Сообщения

Свободные гармонические колебания в электрических системах с однородными реактивными элементами

ПОПОВ И.П.

Показана возможность возникновения свободных гармонических колебаний в электрических системах, состоящих из однородных элементов, например из двух индуктивных катушек или из двух конденсаторов.

К л ю ч е в ы е с л о в а: *колебательные системы, индуктивность, емкость*

It is shown that free harmonic oscillations may occur in electric systems consisting of homogeneous elements, e.g., of two induction coils or two capacitors.

K e y w o r d s: *oscillatory systems, inductance, capacitance*

Индуктивно-индуктивная *LL*-система. Такая система состоит из двух одинаковых катушек с индуктивностью L и двухфазной синхронной индуктивной электрической машины, ротором которой является постоянный магнит (рис. 1). Катушки подключены к фазным обмоткам статора. Каждая обмотка статора имеет n витков, длина активной части витка l, индукция магнитного поля B. Активное сопротивление и индуктивность обмоток и соединительных проводников не учитываем. Вращающий момент равен нулю. При этих допущениях в соответствии со вторым законом Кирхгофа и с учетом закона электромагнитной индукции имеем:

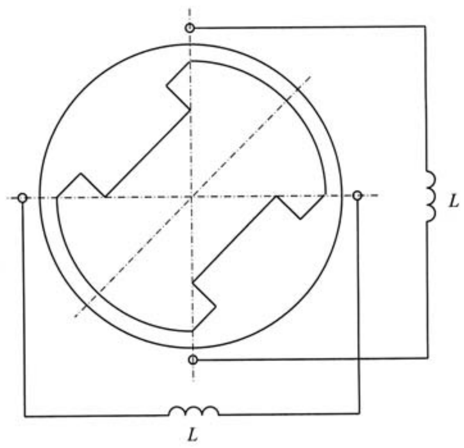

Рис. 1

$$BlnR\frac{d\varphi}{dt}\sin\varphi = L\frac{di_1}{dt}; \tag{1}$$

$$BlnR\frac{d\varphi}{dt}\cos\varphi = L\frac{di_2}{dt}. \tag{2}$$

В соответствии с [1] можно записать

$$r_1F_1 = -r_2F_2,$$

где r — радиус; F — сила,
или с учетом закона Ампера

$$Blni_1R\sin\varphi = -Blni_2R\cos\varphi. \tag{3}$$

Интегрируя (1) и (2), получаем:

$$i_1 = -\frac{BlnR}{L}\cos\varphi + A_1;$$

$$i_2 = \frac{BlnR}{L}\sin\varphi + A_2.$$

Подставляя эти выражения в (3), получаем тождество при $A_1 = A_2 = 0$ (здесь A_1, A_2 — постоянные интегрирования). Т.е. суммарный момент равен нулю при любой частоте вращения ротора.

Пусть начальные условия таковы:

$$\varphi(0) = \varphi_0;\ \frac{d\varphi}{dt}(0) = \omega_0. \tag{4}$$

Поскольку вращающий момент равен нулю:

$$M = L\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0, \tag{5}$$

где J — момент инерции; угловая частота неизменна:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \mathrm{const} = \omega_0,$$

$$\varphi = \int\omega_0 dt = \omega_0 t + A = \omega_0 t + \varphi_0. \tag{6}$$

Тогда получаем выражения:

$$i_1 = -\frac{BlnR}{L}\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = -\frac{BlnR\omega_0}{L\omega_0}\cos(\omega_0 t + \varphi_0) =$$

$$= -\frac{E}{X_L}\cos(\omega_0 t+\varphi_0);$$

$$i_2 = -\frac{BlnR}{L}\sin(\omega_0 t+\varphi_0) = \frac{E}{X_L}\sin(\omega_0 t+\varphi_0),$$

из которых следует, что в системе с двумя катушками с индуктивностью L происходят свободные гармонические колебания тока.

В рассмотренной колебательной системе происходит взаимный обмен между энергиями магнитных полей индуктивных элементов. При $\varphi = 0$ энергия магнитного поля первого индуктивного элемента максимальна, а второго — равна нулю. По мере изменения угла φ ток во втором элементе начинает возрастать за счет энергии магнитного поля первого элемента, ток которого начинает уменьшаться.

