

Математическое описание многомассовых механических систем электропривода

САУШЕВ А.В.

Рассматривается метод электрической аналогии, позволяющий упростить расчетную схему многомассовой механической части электропривода и получить удобные для практического применения формулы ее описания. В основе метода лежат известные и хорошо разработанные алгоритмы расчета электрических цепей.

Ключевые слова: электропривод, механическая система, моделирование, расчетная схема

В большинстве случаев реальные электромеханические системы (ЭМС), основу которых составляют автоматизированные электроприводы, представляют собой сложные динамические системы, механическая часть которых состоит из вращающихся масс и содержит упругие связи. В статье рассматриваются методы моделирования многомассовых механических систем, основанные на использовании электрической аналогии.

При моделировании и исследовании сложных электромеханических систем их механическая часть с помощью преобразований и упрощений обычно сводится к одномассовой или двухмассовой моделям. Известные формулы такого преобразования являются приближенными и не учитывают демпфирования упругих колебаний.

Цель статьи — разработка единого подхода к моделированию электрической и механической частей ЭМС, включая вывод формул, позволяющих упростить исходные многомассовые расчетные схемы механической части системы, содержащие упругие связи и учитывающие демпфирование механических колебаний.

Для реализации единого подхода к моделированию электрической и механической частей ЭМС введем в рассмотрение понятия механического сопротивления и проводимости. Под механическим сопротивлением будем понимать отношение операторных изображений крутящего момента к угловой скорости соответствующего элемента системы [1] и обозначать его буквой Z с индексом «мех» или с волнистой чертой над буквой:

$$Z_{\text{мех}}(p) = \tilde{Z}(p) = M(p) / w(p).$$

Механическая проводимость определяется формулой

The method of electrical analogy is considered, the use of which makes it possible to simplify the analysis scheme of the multimass part of an electric drive and obtain formulas for its description convenient for practical applications. The method is based on well known and well developed algorithms for calculating electrical circuits.

Key words: electric drive, mechanical system, simulation, analysis scheme

$$Y_{\text{мех}}(p) = \tilde{Y}(p) = 1 / \tilde{Z}(p).$$

Выразим механические сопротивления вращающихся масс и упругих связей через физические параметры ЭМС. Для произвольной k -й вращающейся массы момент с учетом демпфирования определяется суммой двух моментов

$$M_k = M_{\text{ик}} + M_{\text{трк}},$$

где $M_{\text{ик}} = J_k \frac{dw_k}{dt}$ — избыточный момент,

$M_{\text{трк}} = b_k w_k$ — момент вязкого трения.

В операторной форме записи

$$M_k(p) = J_k p w_k(p) + b_k w_k(p) = (J_k p + b_k) w_k(p).$$

Таким образом, механическое сопротивление, характеризующее k -ю вращающуюся массу, будет определяться выражением

$$\tilde{Z}_k(p) = J_k p + b_k,$$

где J_k и b_k — приведенный момент инерции и коэффициент демпфирования (внутреннего вязкого трения) k -й вращающейся массы.

Для упругого элемента, расположенного, например, между k -й и $(k+1)$ -й вращающимися массами, суммарный момент

$$M_{k,k+1} = M_{j k,k+1} + M_{\text{трк},k,k+1},$$

где $M_{j k,k+1} = c_{k,k+1} (j_k - j_{k+1})$ — упругий момент от сил скручивания; $M_{\text{трк},k,k+1} = b_{k,k+1} (w_k - w_{k+1})$ — момент внутреннего вязкого трения; индексы « j » и «тр» характеризуют, соответственно, угол закручивания j упругого элемента ЭМС и трение в этом элементе.

В операторной форме записи с учетом $w = dj / dt$ получим:

$$M_{k,k+1}(p) = \frac{c_{k,k+1}}{p}(w_k - w_{k+1}) + b_{k,k+1}(w_k - w_{k+1}) = \frac{\tilde{c}_{k,k+1}}{p} + b_{k,k+1} \frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}}(w_k - w_{k+1}).$$

Таким образом, выражение механического сопротивления, характеризующего рассматриваемый упругий элемент, будет иметь вид

$$\tilde{Z}_{k,k+1}(p) = c_{k,k+1} / p + b_{k,k+1},$$

где $c_{k,k+1}$ – коэффициент жесткости, характеризующий упругую связь между k -й и $(k+1)$ -й вращающимися массами; $b_{k,k+1}$ – коэффициент демпфирования, определяющий потери на трение в этой упругой связи.

В дальнейшем для упрощения записи оператор p для механических сопротивлений, проводимостей и операторных значений переменных состояния $M(p)$ и $w(p)$ без необходимости писать не будем.

В общем случае для n вращающихся масс расчетная схема цепной механической системы привода будет иметь вид, показанный на рис. 1.

С учетом введенного понятия механического сопротивления этой схеме будет соответствовать структурная механическая цепная схема (рис. 2), в которой по аналогии с электрическими цепями токам соответствуют угловые скорости вращающихся масс, а напряжениям – моменты.

В схемах M и M_c – электромагнитный момент двигателя и момент сопротивления рабочей машины.

Для уменьшения числа элементов и связей применяется приближенная замена двух инерционных

элементов с общей упругой связью инерционным элементом с двухсторонней упругой связью и наоборот. Используя метод аналогии, получим уточненные формулы такого преобразования, позволяющие упростить исходную расчетную схему, которая в самом общем случае учитывает диссипацию энергии [2].

