

Граничные условия на поверхностях тонких проводящих слоев для плоской волны электромагнитного поля

МИХАЙЛОВ В.М.

Сформулированы граничные условия первого и второго приближения на поверхностях тонких проводящих слоев, расположенных в квазистационарном электромагнитном поле, которые основаны на допущениях о распределении тока по толщине слоя и плоской волны. Приведен критериальный анализ погрешностей и дано сопоставление полученных условий с известными граничными условиями и формулами Г. Кадена для расчета коэффициентов экранирования сферической и цилиндрической проводящей оболочек.

Ключевые слова: электромагнитное поле, тонкий проводящий слой, граничные условия, коэффициент экранирования

Для электромагнитного экранирования и в технике сильных импульсных магнитных полей применяют тонкие металлические оболочки и системы с такими оболочками и слоями: например, электромагнитные экраны различной формы, деформируемые цилиндрические оболочки, биметаллические соленоиды и др. Расчет электромагнитного поля в таких устройствах существенно упрощается при использовании приближенных граничных условий, позволяющих исключить из расчетной области тонкую оболочку или слой.

Формулировке приближенных граничных условий на поверхностях тонких оболочек и слоев в электростатическом, магнитостатическом и переменном электромагнитном поле посвящены многие исследования [1–6]. Наибольшее распространение получили две методики формулировки таких условий. Первая, предложенная Л.А. Цейтлиным для магнитостатического поля [1], основана на разложении потенциала поля и его производной по степеням толщины тонкого слоя и последующей замене их соответствующими функциями на границах слоя со стороны прилегающих сред. Эта методика была использована в статье [5] для формулировки приближенных граничных условий в переменном электромагнитном поле с учетом токов смещения. Вторая методика, развитая С.В. Жуковым применительно к тонким проводящим оболочкам в квазистационарном переменном электромагнитном поле [2, 3], основана на замене реального тонкого слоя бесконечно тонким с конечными поверхностными магнитной проницаемостью и электропроводностью. При этом определены «средние»

The first- and second-approximation boundary conditions are formulated at the surfaces of thin conducting layers locating in quasi steady-state electromagnetic field that are based on the assumptions about the distribution of current over the layer thickness and about a plane wave. A criterion analysis of errors is presented, and the obtained conditions are compared with well-known H. Kaden's boundary conditions and formulas for calculating the shielding factors for conducting spherical and cylindrical shells.

Key words: electromagnetic field, thin conducting layer, boundary conditions, shielding factor

по толщине слоя (согласно частному случаю теоремы о среднем [7]) напряженности электромагнитного поля для двух приближений.

В первом приближении [2], которое в дальнейшем будем называть линейным, приняты линейные законы изменения напряженностей поля по толщине слоя. Строго говоря, напряженности поля в тонком проводящем слое не могут изменяться по линейным законам одновременно, поскольку при этом они не удовлетворяют первому основному уравнению электромагнитного поля [8] или законы их изменения по толщине слоя и соответствующие граничные условия не согласованы. Влияние этой несогласованности не было исследовано. С другой стороны, рассматриваемое приближение нельзя считать первым, поскольку простейшим, но практически интересным может быть приближение равномерного распределения тока, а следовательно, и напряженности электрического поля по толщине проводящего слоя.

Во втором известном приближении [2], которое в дальнейшем будем называть приближением плоской волны, законы изменения напряженностей поля по толщине слоя определены подобными решениями двух краевых задач для одномерных уравнений параболического типа. Отмечено, что это приближение «значительно лучше», чем линейное, однако это утверждение не было подкреплено анализом и расчетами.

Цель данной статьи – формулировка приближенных граничных условий на поверхностях тонкого проводящего слоя, находящегося в квазистационарном переменном электромагнитном поле,

на основе допущений о распределении тока по его толщине, согласованном с распределением магнитного поля, и плоской волны, сравнение их с известными приближенными граничными условиями и оценка погрешностей.

Основные допущения и обобщенная форма приближенных граничных условий. Непроводящая и немагнитная среда в переменном электромагнитном поле разделена на области 1 и 2 тонким проводящим слоем толщиной d с постоянными абсолютной магнитной проницаемостью μ и удельной электропроводностью γ (рис. 1). Полагаем, что кривизна граничных поверхностей, значения μ и γ и спектральная характеристика напряженности магнитного поля таковы, что волну электромагнитного поля в тонком слое можно считать плоской [9]. Токами смещения в тонком слое и вблизи него пренебрегаем.

