

Метод удельной магнитной проводимости в расчетах радиальных и тангенциальных магнитных полей магнитоэлектрических машин

АФАНАСЬЕВ А.А., БЕЛОВ В.В., ЕФИМОВ В.В., НИКОЛАЕВ А.В.

Рассматриваются аналитические способы расчёта магнитного поля магнитоэлектрических машин, основанные на конформных отображениях расчетной области.

Ключевые слова: магнитоэлектрические машины, магнитное поле, расчет

Высокоэнергетические постоянные магниты на основе редкоземельных элементов имеют относительную магнитную проницаемость, близкую к единице, поэтому при расчете магнитного поля в активной зоне электрической машины с такими магнитами можно полагать пространство, занятое магнитами, воздушной средой.

При расположении магнитов на поверхности ярма ротора зубчатость воздушного зазора можно считать односторонней, поэтому его конформное отображение на область с гладкими границами не будет зависеть от углового положения ротора, что существенно повышает эффективность применения этой математической процедуры, так как постоянные величины конформного отображения достаточно вычислять только один раз, а не на каждом дискретном шаге поворота ротора.

Возможности современной вычислительной техники позволяют избежать принципиальных затруднений при практической реализации конформных отображений с эффективными алгоритмами [1–3]. С помощью конформных отображений верхней комплексной полуплоскости на фрагмент зубчатого воздушного зазора можно определить комплексную потенциальную функцию в этой области и на её основе аналитическими средствами получить адекватную картину магнитного поля в активной зоне и в результате рассчитать индуктивные параметры, ЭДС и электромагнитный момент машины.

Указанные технологии рассмотрим применительно к однофазным вентильным двигателям с постоянными магнитами (ВДПМ), имеющим по сравнению с аналогичными трехфазными более сложную конструкцию и обмотку с сосредоточенными (зубцовыми) катушками [4]. На рис. 1 показаны две конструкции таких двигателей, у которых магниты имеют несимметричное расположение с целью предстартовой фиксации положения ротора.

Комплексная потенциальная функция (КПФ) при униполярном намагничивании воздушного зазора. Штриховыми линиями на рис. 1 выделены облас-

Analytical methods for calculating the magnetic field of magnetolectric machines based on conformal mappings of the calculated region are considered.

Key words: magnetolectric machines, magnetic field, calculation

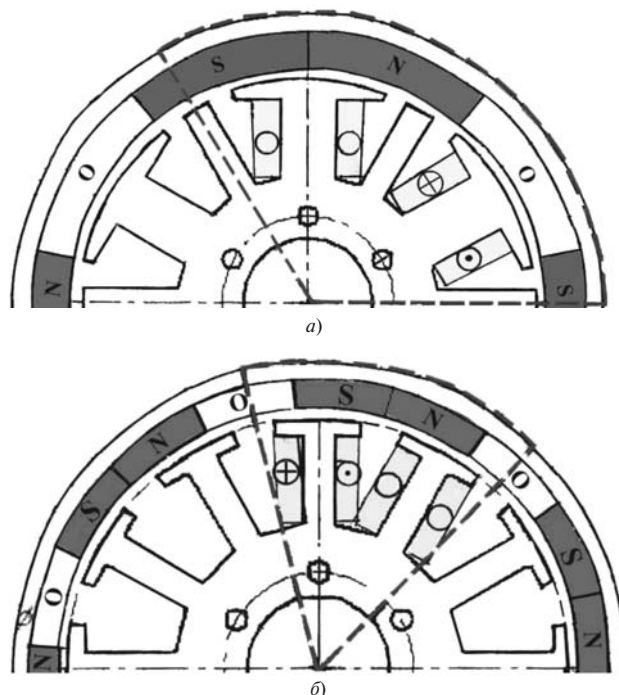


Рис. 1. Типы поперечной геометрии однофазных ВДПМ

ти, соответствующие пространственному периоду магнитного поля.

На верхнюю комплексную полуплоскость t конформно отображается (рис. 2) четверть периода магнитного поля ВДПМ (рис. 1).

Будем полагать, что скалярный магнитный потенциал статора (линия $A_9 A_1 \dots A_7$ на рис. 2,а) равен U_M , а аналогичный потенциал ротора (линия $A_9 A_8$) равен нулю. Причем отрезок $A_7 A_8$, соединяющий границы статора и ротора, совпадает с линией магнитного потока.