Для замены одного инерционного элемента с двухсторонней упругой связью двумя элементами с общей связью, т.е. при переходе, например, от трехмассовой механической системы к двухмассовой (рис. 3), преобразуем операторные сопротивления $\tilde{Z}_{k-1,k}$, \tilde{Z}_k , $\tilde{Z}_{k,k+1}$, соединенные в треугольник, в эквивалентную звезду \tilde{Z}_{k-1}^n , \tilde{Z}_k^n , $\tilde{Z}_{k-1,k}^n$.

Индекс « n » у операторных сопротивлений, составляющих звезду, характеризует такое преобразование. Используя известные формулы из теории электрических цепей [3], получаем:

$$\tilde{Z}_{k-1}^n = \frac{\tilde{Z}_k \tilde{Z}_{k-1,k}}{\tilde{Z}_{k-1,k} + \tilde{Z}_k + \tilde{Z}_{k,k+1}};$$

$$\tilde{Z}_k^n = \frac{\tilde{Z}_k \tilde{Z}_{k,k+1}}{\tilde{Z}_{k-1,k} + \tilde{Z}_k + \tilde{Z}_{k,k+1}};$$

$$\tilde{Z}_{k-1,k}^n = \frac{\tilde{Z}_{k-1,k} \tilde{Z}_{k,k+1}}{\tilde{Z}_{k-1,k} + \tilde{Z}_k + \tilde{Z}_{k,k+1}},$$

при этом $\tilde{Z}_{k-1}^c = \tilde{Z}_{k-1} + \tilde{Z}_{k-1}^n$, $\tilde{Z}_k^c = \tilde{Z}_{k+1} + \tilde{Z}_k^n$,
 $\tilde{Z}_{k-1,k}^c = \tilde{Z}_{k-1,k}^n$.

В результате преобразования из исходной расчетной схемы исключается k -я вращающаяся мас-

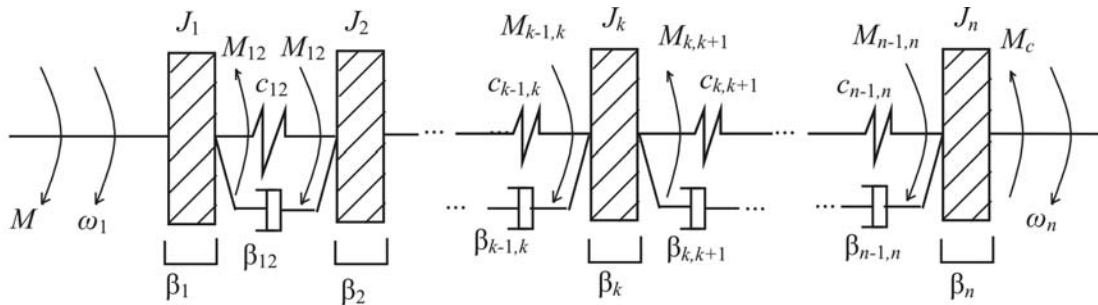


Рис. 1. Расчетная схема n -массовой механической системы привода

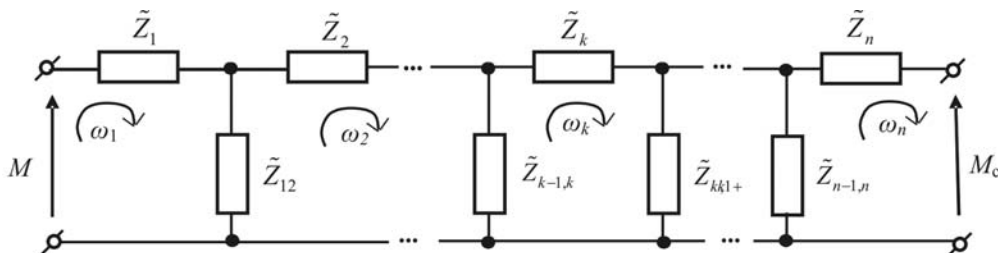


Рис. 2. Структурная цепная механическая схема n -массовой системы привода

са, и полученная эквивалентная расчетная схема будет содержать на одну массу меньше. При этом центральная точка звезды будет определять в механической цепной схеме точку соединения оставшихся вращающихся масс (механических сопротивлений \tilde{Z}_{k-1} и \tilde{Z}_k) с преобразованными моментами инерции J_{k-1} (вместо J_{k-1}) и J_k (вместо J_{k+1}), между которыми будет упругая связь (механическое сопротивление $\tilde{Z}_{k-1,k}$) с преобразованными коэффициентами жесткости $c_{k-1,k}$ (вместо $c_{k-1,k}$ и $c_{k,k+1}$) и демпфирования $b_{k-1,k}$ (вместо $b_{k-1,k}$ и $b_{k,k+1}$).