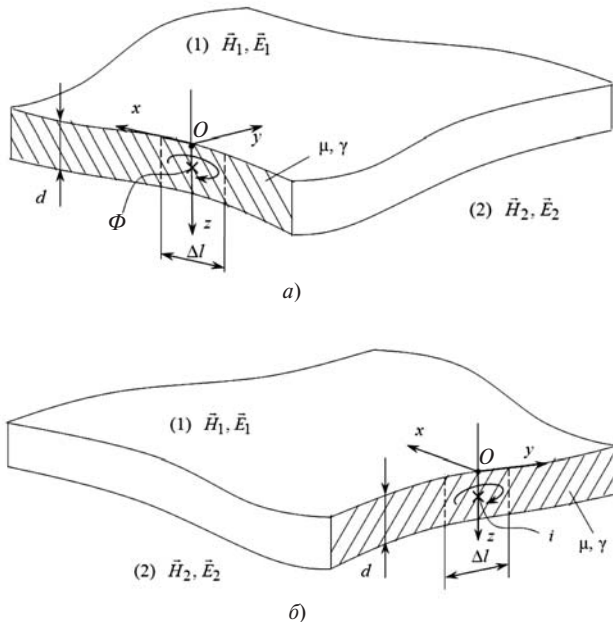


Рис. 1. Сечения тонкого проводящего слоя плоскостями $y=0$ (а) и $x=0$ (б): стрелками показаны положительные направления обхода прямоугольных контуров, согласованные с направлениями Φ, i

Введем декартовы координаты x, y, z с началом в произвольной точке O на внешней поверхности тонкого слоя и перпендикулярной к ней осью z (рис. 1). Обозначим напряженности электрического и магнитного поля: в k -й области — \vec{E}_k, \vec{H}_k , $k=1,2$; в тонком слое — \vec{E}, \vec{H} . В соответствии с принятым расположением осей декартовых координат векторы \vec{E} и \vec{H} в плоской волне имеют по одной ненулевой проекции E_x и H_y , индексы которых в дальнейшем опускаем. Для этих проекций

справедливы уравнения электромагнитного поля в дифференциальной форме [8]:

$$\frac{\partial H}{\partial z} = -gE; \tag{1}$$

$$\frac{\partial E}{\partial z} = -m \frac{\partial H}{\partial t}, \tag{2}$$

из которых могут быть получены подобные одномерные уравнения параболического типа, содержащие только одну неизвестную функцию. В частности, используемое ниже уравнение для напряженности магнитного поля имеет вид

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} - m\gamma \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \tag{3}$$

где t — время.

В отличие от [2] сформулируем обобщенные приближенные граничные условия, связывающие касательные составляющие \vec{E}_k, \vec{H}_k , в простейшей скалярной форме, более удобной для выполнения расчетов. Вначале воспользуемся законом электромагнитной индукции [8] для прямоугольного контура, расположенного в плоскости $y=0$ симметрично оси z так, что его основания достаточно малой длины Δl лежат на граничных поверхностях слоя, а высота равна толщине слоя d в точке O (рис. 1,а). Применяя также условие непрерывности касательных составляющих напряженности электрического поля на поверхностях слоя [8], получаем первое обобщенное граничное условие:

$$E_{1t} - E_{2t} = m \frac{d}{dt} \dot{H}(z,t) dz, \tag{4}$$

где E_{1t}, E_{2t} — касательные составляющие векторов $\vec{E}_{1,2}$ (их проекции на ось x).

Согласно (4) касательная составляющая напряженности электрического поля при переходе через тонкий проводящий слой претерпевает скачок, численно равный производной по времени плотности магнитного потока Φ , проходящего по этому слою в направлении оси y , на единицу длины линии пересечения соответствующей граничной поверхности слоя с плоскостью $y=0$ в окрестности точки O (линейной плотности магнитного потока).

Второе обобщенное граничное условие получаем с помощью закона полного тока и соответствующих условий непрерывности касательных составляющих \vec{H}_k и \vec{H} [8] для прямоугольного контура, аналогичного рассмотренному выше, но расположенного в плоскости $x=0$ (рис. 1,б). Имеем:

$$H_{1t} - H_{2t} = g \dot{E}(z,t) dz, \tag{5}$$

где H_{1t} , H_{2t} – касательные составляющие векторов $\vec{H}_{1,2}$ (их проекции на ось y).