С помощью конформного преобразования¹ [5]

$$S = \frac{d}{\rho} \operatorname{Arctg} \frac{\frac{\partial t}{\partial z} - \frac{\partial t}{\partial \bar{z}}}{\frac{\partial t}{\partial z} + \frac{\partial t}{\partial \bar{z}}} \quad (1)$$

¹ Формула (1) предполагает, что точка a_7 (ближайшая к точке a_8) на вещественной оси плоскости t равна нулю. Поскольку при конформном отображении было принято $a_5 = 0$, то необходим сдвиг начала координат плоскости t на величину $(-a_7)$.

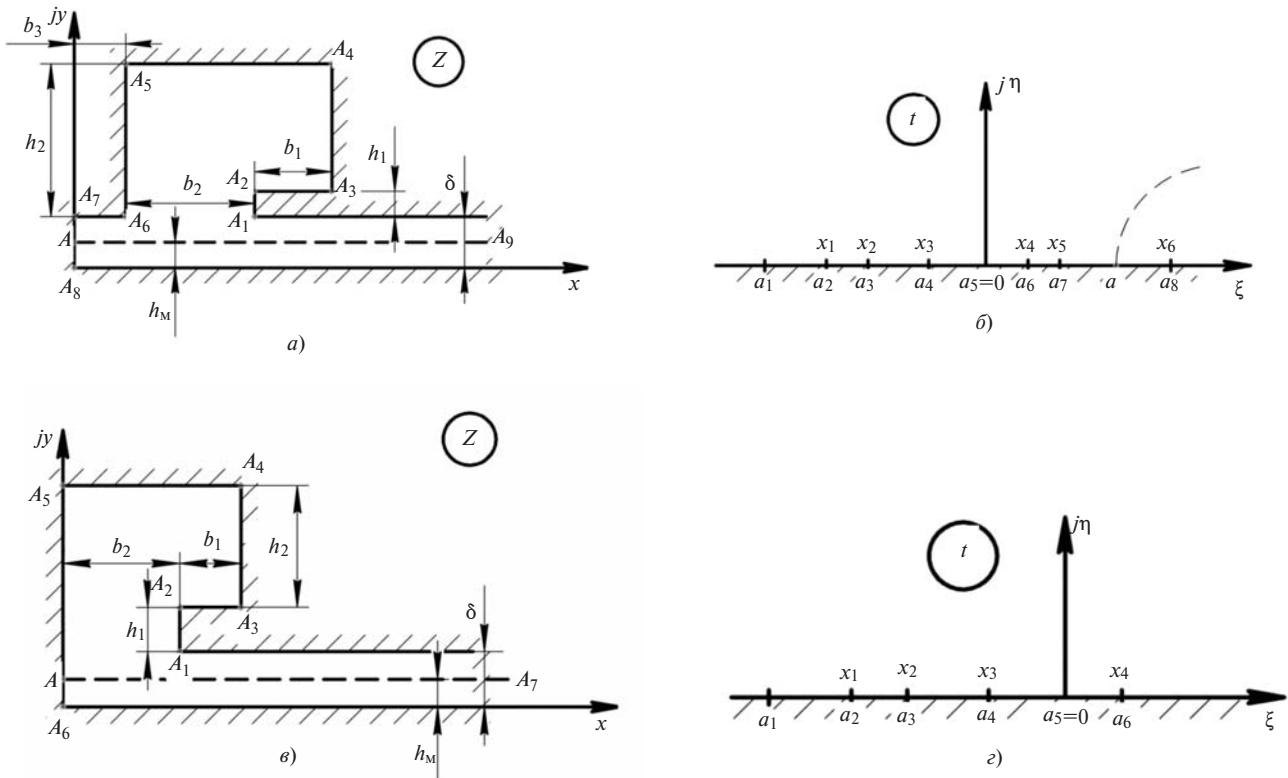


Рис. 2. Конформное отображение верхней полуплоскости t на зубчатую область воздушного зазора z первой (а, б) и второй (в, г) конструкций

верхняя комплексная полуплоскость t на рис. 2,б может быть преобразована в бесконечную горизонтальную полуполосу шириной d (рис. 3).