Введем обозначения:

$$A(p) = \tilde{Z}_{k-1,k} + \tilde{Z}_k + \tilde{Z}_{k,k+1}; \quad B(p) = \tilde{Z}_{k-1,k} \tilde{Z}_{k,k+1};$$

$$D(p) = \tilde{Z}_k \tilde{Z}_{k-1,k}; \quad F(p) = \tilde{Z}_k \tilde{Z}_{k,k+1}.$$

Подставив в формулы механических сопротивлений физические параметры ЭМС и учтя, что при этом

$$\tilde{Z}_{k-1} = J_{k-1}p + b_{k-1}; \quad \tilde{Z}_k = J_k p + b_k;$$

$$\tilde{Z}_{k+1} = J_{k+1}p + b_{k+1}; \quad \tilde{Z}_{k-1,k} = c_{k-1,k} / p + b_{k-1,k},$$

после преобразований получим:

$$A(p) = (c_{k-1,k} + c_{k,k+1}) / p + J_k p + b_{k-1,k} + b_k + b_{k,k+1};$$

$$B(p) = (c_{k-1,k} / p + b_{k-1,k}) (c_{k,k+1} / p + b_{k,k+1}) = (c_{k-1,k} c_{k,k+1} + c_{k-1,k} b_{k,k+1} + c_{k,k+1} b_{k-1,k} + b_{k-1,k} b_{k,k+1} p^2) / p^2;$$

$$D(p) = (J_k p + b_k)(c_{k-1,k} / p + b_{k-1,k}) = J_k c_{k-1,k} + b_k c_{k-1,k} / p + J_k b_{k-1,k} p + b_k b_{k-1,k};$$

$$F(p) = (J_k p + b_k)(c_{k,k+1} / p + b_{k,k+1}) = J_k c_{k,k+1} + b_k c_{k,k+1} / p + J_k b_{k,k+1} p + b_k b_{k,k+1};$$

$$\tilde{Z}_{k-1,k}(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{c_{k-1,k} c_{k,k+1}}{(c_{k-1,k} + c_{k,k+1})p^2} \textcircled{R}$$

$$\textcircled{R} \frac{(c_{k-1,k} b_{k,k+1} + c_{k,k+1} b_{k-1,k})p + b_{k-1,k} b_{k,k+1} p^2}{(b_{k-1,k} + b_k + b_{k,k+1})p^2 + J_k p^3};$$

$$\tilde{Z}_{k-1}(p) = \tilde{Z}_{k-1}(p) + \frac{D(p)}{A(p)} = b_{k-1} + J_{k-1} p +$$

$$\frac{b_k + c_{k-1,k} + (J_k c_{k-1,k} + b_k b_{k-1,k})p + J_k b_{k-1,k} p^2}{c_{k-1,k} + c_{k,k+1} + (b_{k-1,k} + b_k + b_{k,k+1})p + J_k p^2};$$

$$\tilde{Z}_k(p) = \tilde{Z}_{k+1}(p) + \frac{F(p)}{A(p)} = b_{k+1} + J_{k+1} p +$$

$$\frac{b_k + c_{k,k+1} + (J_k c_{k,k+1} + b_k b_{k,k+1})p + J_k b_{k,k+1} p^2}{c_{k-1,k} + c_{k,k+1} + (b_{k-1,k} + b_k + b_{k,k+1})p + J_k p^2}.$$

Используя замену $p = j\omega$, запишем выражения для механических сопротивлений в комплексной форме:

$$\tilde{Z}_{k-1,k}(j\omega) = \frac{(c_{k-1,k} c_{k,k+1} - b_{k-1,k} b_{k,k+1} \omega^2) +}{-(b_{k-1,k} + b_k + b_{k,k+1})\omega^2 +} \textcircled{R}$$

$$\textcircled{R} \frac{j\omega(c_{k-1,k} b_{k,k+1} + c_{k,k+1} b_{k-1,k})}{j\omega(c_{k-1,k} + c_{k,k+1} - J_k \omega^2)};$$

$$\tilde{Z}_{k-1}(j\omega) = b_{k-1} + j\omega J_{k-1} +$$

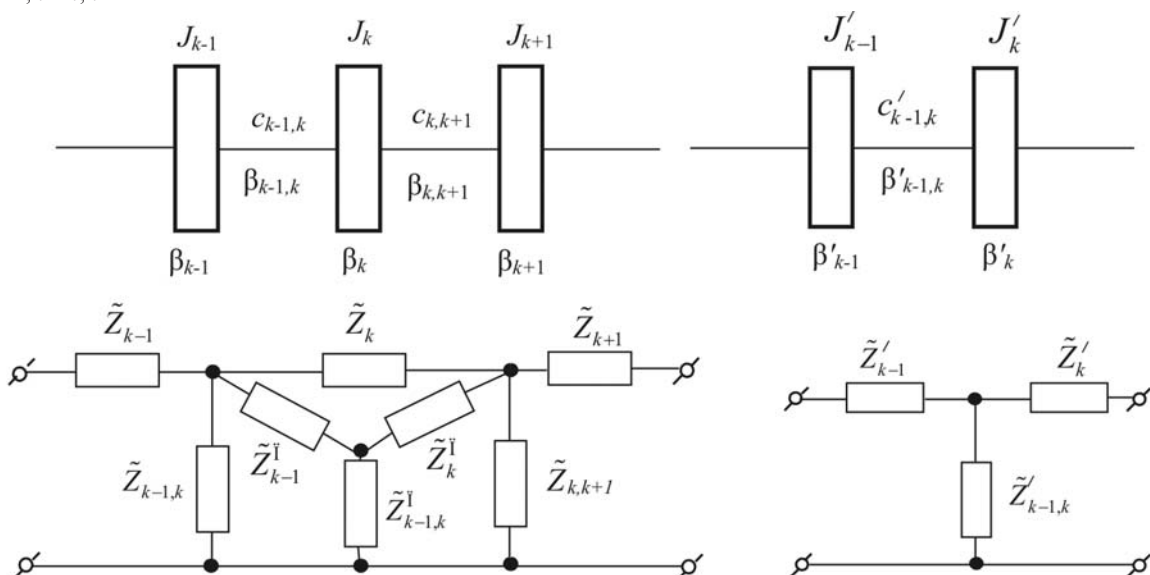


Рис. 3. Структурные схемы преобразования «треугольник–звезда»