Емкостно-емкостная *CC*-система. Эта система отличается от *LL*-системы тем, что вместо индуктивных катушек к фазным обмоткам статора подключены одинаковые конденсаторы емкостью *C*.

Для *CC*-системы аналоги выражений (1)—(3) могут быть записаны в виде системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &BlnR\frac{d\varphi}{dt}\sin\varphi = -\frac{1}{C}\int_0^t i_1 dt;\\ &BlnR\frac{d\varphi}{dt}\cos\varphi = -\frac{1}{C}\int_0^t i_2 dt;\\ &Blni_1 R\sin\varphi = -Blni_2 R\cos\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Продифференцировав первые два уравнения, получим:

$$i_1 = -BlnRC\left[\frac{d^2\varphi}{dt^2}\sin\varphi + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\cos\varphi\right]; \qquad (8)$$

$$i_2 = -BlnRC\left[\frac{d^2\varphi}{dt^2}\cos\varphi - \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\sin\varphi\right]. \qquad (9)$$

Эти результаты подставим в третье уравнение системы (7):

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}\sin^2\varphi + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\sin\varphi\cos\varphi + \frac{d^2\varphi}{dt^2}\cos^2\varphi - \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\sin\varphi\cos\varphi = 0$$

или

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0.$$

Решение последнего уравнения следующее:

$$\varphi = A_1 t + A_2;$$

или с учетом (4)

$$\varphi = \omega_0 t + \varphi_0.$$

Тогда (8) и (9) принимают вид:

$$i_1 = -BlnRC\omega_0^2\cos(\omega_0 t+\varphi_0) = -\frac{E}{X_C}\cos(\omega_0 t+\varphi_0);$$

$$i_2 = BlnRC\omega_0^2\sin(\omega_0 t+\varphi_0) = \frac{E}{X_C}\sin(\omega_0 t+\varphi_0).$$

Из последних выражений следует, что в системе с двумя конденсаторами емкостью *C* происходят свободные гармонические колебания тока. В такой колебательной системе происходит взаимный обмен между энергиями электрических полей емкостных элементов. При $\varphi = 0$ энергия электрического поля второго емкостного элемента максимальна, а первого — равна нулю. По мере изменения угла φ первый элемент начинает заряжаться за счет энергии электрического поля второго элемента, который начинает разряжаться.

В составе *CC*-системы вместо индуктивной электрической машины может использоваться емкостная [2] (рис. 2), для которой согласно [2] имеем

$$i = Dlv, \qquad (10)$$

где D — электрическое смещение; l — длина электрода статора; v — линейная скорость ротора.

Выражение (10) можно представить в таком виде:

$$\frac{dq}{dt} = Dl\frac{dx}{dt};\ dq = Dldx;\ \int_0^q dq = Dl\int_0^x dx;\ q = Dlx.$$

Электрическое поле действует на электрод с силой

$$F = qE = q\frac{u}{x} = Dlu, \qquad (11)$$

где E — напряженность электрического поля; u — напряжение.

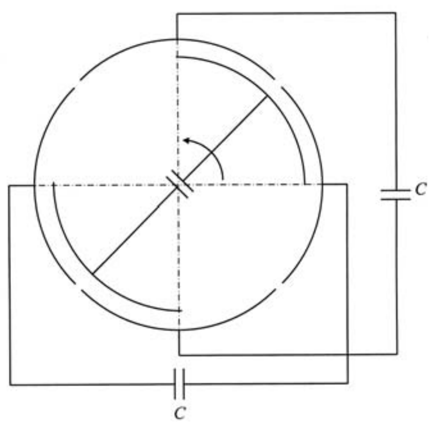

Рис. 2

Ток заряда-разряда конденсаторов

$$i = C\frac{du}{dt}. \qquad (12)$$

С учетом (10)–(12) аналог системы уравнений (7) может быть записан в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &DlR\frac{d\varphi}{dt}\sin\varphi = C\frac{du_1}{dt};\\ &DlR\frac{d\varphi}{dt}\cos\varphi = C\frac{du_2}{dt};\\ &Dlu_1R\sin\varphi = -Dlu_2R\cos\varphi. \end{aligned}\right\}$$