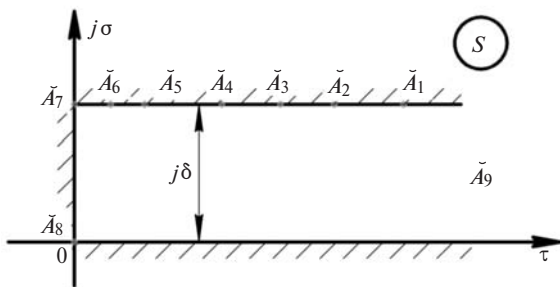


Рис. 3. Бесконечная горизонтальная полуполоса шириной d в плоскости S – образ зубчатой области плоскости z на рис. 2,а

Скалярный комплексный потенциал, описывающий равномерное магнитное поле в этой полуполосе, имеет вид

$$W_s = V + jU = \frac{U_M}{d} s, \tag{2}$$

где V – функция магнитного потока; U – функция скалярного магнитного потенциала.

Поскольку $s = t + js$, получим из (2)

$$V = \frac{U_M}{d} t; U = \frac{U_M}{d} s, \tag{3}$$

где $t \in [0, d]$, $0 \leq \sigma \leq d$.

Из второй формулы (3) видим, что действительно магнитный потенциал статора ($s = d$) равен U_M , а ротора ($s = 0$) имеет нулевое значение.

Подставив формулу (1) в (2), получим для комплексного магнитного потенциала в плоскости t

$$W(t) = \frac{U_M}{p} \operatorname{Arctg} \frac{2t}{e^{a_8} - 1} - \frac{\ddot{\sigma}}{\ddot{\sigma}} \tag{4}$$

Легко убедиться, что если магнитный потенциал U_M принадлежит нижней границе полуполосы (яру ротора), то выражения для комплексного потенциала в плоскостях s и t будут иметь вид:

$$W(s) = \frac{U_M}{d} (s - jd);$$

$$W(t) = - \frac{U_M}{d} \frac{e^{a_8} - 1}{e^{a_8}} \operatorname{Arctg} \frac{2t}{e^{a_8} - 1} - \frac{\ddot{\sigma}}{\ddot{\sigma}} j d \dot{u} \tag{5}$$

Магнитная индукция, нормальные и тангенциальные составляющие удельной магнитной проводимости на окружности воздушного зазора, проходящей через наружные поверхности магнитов. Комплексно-сопряженный вектор магнитной индукции в плоскости \bar{z} [1]

$$\bar{B}(z) = j m_0 \frac{dW(z)}{dz} = j m_0 \frac{dW(t)}{dt} \frac{dt}{dz} \tag{6}$$

Принимая во внимание, что согласно (4)

$$\frac{dW}{dt} = \frac{U_M}{\rho} \frac{1}{\sqrt{t(t-a_8)}}, \quad (7)$$

и обозначая $\frac{dz}{dt} = l(t)$, получаем из (6), (7)

$$^*B(z) = \frac{j m_0 U_M}{\rho} \frac{1}{l(t) \sqrt{t(t-a_8)}}. \quad (8)$$

Обратим внимание на важный факт. Выражения для производной dW/dt , полученные по (4) и (5), отличаются только знаком. Это значит, что (8), определяющая вектор магнитной индукции, не требует связи источников магнитного поля (скалярных магнитных потенциалов) с той или иной стороной воздушного зазора. В этом случае МДС статора и ротора следует интерпретировать как разность магнитных потенциалов между сторонами воздушного зазора.

Поскольку для зубчатой структуры на рис. 2,а справедливо

$$l(t) = \frac{d}{\rho} \sqrt{\frac{(t-a_1)(t-a_2)(t-a_6)}{(t-a_3)(t-a_4)(t-a_5)(t-a_7)(t-a_8)}},$$

из (8) будем иметь

$$^*B(z) = \frac{j m_0 U_M}{d} \sqrt{\frac{(t-a_3)(t-a_4)(t-a_7)}{(t-a_1)(t-a_2)(t-a_6)}}. \quad (9)$$

При расчете магнитной индукции на линии $y = h_M$ (на поверхности магнитов) нужно в (9) подставить

$$t = \tilde{t} = \tilde{x} + j\tilde{h}, \quad (10)$$

где \tilde{x} , \tilde{h} – образы точек $\tilde{x} = jh_M$ плоскости z , технология их определения изложена в [6].