$$+ \frac{b_k c_{k-1,k} - J_k b_{k-1,k} w^2 + j w (J_k c_{k-1,k} + b_k b_{k-1,k})}{c_{k-1,k} + c_{k,k+1} - J_k w^2 + j (b_{k-1,k} + b_k + b_{k,k+1}) w};$$

$$\tilde{Z}_k^{\mathcal{C}}(jw) = b_{k+1} + j w J_{k+1} +$$

$$+ \frac{b_k c_{k,k+1} - J_k b_{k,k+1} w^2 + j w (J_k c_{k,k+1} + b_k b_{k,k+1})}{c_{k-1,k} + c_{k,k+1} - J_k w^2 + j (b_{k-1,k} + b_k + b_{k,k+1}) w}.$$

Выделяя действительную и мнимую части комплексных чисел $\tilde{Z}_{k-1,k}^{\mathcal{C}}(jw)$, $\tilde{Z}_{k-1}^{\mathcal{C}}(jw)$ и $\tilde{Z}_k^{\mathcal{C}}(jw)$; принимая во внимание рабочие частоты, соотношения между реальными значениями коэффициентов жесткости, демпфирования и моментов инерции; отбрасывая малые величины, а также переходя для упрощения записи от жесткостей упругих связей к податливостям ($e = 1/c$), получаем:

$$\operatorname{Re}\{\tilde{Z}_{k-1,k}^{\mathcal{C}}\} = \frac{b_{k-1,k} e_{k-1,k} + b_{k,k+1} e_{k,k+1}}{e_{k-1,k} + e_{k,k+1}} -$$

$$- \frac{e_{k-1,k} e_{k,k+1}}{(e_{k-1,k} + e_{k,k+1})^2} (b_{k-1,k} + b_k + b_{k,k+1}),$$

$$\operatorname{Im}\{\tilde{Z}_{k-1,k}^{\mathcal{C}}\} = -1 / (e_{k-1,k} + e_{k,k+1}) w;$$

$$\operatorname{Re}\{\tilde{Z}_{k-1}^{\mathcal{C}}\} = b_{k-1} + b_k \frac{e_{k,k+1}}{e_{k-1,k} + e_{k,k+1}},$$

$$\operatorname{Im}\{\tilde{Z}_{k-1}^{\mathcal{C}}\} = J_{k-1} + w J_k \frac{e_{k,k+1}}{e_{k-1,k} + e_{k,k+1}};$$

$$\operatorname{Re}\{\tilde{Z}_k^{\mathcal{C}}\} = b_{k+1} + b_k \frac{e_{k-1,k}}{e_{k-1,k} + e_{k,k+1}},$$

$$\operatorname{Im}\{\tilde{Z}_k^{\mathcal{C}}\} = J_{k+1} + w J_k \frac{e_{k-1,k}}{e_{k-1,k} + e_{k,k+1}}.$$

Учитывая, что искомые эквивалентные значения комплексных сопротивлений имеют вид:

$$\tilde{Z}_{k-1,k}^{\mathcal{C}}(jw) = b_{k-1,k}^{\mathcal{C}} - j / e_{k-1,k}^{\mathcal{C}} w,$$

$$\tilde{Z}_{k-1}^{\mathcal{C}}(jw) = b_{k-1}^{\mathcal{C}} + j w J_{k-1}^{\mathcal{C}},$$

$$\tilde{Z}_k^{\mathcal{C}}(jw) = b_{k+1}^{\mathcal{C}} + j w J_k^{\mathcal{C}},$$

приравнивая их действительные и мнимые части вычисленным значениям, окончательно получаем расчетные формулы:

$$J_{k-1}^{\mathcal{C}} = J_{k-1} + J_k \frac{e_{k,k+1}}{e_{k-1,k}^{\mathcal{C}}}; \quad J_k^{\mathcal{C}} = J_{k+1} + J_k \frac{e_{k-1,k}}{e_{k-1,k}^{\mathcal{C}}};$$

$$e_{k-1,k}^{\mathcal{C}} = e_{k-1,k} + e_{k,k+1};$$

$$b_{k-1}^{\mathcal{C}} = b_{k-1} + b_k \frac{e_{k,k+1}}{e_{k-1,k}^{\mathcal{C}}}; \quad b_k^{\mathcal{C}} = b_{k+1} + b_k \frac{e_{k-1,k}}{e_{k-1,k}^{\mathcal{C}}};$$

$$b_{k-1,k}^{\mathcal{C}} = \frac{b_{k-1,k} e_{k-1,k} + b_{k,k+1} e_{k,k+1}}{e_{k-1,k} + e_{k,k+1}} -$$

$$- \frac{e_{k-1,k} e_{k,k+1}}{(e_{k-1,k} + e_{k,k+1})^2} (b_{k-1,k} + b_k + b_{k,k+1}).$$

В том случае, если диссипация энергии отсутствует или ею можно пренебречь, значения коэффициентов $b_{k-1,k}^{\mathcal{C}}$, $b_k^{\mathcal{C}}$, $b_{k-1,k}^{\mathcal{C}}$ в отдельности или все вместе принимаются равными нулю.