Согласно (5) при переходе через тонкий проводящий слой касательная составляющая напряженности магнитного поля претерпевает скачок, численно равный току i , протекающему по этому слою в направлении оси x на единицу длины линии пересечения поверхности слоя с плоскостью $x=0$ в окрестности точки O (линейной плотности тока).

Обобщенные граничные условия (4), (5) приближенно справедливы и для неплоской волны электромагнитного поля в тонком слое, если внутри него преобладают проекции \vec{H} , \vec{E} , соответствующие E_x , H_y в плоской волне, которые должны войти в подынтегральные выражения в правых частях.

Все рассмотренные ниже приближенные граничные условия согласованы с обобщенными условиями (4), (5) (за исключением одного из условий первого приближения), а также имеют тот же физический смысл.

Первое приближение. Принимаем следующее основное допущение первого приближения: плотность тока, а следовательно и напряженность электрического поля по толщине тонкого слоя, неизменны, т.е.

$$\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \Big|_{0 \leq z \leq d} = 0; \quad (6)$$

$$\frac{\partial E}{\partial z} \Big|_{0 \leq z \leq d} = 0. \quad (7)$$

Используя (7), а также известное условие непрерывности касательных составляющих напряженности электрического поля на границах тонкого слоя [8], получаем первое граничное условие:

$$E_{1t} - E_{2t} = 0. \quad (8)$$

Согласно (8) касательная составляющая напряженности электрического поля при переходе через тонкий проводящий слой непрерывна, что является исключением первого приближения.

Второе граничное условие первого приближения получаем из (5) с учетом (7) и (8):

$$H_{1t} - H_{2t} = gdE_{1t,2t}. \quad (9)$$

Заметим, что в известных работах первое приближение не рассматривали. Кроме того, в граничные условия (8), (9) не входит магнитная проницаемость слоя, поэтому их использование ограничено тонкими слоями из немагнитных материалов.

Второе приближение. Принимаем следующее основное допущение второго приближения: плотность тока, а следовательно и напряженность электрического поля внутри тонкого слоя, являются линейными функциями z .

Следуя идее Л.А. Цейтлина [1], аппроксимируем $E(z,t)$, $H(z,t)$ такими выражениями:

$$H(z,t) = H(d,t) - (d-z) \frac{\partial H}{\partial z} \Big|_{z=d} + \frac{1}{2} (d-z)^2 \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \Big|_{z=d} - \frac{1}{6} (d-z)^3 \frac{\partial^3 H}{\partial z^3} \Big|_{z=d} + O[(d-z)^4]; \quad (10)$$

$$H(z,t) = H(0,t) - z \frac{\partial H}{\partial z} \Big|_{z=0} + \frac{1}{2} z^2 \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \Big|_{z=0} + \frac{1}{6} z^3 \frac{\partial^3 H}{\partial z^3} \Big|_{z=0} + O(z^4); \quad (11)$$

$$E(z,t) = E(d,t) - (d-z) \frac{\partial E}{\partial z} \Big|_{z=d} + \frac{1}{2} (d-z)^2 \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \Big|_{z=d} - O[(d-z)^3]; \quad (12)$$

$$E(z,t) = E(0,t) - z \frac{\partial E}{\partial z} \Big|_{z=0} + \frac{1}{2} z^2 \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \Big|_{z=0} - O(z^3); \quad (13)$$

Ряды (10), (12) представляют собой разложения $H(z,t)$, $E(z,t)$ в окрестности границы тонкого слоя $z=d$, а ряды (11), (13) – границы $z=0$ (рис. 1). Оставляя в выражениях (10)–(13) слагаемые, степени $d-z$ и z которых соответствуют рассматриваемому приближению, получаем полиномы координаты z , аппроксимирующие напряженности поля в тонком слое. При этом будем учитывать уравнение (1), согласно которому степень полиномов для $H(z,t)$ должна быть на единицу выше, чем для $E(z,t)$. Тогда полиномы и получаемые из них граничные условия будут согласованы. Этому положению не противоречат граничные условия первого приближения (8), (9): неизменности напряженности электрического поля по толщине тонкого слоя соответствуют полиномы нулевой степени для $E(z,t)$ и первой степени для $H(z,t)$, поскольку согласно (6) слагаемые более высоких степеней равны нулю.