Формулы (9) позволяют вычислить значения магнитной индукции в любой точке воздушного зазора плоскости z , в том числе нормальную $B_n(\tilde{z})$ и тангенциальную $B_t(\tilde{z})$ составляющие на линии (10):

$$B_n(\tilde{z}) = - \operatorname{Im} \dot{B}(\tilde{z}); \quad (11)$$

$$B_t(\tilde{z}) = \operatorname{Re} \dot{B}(\tilde{z}). \quad (12)$$

Равенствам (11) и (12) можно придать такой вид:

$$B_n(\tilde{x}) = \frac{U_M}{R_{dn}(\tilde{x})} = U_M L_{dn}(\tilde{x}), \quad (13)$$

$$B_t(\tilde{x}) = \frac{U_M}{R_{dt}(\tilde{x})} = U_M L_{dt}(\tilde{x}), \quad (14)$$

где $R_{dn}(\tilde{x})$, $L_{dn}(\tilde{x})$ – удельные нормальные (радиальные) магнитные сопротивления и проводимости воздушного зазора; $R_{dt}(\tilde{x})$, $L_{dt}(\tilde{x})$ – удельные касательные (тангенциальные) магнитные сопротивления и проводимости воздушного зазора; \tilde{x} – прообраз линии (10) на плоскости z .

Для первой зубчатой структуры (рис. 2,а) в соответствии с (9), (13) и (14) будем иметь:

$$L_{dn}(\tilde{x}) = \frac{1}{R_{dn}(\tilde{x})} = \operatorname{Im} \frac{j m_0}{d} \sqrt{\frac{(\tilde{t}-a_3)(\tilde{t}-a_4)(\tilde{t}-a_7)}{(\tilde{t}-a_1)(\tilde{t}-a_2)(\tilde{t}-a_6)}}; \quad (15)$$

$$L_{dt}(\tilde{x}) = \frac{1}{R_{dt}(\tilde{x})} = \operatorname{Re} \frac{j m_0}{d} \sqrt{\frac{(\tilde{t}-a_3)(\tilde{t}-a_4)(\tilde{t}-a_7)}{(\tilde{t}-a_1)(\tilde{t}-a_2)(\tilde{t}-a_6)}}. \quad (16)$$

Для второй зубчатой структуры (рис. 2,б), имеющей

$$l(t) = \frac{d}{\rho} \sqrt{\frac{(t-a_1)(t-a_2)}{(t-a_3)(t-a_4)(t-a_6)}},$$

можно аналогично получить:

$$L_{dn}(\tilde{x}) = \frac{1}{R_{dn}(\tilde{x})} = \operatorname{Im} \frac{j m_0}{d} \sqrt{\frac{(\tilde{t}-a_3)(\tilde{t}-a_4)}{(\tilde{t}-a_1)(\tilde{t}-a_2)}}; \quad (17)$$

$$L_{dt}(\tilde{x}) = \frac{1}{R_{dt}(\tilde{x})} = \operatorname{Re} \frac{j m_0}{d} \sqrt{\frac{(\tilde{t}-a_3)(\tilde{t}-a_4)}{(\tilde{t}-a_1)(\tilde{t}-a_2)}}. \quad (18)$$

Удельные нормальные зависимости (15), (17) являются положительными чётными функциями, а удельные тангенциальные (16), (18) – нечётными. Зависимости (15)–(18) подлежат затем периодизации на полный период магнитного поля по координате x , жестко связанной со статором $L_{dn}(\tilde{x})$, $L_{dn}(x)$, $L_{dt}(\tilde{x})$, $L_{dt}(x)$, где $L_{dn}(x)$, $L_{dt}(x)$ – периодизированные удельные (нормальные и тангенциальные) магнитные проводимости, соответствующие периоду магнитного поля. Обе зубчатые структуры имеют пространственные периоды, равные зубцовому шагу статора.