Получим расчетные формулы, позволяющие заменить два инерционных элемента с общей упругой связью одним инерционным элементом с двухсторонней упругой связью (рис. 4). Такое преобразование возможно, например, при переходе от четырехмассовой механической системы к трехмассовой. Воспользуемся аналогией с электрическими цепями и преобразуем сопротивления \tilde{Z}_k , \tilde{Z}_{k+1} , $\tilde{Z}_{k,k+1}$, соединенные в звезду, в эквивалентный треугольник $\tilde{Z}_{k-1,k}^{\Pi}$, \tilde{Z}_{k+1}^{Π} , $\tilde{Z}_{k,k+1}^{\Pi}$. На основании известных из теории электрических цепей формул [3] получим:

$$\tilde{Z}_{k-1,k}^{\Pi} = \tilde{Z}_k + \tilde{Z}_{k,k+1} + \frac{\tilde{Z}_k \tilde{Z}_{k,k+1}}{\tilde{Z}_{k+1}};$$

$$\tilde{Z}_{k,k+1}^{\Pi} = \tilde{Z}_{k+1} + \tilde{Z}_{k,k+1} + \frac{\tilde{Z}_{k+1} \tilde{Z}_{k,k+1}}{\tilde{Z}_k};$$

$$\tilde{Z}_k^{\Pi} = \tilde{Z}_k + \tilde{Z}_{k+1} + \frac{\tilde{Z}_k \tilde{Z}_{k+1}}{\tilde{Z}_{k,k+1}}.$$

$$\text{При этом } \tilde{Z}_k^{\mathcal{C}} = \tilde{Z}_k^{\Pi}, \quad \tilde{Z}_{k-1,k}^{\mathcal{C}} = \frac{\tilde{Z}_{k-1,k} \tilde{Z}_{k-1,k}^{\Pi}}{\tilde{Z}_{k-1,k} + \tilde{Z}_{k-1,k}^{\Pi}},$$

$$\tilde{Z}_{k,k+1}^{\mathcal{C}} = \frac{\tilde{Z}_{k,k+1} \tilde{Z}_{k,k+1}^{\Pi}}{\tilde{Z}_{k,k+1} + \tilde{Z}_{k,k+1}^{\Pi}}.$$

Подставляя в формулы механических сопротивлений физические параметры ЭМС и учитывая, что при этом

$$\tilde{Z}_k^{\mathcal{C}} = \tilde{Z}_k^{\Pi}, \quad \tilde{Z}_{k-1,k}^{\mathcal{C}} = \frac{\tilde{Z}_{k-1,k} \tilde{Z}_{k-1,k}^{\Pi}}{\tilde{Z}_{k-1,k} + \tilde{Z}_{k-1,k}^{\Pi}},$$

$$\tilde{Z}_{k,k+1}^{\mathcal{C}} = \frac{\tilde{Z}_{k,k+1} \tilde{Z}_{k,k+1}^{\Pi}}{\tilde{Z}_{k,k+1} + \tilde{Z}_{k,k+1}^{\Pi}};$$

$$\tilde{Z}_{k-1,k}^{\mathcal{C}} = c_{k-1,k} / p + b_{k-1,k}; \quad \tilde{Z}_k^{\mathcal{C}} = J_k p + b_k;$$

