2 для координатного треугольника $S_1 0 S_2$ и единичной точки SC

Данное преобразование также обладает групповым свойством при изменениях значений y_{0N} .

Для частного случая $I_2 = 0$ выражение для тока \bar{I}_1 имеет вид

$$\bar{I}_1 = \frac{I_1 m_1(y_{0N})}{\frac{I_1}{I_1^{S1}} [m_1(y_{0N}) - 1] + 1}.$$

Неподвижными точками этого преобразования являются $I_1 = 0, I_1 = I_1^{S1}$. Аналогично выражению (17) можно составить сложное отношение:

$$\begin{aligned} m_1(y_{0N}) &= (0 \bar{I}_1 I_1^{S1}) = (0 \bar{I}_1^{SC} I_1^{SC} I_1^{S1}) = \\ &= (0 \bar{I}_1^{G1} I_1^{G1} I_1^{S1}). \end{aligned}$$

Выразим явно $m_1(y_{0N})$ через y_{0N} и \bar{y}_{0N} . Аналогично предыдущему случаю имеем:

$$\begin{aligned} m_1(y_{0N}) &= (0 \bar{y}_{0N} y_{0N} y^i(y_{0N})) = \\ &= \frac{\bar{y}_N - 0}{\bar{y}_N - y^i(y_{0N})} \div \frac{y_N - 0}{y_N - y^i(y_{0N})}. \end{aligned}$$

Величина $m_1(y_{0N})$ интерпретируется как относительное изменение проводимости y_{0N} . Также смысл величины $y^i(y_N)$ состоит в том, что она является внутренней проводимостью всей цепи отно-

сительно проводимости y_{0N} с противоположным знаком при отключенных нагрузках:

$$y^i(y_{0N}) = \left(\frac{y_1 y_{1N}}{y_1 + y_{1N}} + \frac{y_2 y_{2N}}{y_2 + y_{2N}} + y_N \right)$$

Совместные изменения проводимостей нагрузок и параметров четырехполюсника. Представленные соотношения позволяют получить результирующие преобразования для перерасчета токов в случае совместного изменения параметров нагрузок и параметров четырехполюсника. Пусть сначала режим цепи изменился за счет изменения проводимостей нагрузок. Далее изменяется проводимость $y_N \rightarrow \bar{y}_N$. Поэтому можно сразу получить результирующее преобразование как произведение матриц:

$$\begin{pmatrix} \rho \bar{I}_1 \\ \rho \bar{I}_2 \\ \rho I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1(y_N) m_1^{21} & 0 & 0 \\ 0 & m_2(y_N) m_2^{21} & 0 \\ \frac{m_1(y_N) m_1^{21} - 1}{I_1^{G1}} & \frac{m_2(y_N) m_2^{21} - 1}{I_2^{G2}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Обращает на себя внимание выполнение групповой операции для результирующих изменений параметров преобразования $m_1(y_N) m_1^{21}$,

$$\begin{pmatrix} m_1(y_{0N}) m_1^{21} & 0 & 0 \\ 0 & m_2(y_{0N}) m_2^{21} & 0 \\ \left[\frac{m_1(y_{0N}) - 1 + \frac{I_1^{S1}}{I_1^{G1}}}{I_1^{S1}} \right] m_1^{21} - \frac{I_1^{S1}}{I_1^{G1}} & \left[\frac{m_2(y_{0N}) - 1 + \frac{I_2^{S2}}{I_2^{G2}}}{I_2^{S2}} \right] m_2^{21} - \frac{I_2^{S2}}{I_2^{G2}} & 1 \end{pmatrix}$$

$m_2(y_N) m_2^{21}$. Это связано с тем, что используется один и тот же координатный треугольник для изменений параметров нагрузок и параметров четырехполюсника.

Аналогично, пусть режим цепи изменился за счет проводимостей нагрузок, а потом изменяется проводимость $y_{0N} \rightarrow \bar{y}_{0N}$. Тогда результирующее преобразование:

В этом случае групповое свойство не выполняется, так как кроме произведений $m_1(y_{0N}) m_1^{21}$, $m_2(y_{0N}) m_2^{21}$ элементы этой матрицы содержат величины m_1^{21} , m_2^{21} . Это связано с тем, что используются разные координатные треугольники.

Выводы. 1. Использование относительных изменений проводимостей нагрузок и выбранных проводимостей четырехполюсника через сложное отношение позволило получить формулы перерасчета токов, обладающие групповыми свойствами.

2. Представленные формулы перерасчета особенно удобны для неизменных значений параметров преобразования. Поэтому для произвольных исходных значений токов сразу определяются их последующие значения.

3. Формулы перерасчета позволяют сопоставить фактические значения параметров режима разных цепей как в случае эквивалентных начальных режимов, так и в случае их изменений.

4. Полученные результаты обобщаются формальным образом на активные многополюсники, содержащие три и более нагрузки, подключенные к источнику питания через общий узел N .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бессонов Л.А.** Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. – М.: Высшая школа, 1996.
2. **Поливанов К.М.** Теорема вариации для n -параметров электрической цепи. – Электричество, 1947, № 7.
3. **Богатырев О.М.** Общий метод решения задач линейной цепи при переменных сопротивлениях в ветвях. – Электричество, 1955, № 9.
4. **Мелешкин В.Н.** Чувствительность линейных цепей к вариации структуры и параметров элементов. – Электричество, 1987, № 2.
5. **Пенин А.А.** Дробно-линейные соотношения в задачах анализа резистивных цепей с переменными параметрами. – Электричество, 1999, № 11.
6. **Penin A.A.** About the Determination of Regimes of the Equivalent Generator Based on Projective Geometry: The Generalized Equivalent Generator. – International Journal of Electrical and Computer Engineering, 2008, vol. 3, № 15: <http://www.waset.org/journals/ijece/v3/v3-15-146.pdf>
7. **Penin A.A.** Definition of Parameters and Regimes of Active Two-Port Networks with Variable Loads on the Basis of Projective Geometry. – WSEAS TRANSACTIONS on CIRCUITS and SYSTEMS, Issue 5, vol. 10, May 2011: <http://www.worldses.org/journals/circuits/circuits-2011.htm>

Автор: **Пенин Александр Анатольевич** окончил радиотехнический факультет Одесского политехнического института в 1974 г. В 2011 г. защитил кандидатскую диссертацию «Моделирование электронных характеристик силовых транзисторов и фотоэлектрических преобразователей в линейно-гиперболической аппроксимации». Научный сотрудник Института электронной инженерии и нанотехнологий Академии наук Молдовы.