Для составления полиномов первой степени, аппроксимирующих $E(z,t)$ во втором приближении, в (12) и (13) отбрасываем слагаемые, содержащие вторую и более высокие степени $d-z$ и z . По указанным выше причинам $H(z,t)$ аппроксимируем полиномами второй степени, которые получаем из (10) и (11) исключая слагаемые в третьей и более высоких степенях $d-z$ и z . Принимая в соответст-

вующих полиномах $z=0$ и $z=d$, а также используя обычные граничные условия на поверхностях слоя [8] и уравнения (1)–(3), приходим к двум вариантам граничных условий второго приближения:

вариант 1 (второе приближение-1), основанный на выражениях (10), (12) –

$$E_{1t} - E_{2t} = \mu d \frac{\partial H_{2t}}{\partial t}; \quad (14)$$

$$H_{1t} - H_{2t} = \frac{\partial E_{2t}}{\partial z} + \frac{1}{2} \mu d \frac{\partial H_{2t}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z}; \quad (15)$$

вариант 2 (второе приближение-2), основанный на выражениях (11), (13) –

$$E_{1t} - E_{2t} = \mu d \frac{\partial H_{1t}}{\partial t}; \quad (16)$$

$$H_{1t} - H_{2t} = \frac{\partial E_{1t}}{\partial z} - \frac{1}{2} \mu d \frac{\partial H_{1t}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z}; \quad (17)$$

Правые части (14), (16), а также вторые слагаемые в скобках правых частей (15), (17) можно рассматривать как поправки второго приближения в граничных условиях (8), (9) первого приближения. Согласованность полученных граничных условий проявляется в том, что в соответствии с (5) правые части (15), (17) могут быть получены также интегрированием соответствующих линейных зависимостей $E(z,t)$ по толщине тонкого слоя.

Различия вариантов 1 и 2 граничных условий второго приближения обусловлены тем, что в каждом из них напряженность электрического поля внутри тонкого слоя аппроксимируется различными линейными зависимостями, поскольку

$$\left. \frac{\partial H_{2t}}{\partial t} \right|_{z=d} \neq \left. \frac{\partial H_{1t}}{\partial t} \right|_{z=0}$$

и, как следствие, согласно (2)

$$\left. \frac{\partial E}{\partial z} \right|_{z=d} \neq \left. \frac{\partial E}{\partial z} \right|_{z=0}.$$

Складывая граничные условия (14) и (16), получаем:

$$E_{1t} - E_{2t} = \frac{1}{2} \mu d \frac{\partial}{\partial t} (H_{1t} + H_{2t}). \quad (18)$$

С одной стороны, выражение (18) есть усредненное граничное условие для касательных составляющих E_k^r на границах тонкого слоя и, естественно, соответствует одному из граничных условий линейного приближения [2], а с другой – условие эквивалентности граничных условий (15) и (17). Действительно, приравнявая правые части последних, получаем (18). Следовательно, третьим вари-

антом граничных условий второго приближения (второе приближение-3) являются выражения (18) и (15), или (18) и (17). Граничные условия второго приближения позволяют учесть магнитную проницаемость тонкого слоя.

Во всех полученных выше приближенных граничных условиях использованы уравнения плоской волны электромагнитного поля (1) – (3): в первом приближении – для составления полинома первой степени, аппроксимирующего $H(z,t)$; во втором приближении – для составления полиномов, аппроксимирующих и $H(z,t)$, и $E(z,t)$.

Линейное приближение и приближение плоской волны. Граничные условия этих известных приближений [2] потребуются для сравнения с полученными в данной статье. Сформулируем их, как и все предыдущие, в простейшей скалярной форме, используя изображения по Лапласу. Пусть изображения напряженностей электромагнитного поля внутри тонкого слоя равны:

$$\begin{aligned} H(z,p) &= \frac{1}{\text{sh}(d\sqrt{pmg})} \{ H_1(p) \cdot \text{sh}[(d-z)\sqrt{pmg}] + \\ E(z,p) &= \frac{H_2(p)}{E_2(p)} \cdot \text{sh}(z\sqrt{pmg}) \}, \end{aligned} \quad (19)$$

где $H_1(p) \ll H_{1t}$, $H_2(p) \ll H_{2t}$, $E_1(p) \ll E_{1t}$, $E_2(p) \ll E_{2t}$; p – параметр интегрального преобразования Лапласа.

Формулы (19) представляют собой известные решения краевых задач для уравнений вида (3) в изображениях по Лапласу, в частности для $p = j\omega$ ($j = \sqrt{-1}$; ω – угловая (круговая) частота) подобные формулы приведены в [2]. Множители $H_1(p)$, $H_2(p)$ относятся к $H(z,p)$, $E_1(p)$, $E_2(p)$ – к $E(z,p)$.