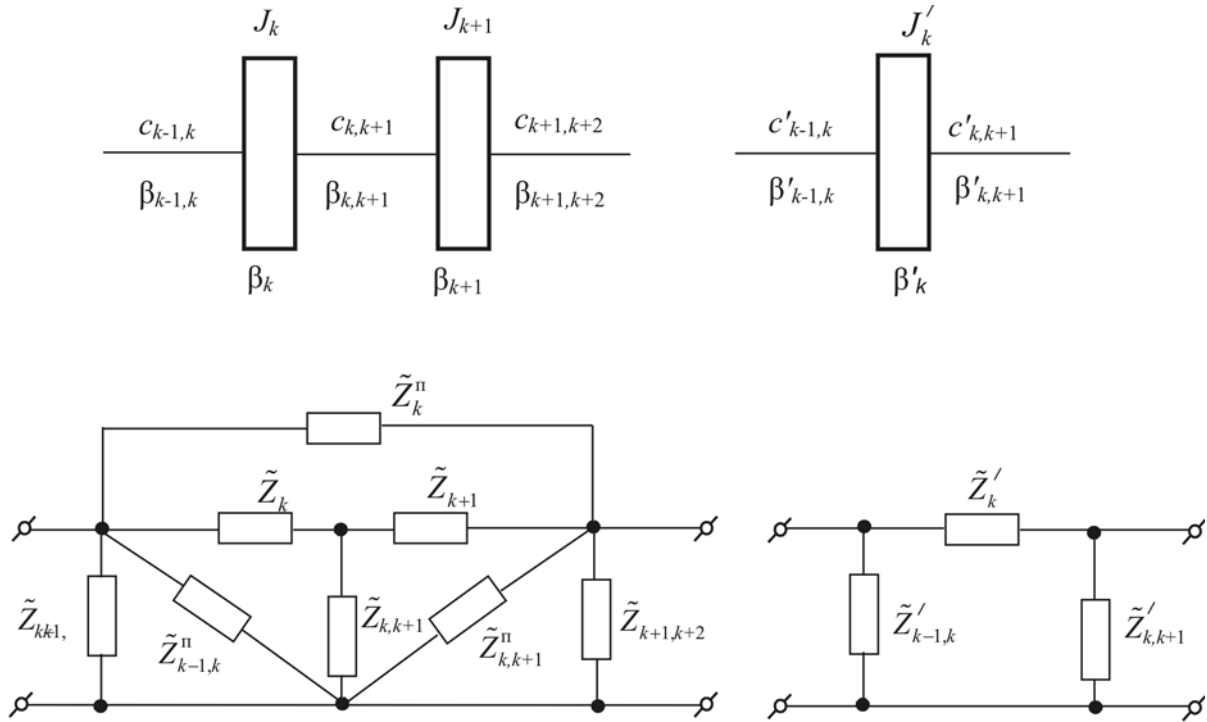


Рис. 4. Структурные схемы преобразования «звезда—треугольник»

$$\tilde{Z}_{k+1} = J_{k+1}p + b_{k+1}; \tilde{Z}_{k,k+1} = c_{k,k+1} / p + b_{k,k+1};$$

$$\tilde{Z}_{k+1,k+2} = c_{k+1,k+2} / p + b_{k+1,k+2},$$

после преобразований получаем:

$$\tilde{Z}_{k-1,k}^{\Pi}(p) = b_k + b_{k,k+1} + J_k p + \frac{c_{k,k+1}}{p} + \frac{(J_k p + b_k)(c_{k,k+1} + b_{k,k+1}p)}{(J_{k+1}p + b_{k+1})p};$$

$$\tilde{Z}_{k,k+1}^{\Pi}(p) = b_{k+1} + b_{k,k+1} + J_{k+1}p + \frac{c_{k,k+1}}{p} + \frac{(J_{k+1}p + b_{k+1})(c_{k,k+1} + b_{k,k+1}p)}{(J_k p + b_k)p};$$

$$\tilde{Z}_k^{\Pi}(p) = b_k + b_{k+1} + (J_k + J_{k+1})p + \frac{(J_k p + b_k)(J_{k+1}p + b_{k+1})p}{c_{k,k+1} + b_{k,k+1}p};$$

$$\tilde{Z}_{k-1,k}^{\Pi}(p) = \frac{(c_{k-1,k} + b_{k-1,k})\tilde{Z}_{k-1,k}^{\Pi}(p)}{c_{k-1,k} + b_{k-1,k}p + \tilde{Z}_{k-1,k}^{\Pi}(p)};$$

$$\tilde{Z}_{k,k+1}^{\Pi}(p) = \frac{(c_{k,k+1} + b_{k,k+1})\tilde{Z}_{k,k+1}^{\Pi}(p)}{c_{k,k+1} + b_{k,k+1}p + \tilde{Z}_{k,k+1}^{\Pi}(p)}.$$

Дальнейший вывод аналогичен выводу формул эквивалентной замены одного инерционного элемента с двухсторонней упругой связью двумя элементами с общей связью, рассмотренному выше.

Для компактности записи формул и удобства их использования коэффициенты жесткости упругих связей заменены на податливости. Формулы преобразования имеют вид:

$$J_k = J_k + J_{k+1}; b_k = b_k + b_{k+1};$$

$$e_{k-1,k} = e_{k-1,k} + e_{k,k+1} \frac{J_{k+1}}{J_k};$$

$$e_{k,k+1} = e_{k+1,k+2} + e_{k,k+1} \frac{J_k}{J_k};$$

$$b_{k-1,k} = \frac{e_{k-1,k}}{e_{k-1,k}} b_k + b_{k,k+1} \frac{J_k}{J_{k+1}} \frac{e_{k,k+1} J_{k+1}}{e_{k-1,k} J_k} \frac{\ddot{\sigma}^2}{\sigma} +$$

$$+ b_{k-1,k} \frac{e_{k-1,k}}{e_{k-1,k}} \frac{\ddot{\sigma}^2}{\sigma};$$

$$b_{k,k+1} = \frac{e_{k,k+1}}{e_{k,k+1}} b_{k+1} + b_{k,k+1} \frac{J_k}{J_{k+1}} \frac{e_{k,k+1} J_{k+1}}{e_{k,k+1} J_k} \frac{\ddot{\sigma}^2}{\sigma} +$$

$$+ b_{k,k+1} \frac{e_{k,k+1}}{e_{k,k+1}} \frac{\ddot{\sigma}^2}{\sigma}.$$

В случае, если диссипация энергии отсутствует или ею можно пренебречь, значения коэффициентов $b_k, b_{k+1}, b_{k-1,k}, b_{k,k+1}$ в отдельности или все вместе принимаются равными нулю.

Эквивалентная расчетная схема является основной для математического описания механической системы привода.