На рис. 4 показаны графики удельной магнитной проводимости, построенные для первой зубчатой структуры по (15) и (16), для второй – по (17) и (18).

Источники магнитного поля – МДС статора и ротора – связаны в плоскости z с двумя электромеханическими (классическими) системами координат: неподвижной для статора с осями Ax , подвижной для ротора с осями dy . Взаимное положение этих координат задается углом J .

В классическом методе удельной магнитной проводимости, предложенном А.И. Вольдеком [8],

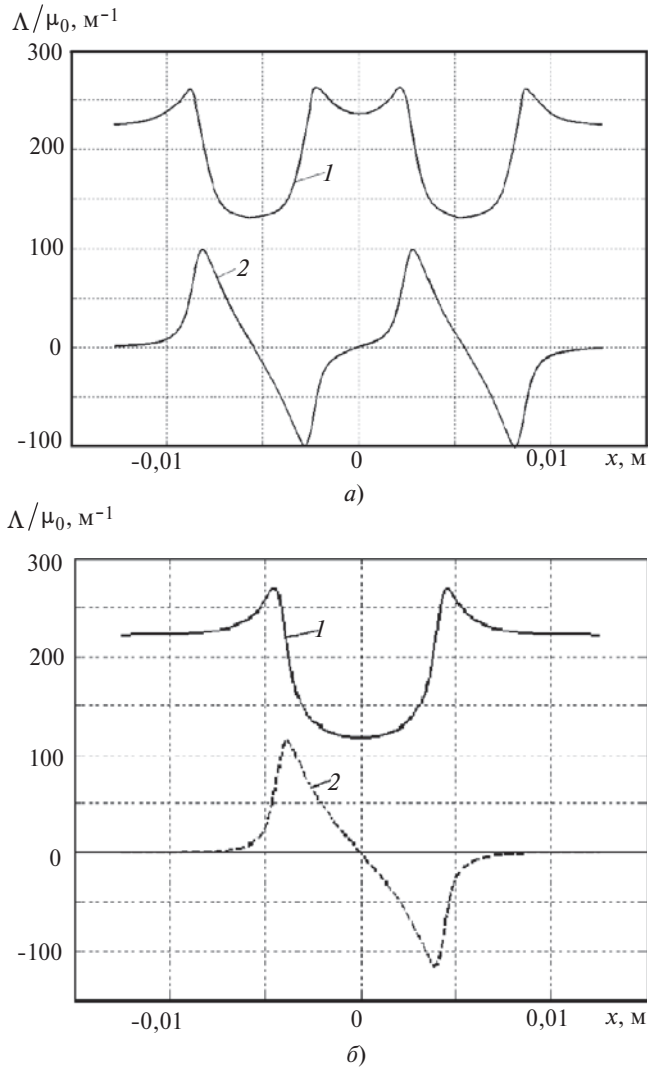


Рис. 4. Удельные магнитные проводимости воздушного зазора для первой (а) и второй (б) зубчатых структур: 1 – нормальные; 2 – тангенциальные

для определения нормальной составляющей магнитной индукции используется зависимость (в дальнейшем предполагается, что переменная J выражается в метрах)

$$B_n(x, J) = [F_c(x) + F_p(x + J)]L_{dn}(x), \quad (19)$$

в которой удельная магнитная проводимость зубчатого воздушного зазора $L_{dn}(x)$ представлена как произведение виртуальных частичных проводимостей, обусловленных зубчатостью одной стороны зазора при гладкой поверхности другой. Причём указанные проводимости рассчитываются для магнитного потока на гладкой стороне зазора. Очевидно, при таком способе определения $L_{dn}(x)$ расчет нормальной составляющей магнитной индукции в воздушном зазоре по (19) будет всегда содержать погрешность.

Определение $L_{dn}(x)$ для заданной линии воздушного зазора по формулам (15), (17) позволяет

рассчитать нормальную составляющую магнитной индукции по (19) принципиально точно для униполярного магнитного поля. Для МДС общего вида эта формула при использовании проводимостей (15), (17), как показывает рис. 5, дает хорошее приближение (с погрешностью не выше 5%) к точным значениям магнитной индукции, полученным из полевого расчёта [4].