При нулевых начальных условиях обобщенные приближенные граничные условия (4) и (5) в изображениях принимают вид:

$$E_1(p) - E_2(p) = \int_0^d pm \frac{\partial}{\partial z} H(z,p) dz; \quad (20)$$

$$H_1(p) - H_2(p) = \int_0^d \frac{\partial}{\partial z} E(z,p) dz. \quad (21)$$

Подстановка $H(z,p)$ и $E(z,p)$ из (19) в (20), (21) приводит к следующим граничным условиям приближения плоской волны:

$$E_1(p) - E_2(p) = \sqrt{\frac{pm}{g}} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^d \sqrt{pmg} \frac{\partial}{\partial z} [H_1(p) + H_2(p)] dz; \quad (22)$$

$$H_1(p) - H_2(p) = \frac{\frac{\partial}{\partial z} \int_0^d \sqrt{pmg} \frac{\partial}{\partial z} [E_1(p) + E_2(p)] dz}{\sqrt{\frac{pm}{g}}}. \quad (23)$$

При малых значениях $|d\sqrt{pmg}|$ изображение $\sqrt{\frac{pm}{g}} \frac{\partial d}{\partial z} \sqrt{\frac{pmg}{\partial}} \gg \frac{1}{2} pmd$, а $\frac{\partial d}{\partial z} \sqrt{\frac{pmg}{\partial}} \gg \frac{1}{2} gd$ и оригинал (22) принимает форму (18), а оригинал (23) равен

$$H_{1t} - H_{2t} = \frac{1}{2}gd(E_{1t} + E_{2t}). \quad (24)$$

Выражения (18) и (24) представляют собой граничные условия известного линейного приближения [2]. Заметим, что для их получения не нужно использовать допущение плоской волны, достаточно для вычисления интегралов в (4), (5) применить теорему о среднем [7].

Примеры расчетов и сравнение с формулами Г. Кадена. Рассмотрим тонкую сферическую или цилиндрическую проводящую оболочку, помещенную в однородное установившееся синусоидальное магнитное поле, причем вектор его напряженности направлен поперек оси цилиндрической оболочки. Толщина оболочки равна d , наружный радиус – R , $d \ll R$. Соблюдаются условия квазистационарности и все остальные допущения, описанные в начале статьи. Требуется рассчитать результирующее магнитное поле с учетом вихревых токов, индуцированных в оболочке.

Формулы для расчета коэффициентов экранирования. Используя скалярный потенциал магнитного поля для непроводящих областей, напряженности электрического и магнитного полей для проводящих слоев оболочек, а также обычные граничные условия, Г. Каден получил аналитические решения этих задач и такие формулы для расчета коэффициентов экранирования [10, с. 37, 45]:

$$S = \frac{H_{\phi}^e}{H_{\phi}^i} = \frac{\partial \text{ch}(kd) + C_{2s} \frac{\partial}{\partial} K + \frac{C_{1s}}{K} \frac{\partial}{\partial} \text{sh}(kd) \dot{u}}{\partial \dot{u}}, \quad (25)$$

где H_{ϕ}^e, H_{ϕ}^i – комплексные действующие значения напряженностей магнитного поля, проникшего внутрь оболочки, и внешнего магнитного поля;

$$k = \sqrt{j\omega mg + 2^{s-1} / R^2}; \quad K = \frac{m_0}{m} kR;$$

$$C_{1s} = 2^{s-1}; \quad C_{2s} = (1 + 2^{s-1})^{-1}.$$

В формуле (25) и приведенных ниже формулах следует принять для цилиндрической оболочки $s=1$, сферической – $s=2$.