Запишем уравнение движения привода для k -й вращающейся массы:

$$M_{двк} - M_{ск} = M_{ик},$$

где $M_{двк} = M_{jk-1,k} + M_{тpk-1,k}$,

$$M_{ск} = M_{jk,k+1} + M_{тpk,k+1} + M_{тpk}$$

или

$$M_{jk-1,k} + M_{тpk-1,k} - M_{jk,k+1} - M_{тpk,k+1} = M_{ик} + M_{тpk}.$$

Подставляя вместо моментов их значения, получаем:

$$\frac{c_{k-1,k}}{p} + b_{k-1,k} \frac{\ddot{\omega}_{k-1} - \ddot{\omega}_k}{\ddot{\omega}_{k-1} - \ddot{\omega}_k} - \frac{c_{k,k+1}}{p} + b_{k,k+1} \frac{\ddot{\omega}_k - \ddot{\omega}_{k+1}}{\ddot{\omega}_k - \ddot{\omega}_{k+1}} = (J_k p + b_k) \ddot{\omega}_k.$$

Конкретизируем запись уравнений для первой массы. Учитывая, что $k=1$, $M_{k-1,k} = 0$, $M_{тpk-1,k} = 0$, $M_{и1} = J_1 p \omega_1$, уравнение примет вид

$$M - M_{12} - M_{тp12} = M_{и1} + M_{тp1}.$$

Заменяя моменты их значениями, получаем:

$$M - (c_{12} / p + b_{12})(\omega_1 - \omega_2) = (J_1 p + b_1) \omega_1.$$

Запишем уравнения для n -й массы. Учитывая, что $k=n$, $M_{k,k+1} = 0$, $M_{тpk,k+1} = 0$, $M_{ин} = J_n p \omega_n$, уравнение примет вид

$$M_{jn-1,n} + M_{тpn-1,n} - M_c = M_{ин} + M_{тpn}.$$

Заменяя моменты их значениями, получаем:

$$(c_{n-1,n} / p + b_{n-1,n})(\omega_{n-1} - \omega_n) - M_c = (J_n p + b_n) \omega_n.$$

Используя понятия механических сопротивлений и проводимости, уравнение движения для k -й вращающейся массы можно записать в виде

$$\tilde{Z}_{k-1,k}(\omega_{k-1} - \omega_k) - \tilde{Z}_{k,k+1}(\omega_k - \omega_{k+1}) = \tilde{Z}_k \omega_k,$$

где $\tilde{Z}_k = J_k p + b_k$, $\tilde{Z}_{k-1,k} = c_{k-1,k} / p + b_{k-1,k}$,

$$\tilde{Z}_{k,k+1} = c_{k,k+1} / p + b_{k,k+1}.$$

При изменении k от 1 до n получим общую систему уравнений:

$$M - \tilde{Z}_{12}(\omega_1 - \omega_2) = \tilde{Z}_1 \omega_1;$$

$$\tilde{Z}_{12}(\omega_1 - \omega_2) - \tilde{Z}_{23}(\omega_2 - \omega_3) = \tilde{Z}_2 \omega_2;$$

.....

$$\tilde{Z}_{k-1,k}(\omega_{k-1} - \omega_k) - \tilde{Z}_{k,k+1}(\omega_k - \omega_{k+1}) = \tilde{Z}_k \omega_k;$$

.....

$$\tilde{Z}_{n-1,n}(\omega_{n-1} - \omega_n) - M_c = \tilde{Z}_n \omega_n.$$

Этой системе уравнений соответствует структурная схема (рис. 5), которую удобно использовать при моделировании ЭМС.

Аналогия с электрическими цепями позволяет на основании эквивалентной расчетной схемы и соответствующей ей структурной цепной схемы n -массовой механической системы привода записать систему операторных уравнений, отражающих ее динамику.

В случае, если неизвестными величинами являются угловые скорости вращающихся масс, такая система уравнений по аналогии с методом контурных токов [3] будет иметь вид:

$$(\tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_{12})\omega_1 - \tilde{Z}_{12}\omega_2 = M;$$

$$-\tilde{Z}_{12}\omega_1 + (\tilde{Z}_{12} + \tilde{Z}_2 + \tilde{Z}_{23})\omega_2 - \tilde{Z}_{23}\omega_3 = 0;$$

.....

$$-\tilde{Z}_{n-1,n}\omega_{n-1} + (\tilde{Z}_{n-1,n} + \tilde{Z}_n)\omega_n = -M_c.$$

В приведенных уравнениях $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ — неизвестные угловые скорости, которые «играют роль» контурных токов.

В случае, если неизвестными величинами являются моменты в упругих связях, удобно использовать аналогию с методом узловых потенциалов [3], при этом уравнения будут иметь вид:

$$(\tilde{Y}_1 + \tilde{Y}_{12} + \tilde{Y}_2)M_{12} - \tilde{Y}_2 M_{23} = \tilde{Y}_1 M;$$

$$-\tilde{Y}_2 M_{12} + (\tilde{Y}_2 + \tilde{Y}_{23} + \tilde{Y}_3)M_{23} - \tilde{Y}_3 M_{34} = 0;$$

.....