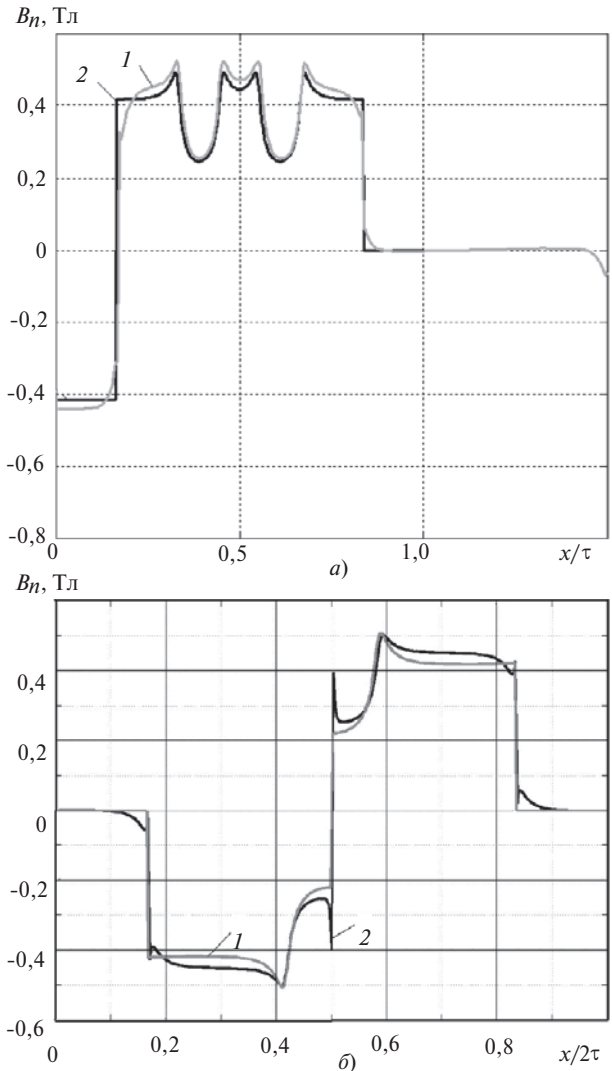


Рис. 5. Кривые нормальной составляющей магнитной индукции на поверхности магнитов, полученные по (22) (кривая 2) и из полевого расчёта (кривая 1) для первой (а) и второй (б) зубчатых структур

При изменении расстояния расчётной поверхности (поверхности наблюдения) от ядра ротора будут изменяться зубцовые пульсации нормальной и тангенциальной составляющих магнитной индукции (рис. 6), что соответствует физике явления – при удалении от статора влияние его зубчатости на магнитное поле ослабевает.

Формула для тангенциальной составляющей магнитной индукции вида (19)

$$B_t(x, J) = [F_c(x) + F_p(x + J)]L_{dt}(x), \quad (20)$$

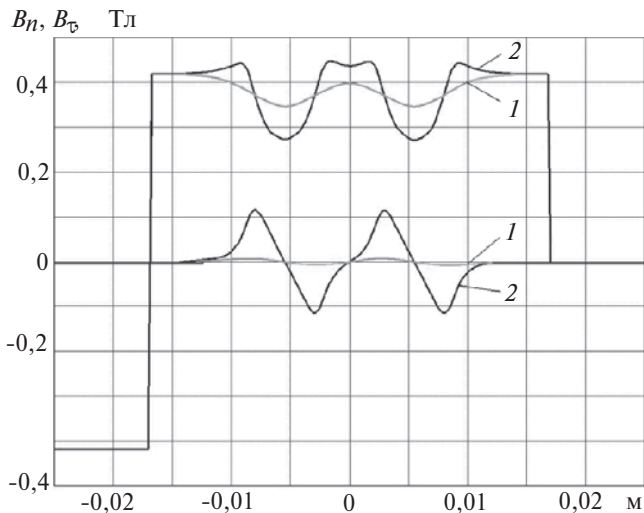


Рис. 6. Изменение составляющих магнитной индукции первой структуры при удалении от ярма ротора: 1 – $y_A = 0,125h_M$; 2 – $y_A = 0,875h_M$

в которой тангенциальная удельная магнитная проводимость $L_{dt}(x)$, как и $L_{dn}(x)$, рассчитывается для линии поверхности магнитов по (18), аналогичной по происхождению с (17).