После интегрирования первых двух уравнений получаем выражения:

$$u_1 = -\frac{DlR}{C}\cos\varphi + A_1;\; u_2 = \frac{DlR}{C}\sin\varphi + A_2,$$

подставляя которые в третье условие, получаем тождество при $A_1 = A_2 = 0$. Это означает, что суммарный момент равен нулю при любой частоте вращения ротора. При начальных условиях (4) и с учетом (5) выполняется (6). Принимая во внимание (12), запишем:

$$i_1 = DlR\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{DlR}{C}\omega_0 C\sin(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{E}{X_C}\sin(\omega_0 t + \varphi_0);$$

$$i_2 = DlR\omega_0\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{DlR}{C}\omega_0 C\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{E}{X_C}\cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Таким образом, в системе с двумя конденсаторами емкостью C, связанными с помощью емкостного электромеханического преобразователя, происходят свободные гармонические колебания тока.

Замечание 1. Как и в электрическом колебательном LC-контуре, в рассмотренных колебательных LL- и CC-системах фазы колебаний энергии колеблющихся величин сдвинуты на угол $\pi/2$.

Замечание 2. В отличие от колебательного LC-контура частота свободных колебаний в LL- и CC-системах не зависит от параметров элементов систем и определяется исключительно начальными условиями. Другими словами, рассмотренные системы могут совершать свободные гармонические колебания с любой изначально заданной частотой.

Замечание 3. LL- и CC-системы могут быть выполнены многофазными. В качестве примера такой системы с однородными элементами может рассматриваться трехфазная колебательная LLL-система, в которой три одинаковых индуктивных элемента L связаны трехфазной синхронной электрической машиной. Для LLL-системы аналоги выражений (1)–(3) могут быть записаны в виде следующей системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &BlnR\frac{d\varphi}{dt}\cos\varphi = L\frac{di_1}{dt};\\ &BlnR\frac{d\varphi}{dt}\cos\left(\frac{2}{3}\pi - \varphi\right) = L\frac{di_2}{dt};\\ &BlnR\frac{d\varphi}{dt}\cos\left(-\frac{2}{3}\pi - \varphi\right) = L\frac{di_3}{dt};\\ &Blni_1R\cos\varphi + Blni_2R\cos\left(\frac{2}{3}\pi - \varphi\right) +\\ &+ Blni_2R\cos\left(-\frac{2}{3}\pi - \varphi\right) = 0. \end{aligned}\right\}$$

При интегрировании первых трех уравнений и подстановке результатов в четвертое получается тождество, т.е. суммарный момент равен нулю при любой частоте вращения ротора. По аналогии с двухфазной LL-системой можно показать, что в трехфазной колебательной LLL-системе происходят свободные гармонические колебания тока. При этом

$$i_1 = \frac{BlnR}{L}\sin(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{E}{X_L}\sin(\omega_0 t + \varphi_0);$$

$$i_2 = \frac{BlnR}{L}\sin\left(\frac{2}{3}\pi - \omega_0 t - \varphi_0\right) = \frac{E}{X_L}\sin\left(\frac{2}{3}\pi - \omega_0 t - \varphi_0\right);$$

$$i_3 = \frac{BlnR}{L}\sin\left(-\frac{2}{3}\pi - \omega_0 t - \varphi_0\right) = \frac{E}{X_L}\sin\left(-\frac{2}{3}\pi - \omega_0 t - \varphi_0\right).$$

Как показано выше, при симметричной реактивной нагрузке синхронного генератора или компенсатора необходимости в генерировании реактивной мощности не возникает. При этом для двухфазной системы (LL-системы) источником реактивной мощности первой фазы является совокупность индуктивных элементов, включенных в цепь второй фазы, а источником реактивной мощности второй фазы являются индуктивные элементы первой фазы. Для трехфазной LLL-системы источником реактивной мощности любой фазы являются индуктивные элементы двух других фаз.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Яворский Б.М., Детлаф А.А.** Справочник по физике. – М.: Наука, 1980.

2. **Копылов И.П**. Электрические машины: Учебник. – М.: Энергоатомиздат, 1986.

[27.10.11]

Автор: ***Попов Игорь Павлович*** *окончил механико-технологический факультет Курганского машиностроительного института в 1983 г. Начальник отдела инновационного развития департамента экономического развития, торговли и труда Правительства Курганской области.*