$$-\tilde{Y}_{n-1} M_{n-2,n-1} + (\tilde{Y}_{n-1} + \tilde{Y}_{n-1,n} + \tilde{Y}_n)M_{n-1,n} =$$

$$= -\tilde{Y}_n M_c.$$

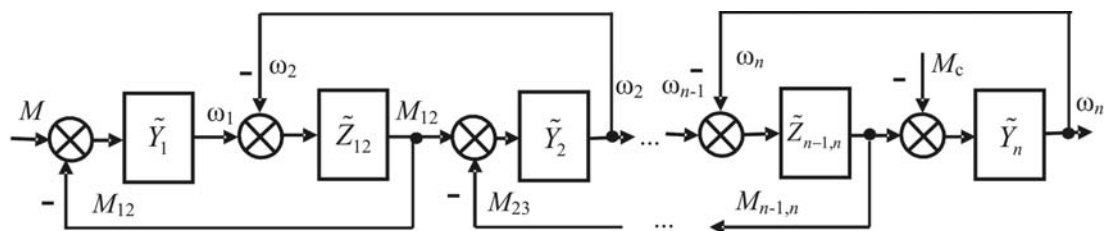


Рис. 5. Структурная схема n -массовой механической системы

Неизвестные моменты M_{12} , M_{23} , M_{34} , ..., $M_{n-2,n-1}$, $M_{n-1,n}$ в данной системе уравнений «играют роль» узловых потенциалов.

Рассмотрим еще одно применение метода электрической аналогии, которое может быть использовано для решения задач анализа механической системы привода методами ТАУ. Введем в рассмотрение понятия входного и выходного операторных механических сопротивлений [1]. Под входным будем понимать отношение операторных изображений момента двигателя к угловой скорости первой вращающейся массы при условии, что внешний момент сопротивления равен нулю ($M_c = 0$):

$$Z_{\text{мех.вх}}(p) = \tilde{Z}_{\text{вх}}(p)M(p) / w_1(p).$$

Выходное механическое сопротивление ($M = 0$)

$$Z_{\text{мех.вых}}(p) = \tilde{Z}_{\text{вых}}(p) = M_n(p) / w_n(p).$$

Входная механическая проводимость $\tilde{Y}_{\text{вх}}(p) = 1 / \tilde{Z}_{\text{вх}}(p) = w_1(p) / M(p)$ будет определять передаточную функцию по управляющему воздействию, а выходная $\tilde{Y}_{\text{вых}}(p) = 1 / \tilde{Z}_{\text{вых}}(p) = w_n(p) / M_c(p)$ — передаточную функцию по возмущающему воздействию. Численные значения $\tilde{Z}_{\text{вх}}(p)$ и $\tilde{Z}_{\text{вых}}(p)$ можно определить по цепной механической схеме (рис. 2) аналогично расчету эквивалентных входного и выходного электрических сопротивлений. Легко видеть, что, например, для двухмассовой расчетной схемы формулы имеют вид:

$$\tilde{Z}_{\text{вх}}(p) = (\tilde{Z}_1 \tilde{Z}_2 + \tilde{Z}_1 \tilde{Z}_{12} + \tilde{Z}_{12} \tilde{Z}_2) / (\tilde{Z}_2 + \tilde{Z}_{12});$$

$$\tilde{Z}_{\text{вых}}(p) = (\tilde{Z}_1 \tilde{Z}_2 + \tilde{Z}_1 \tilde{Z}_{12} + \tilde{Z}_{12} \tilde{Z}_2) / (\tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_{12}).$$

Для получения передаточной функции по управляемой переменной (угловой скорости) запишем по аналогии со вторым законом Кирхгоффа [3] уравнение для внешнего контура структурной цепной схемы (рис. 2) при условии $M_c = 0$:

$$M = \tilde{Z}_1 w_1 + K + \tilde{Z}_{n-1} w_{n-1} + \tilde{Z}_n w_n,$$

подставляя это выражение в формулу входного механического сопротивления, получаем:

$$\tilde{Z}_{\text{вх}}(p) = M(p) / w_1(p) = \tilde{Z}_1 + K + \tilde{Z}_{n-1} w_{n-1} / w_1 + \tilde{Z}_n w_n / w_1,$$

откуда искомая передаточная функция будет иметь вид

$$W_W(p) = w_n(p) / w_1(p) = \tilde{Y}_n [(\tilde{Z}_{\text{вх}})_{n-1} - (\tilde{Z}_{\text{вх}})_{n-1}].$$

Индекс при круглых скобках означает число звеньев механической цепной схемы, которые учитываются при вычислении входного механического сопротивления.

С помощью полученных выражений можно без дополнительных исследований и преобразований записать формулы для передаточных функций конкретной механической системы привода [2].

Предлагаемый подход позволяет с единых позиций моделировать электрическую и механическую части ЭМС как в операторной форме записи, так и в пространстве состояний. При этом повышается достоверность моделирования за счет увеличения точности моделей механической части ЭМС.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михайлов О.П. Автоматизированный электропривод станков и промышленных роботов: Учебник для вузов. — М.: Машиностроение, 1990.
2. Саушев А.В. Математическое описание механической системы электропривода: Учебное пос. — СПб: СПГУВК, 2010.
3. Демирчян К.С., Нейман Л.П., Н.В. Коровкин Н.В. Теоретические основы электротехники: Учебник для вузов, т. 1. — СПб: Питер, 2009.

[28.06.12]

Автор: Саушев Александр Васильевич окончил электромеханический факультет Ленинградского института водного транспорта в 1976 г. В 1984 г. защитил кандидатскую диссертацию «Исследование и разработка методов и средств повышения работоспособности электротехнических устройств путем параметрической оптимизации» в ЛВИМУ им. адм. Макарова. Профессор кафедры электропривода и электрооборудования береговых установок Санкт-Петербургского государственного университета водных коммуникаций.