Выражение для $B_t(x, J)$ (20) учитывает (при наличии разности магнитных потенциалов между сердечниками статора и ротора) влияние только зубчатости статора на поперечное магнитное поле. Поэтому расчёт $B_t(x, J)$ при обесточенном ВД даёт нулевой уровень тангенциальной индукции на участках окружности воздушного зазора (на линии наблюдения), где поперечная магнитная проводимость $L_{dt}(x)$ равна нулю. Это участки с равномерным (постоянным) воздушным зазором, симметричные относительно продольной оси зубцов статора.

По этой причине формула (20) не фиксирует поперечное магнитное поле в окрестности места стыка магнитов разной полярности (левый импульс кривой 1 на рис. 7) и в окрестности края магнита (правый всплеск на кривой 1 рис. 7), которые расположены в равномерном воздушном зазоре и рассчитаны полевым методом. Эти поперечные поля по краям магнитов обусловлены природой самих магнитов и имеют место при любом характере воздушного зазора – равномерном или зубчатом. Таких всплесков на интервале магнитного периода три (в окрестностях стыка магнитов разной полярности и у двух их наружных краёв).

Амплитуда поперечного всплеска индукции в месте стыка магнитов, как видно из рис. 7, практически совпадает со значением нормальной составляющей индукции у прилегающего края магнитов. Поэтому изменение магнитного поля в месте стыка на поверхности магнитов можно трактовать как

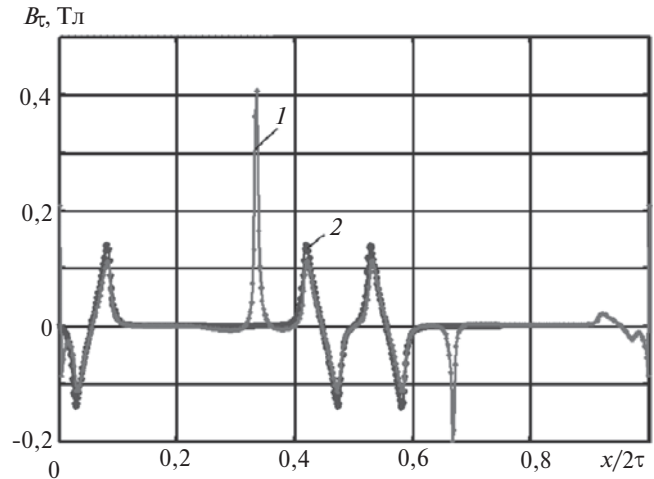


Рис. 7. Кривые тангенциальной составляющей магнитной индукции для первой зубчатой структуры: при расчёте по (23) (кривая 2) и по данным полевого расчёта (кривая 1)

последовательный поворот результирующего вектора магнитной индукции на суммарный угол 180° . Значение тангенциальной составляющей индукции $B_t(x, J)$ в этом месте будет равняться проекции результирующего вектора на тангенциальное направление.

При промежуточном значении угла поворота в 90° индукция поперечного поля будет максимальна. На наружных краях магнитов аналогичный всплеск поперечного поля оказывается в два раза меньше. Изложенные факты позволяют задействовать уточнённый вариант аналитического расчета магнитного поля, вводя в расчётный алгоритм дополнительные интервалы с поперечным магнитным полем, жёстко связанным с краями магнитов. Форма этих дополнительных всплесков поля в простейшем случае, как видно из рис. 7, имеет вид равнобедренного треугольника с шириной основания, близкой $0,1t$.

В местах на поверхности магнита, расположенных напротив пазов статора, формула (20), как видно из рис. 7, даёт значения тангенциальной индукции, качественно и количественно совпадающие с данными численного полевого расчёта.

Известные значения магнитных индукций $B_n(x, J)$ и $B_t(x, J)$ позволяют определить электромагнитный момент ВДПМ, используя универсальную формулу метода натяжений [9, 10]:

$$M = \frac{p l D}{2 m_0} \int_0^{2t} \dot{O} B_n B_t dx, \quad (21)$$

где p - число пар полюсов; l - расчетная длина машины; D - диаметр ротора.

Выводы. 1. Процедуры конформных отображений воздушного зазора на четверти магнитного периода позволяют определить комплексную потен-

циальную функцию активной области ВДПМ и на её основе рассчитать удельные магнитные проводимости продольной и поперечной составляющих магнитного поля в воздушном зазоре.

2. Представление магнита в виде бесконечно тонкого слоя на ярме ротора с МДС $F_M = H_{cB} h_M$ и предлагаемые алгоритмы расчета удельных магнитных проводимостей $L_{dn}(x)$ и $L_{dt}(x)$ обеспечивают адекватный расчет структуры магнитного поля в воздушном зазоре, результаты которого близки к данным численного полевого расчёта.

3. Метод удельной магнитной проводимости при введении в расчётную практику поперечной магнитной проводимости становится более универсальным, его можно использовать для определения электромагнитного момента методом натяжений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Иванов-Смоленский А.В., Абрамкин Ю.В.** Применение конформного преобразования в электромагнитных расчетах электрических машин. — М.: Изд-во МЭИ, 1980.
2. **Иванов-Смоленский А.В., Абрамкин Ю.В.** Численные методы применения конформного преобразования Кристоффеля — Шварца в электромагнитных расчетах электрических машин. — М.: Изд-во МЭИ, 1981.
3. **Афанасьев А.А., Степанов В.Э.** Новые подходы к расчету постоянных конформного отображения в задачах электромеханики. — Электричество, 1997, № 9.
4. **Афанасьев А.А., Белов В.В., Гарифуллин М.Ф. и др.** Однофазные вентильные электродвигатели для системы охлаждения автомобильного мотора. — Электричество, 2010, № 6.
5. **Лаврик В.И., Савенков В.Н.** Справочник по конформным отображениям. — Киев: Наукова думка, 1970.
6. **Аракелян А.К., Афанасьев А.А.** Вентильные электрические машины и регулируемый электропривод, кн. 1. — М.: Энергоатомиздат, 1997.
7. **Петров Г.Н.** Электрические машины. — М.; Л.: Госэнергиздат, 1963.

8. **Вольдек А.И.** Электрические машины. — Л.: Энергия, 1974.

9. **Иванов-Смоленский А.В.** Электромагнитные силы и преобразование энергии в электрических машинах. — М.: Высшая школа, 1989.

10. **Афанасьев А.А.** Метод сопряжения конформных отображений в задачах электромеханики. — Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2011.

[26.04.12]

А в т о р ы : Афанасьев Александр Александрович окончил электромеханический факультет Московского энергетического института (МЭИ) в 1962 г. Докторскую диссертацию «Совместная работа синхронной машины со статическим преобразователем частоты (теория и приложения)» защитил в МЭИ в 1991 г. Заведующий кафедрой управления и информатики в технических системах (УИТС) Чувашского государственного университета (ЧГУ).

Белов Владимир Владимирович окончил факультет радиозлектроники и информатики ЧГУ в 2005 г. Старший преподаватель кафедры УИТС ЧГУ.

Ефимов Вячеслав Валерьевич окончил факультет радиозлектроники и информатики ЧГУ в 2000 г. Кандидатскую диссертацию «Численное и экспериментальное исследование электромеханических компонентов автоэлектронных систем» защитил в ЧГУ в 2011 г. Электромеханик службы связи филиала ООО «Газпром трансгаз Нижний Новгород», Чебоксарское ЛПУМГ.

Николаев Алексей Васильевич окончил факультет радиозлектроники и информатики ЧГУ в 2000 г. Кандидатскую диссертацию «Разработка и исследование беспазовых электромеханических компонентов ветроэнергетических и вентильно-машинных систем» защитил в Казанском энергетическом университете в 2006 г. Доцент кафедры УИТС ЧГУ.

* * *

Уважаемые авторы!

Редакция публикует при каждой статье краткие сведения об авторах. В связи с этим просим вас при направлении статьи в редакцию сообщать:

- полные имена и отчества всех авторов;
- какой факультет, какого вуза и когда закончил;
- когда получил ученую степень, где и по какой тематике (теме) была защита;
- место работы и должность.

Кроме того, напоминаем, что на каждую статью следует представлять краткий (4—5 предложений) реферат на русском и английском языках (включая название), а также ключевые слова.