В отличие от методики [10] с помощью приближенных граничных условий (8), (9), (14)–(18) из расчетной области была исключена проводящая

оболочка, получены решения задач и определены коэффициенты экранирования:

в первом приближении

$$S = \frac{\dot{e}}{\dot{e}} \left[1 + C_{2s} \frac{\partial}{\partial} C_{1w} - \frac{d \ddot{u}}{R \dot{u}} \right]^{-1}; \quad (26)$$

во втором приближении-1

$$S = [1 + C_{2s} (C_{1m} + C_{2w})]^{-1}; \quad (27)$$

во втором приближении-3

$$S = [1 + C_{2s} (C_{1m} + C_{2w} C_{2m})]^{-1}, \quad (28)$$

где $C_{1m} = \frac{d \partial}{\partial} C_{1s} \frac{m}{m_0} - \frac{\partial}{\partial} C_{2m} = 1 + \frac{1}{2} \frac{m}{m_0} \frac{d}{R};$

$$C_{1w} = j\omega m_0 g d \frac{\partial}{\partial} - \frac{d \partial}{R \partial} C_{2w} = C_{1w} + C_{1s} (k d^2) / 2; \\ k \phi = \sqrt{j\omega mg}.$$

Формулы для расчета коэффициентов экранирования в приближении плоской волны, полученные с использованием граничных условий (22), (23) при $p = j\omega$:

$$S = \frac{\dot{e}}{\dot{e}} \left[1 - C_{2s} \frac{d \partial}{R \partial} \text{ch}(k d) + C_{2s} \frac{\partial}{\partial} \left[1 - \frac{d \partial}{R \partial} + \frac{C_{1s}}{K} \frac{\partial}{\partial} \text{sh}(k d) \dot{u} \right] \right]^{-1}, \quad (29)$$

а в линейном приближении (граничные условия (18), (24)):

$$S = [1 - (k d)^2 / 4] / \left[1 + C_{2s} \left(\frac{\dot{e}}{\dot{e}} C_{1m} + C_{1w} + \frac{\partial}{\partial} C_{2s}^{-1} - \frac{d \partial}{R \partial} (k d)^2 / 4 \dot{u} \right) \right]^{-1}. \quad (30)$$

Выполняя необходимые преобразования, можно убедиться, что формула в [2, с. 1153] при $m > m_0$, вопреки утверждению автора, не преобразуется в формулу Г. Кадена для сферической оболочки (25), а совпадает с формулой линейного приближения (30), если в последней дополнительно пренебречь величиной d/R .

Уточняющие множители. Можно показать, что при выполнении условия

$$R^2 \omega mg \gg 2^{s-1} \quad (31)$$

волна электромагнитного поля, проникающего в тонкую проводящую оболочку, приближается к плоской. При этом формула (25) должна преобразовываться в формулу (29), справедливую для приближения плоской волны. Однако, несмотря на то,

что k в аргументах гиперболических функций переходит в $k\phi$ это преобразование оказывается невозможным из-за множителей $1 - C_{2s} d/R$ и $1 - d/R$ в формуле (29). Причина появления последних – точное задание декартовой координаты внутренней поверхности оболочек $z=d$, иначе – неправильно (рис. 2). В выкладках Г. Кадена при определении радиальных проекций \vec{H}_2 на этой поверхности вместо точной радиальной координаты $r=R-d$ использована приближенная – $r \approx R$ [10, с. 37, 45].

Устранение этой погрешности приводит к уточненной формуле:

$$S_y = \frac{i\epsilon_0}{i\epsilon} \left(1 - C_{2s} \frac{d}{R} \right) \frac{d}{R} \frac{\ddot{\phi}}{\phi} \text{ch}(kd) + C_{2s} \frac{d}{R} \frac{\ddot{\phi}}{\phi} \text{sh}(kd) + C_{2s} \frac{d}{R} \frac{\ddot{\phi}}{\phi} \text{ch}(kd) + C_{2s} \frac{d}{R} \frac{\ddot{\phi}}{\phi} \text{sh}(kd) \quad (32)$$

которая при выполнении условия (31) переходит в формулу (29). Заметим, что при невыполнении этого условия погрешность, обусловленная упрощением уравнения для напряженности электрического поля в оболочке [10], остается и в формуле (32).

На рис. 3 показано влияние уточняющих множителей на значения модулей коэффициентов экранирования, рассчитанных по формулам Г. Кадена (25). Относительные расхождения

$$z = \left(\left| S_y - |S| \right| / |S_y| \right) \times 100\% \quad (33)$$

вычислены в зависимости от критериев подобия d/D_0 (D_0 – глубина проникновения электромагнитного поля [8] при $m = m_0$), d/R и $m_r = m/m_0$.

Естественно, что рассматриваемые расхождения тем меньше, чем меньше значение d/R , и при $d/R=0,01$ расхождения не превосходят 1% (рис. 3,а, кривые 1, 4, точки вблизи 1). При $m_r = 1$ с ростом d/D_0 они стремятся к значению, близкому к d/R как для сферической, так и для цилиндрической

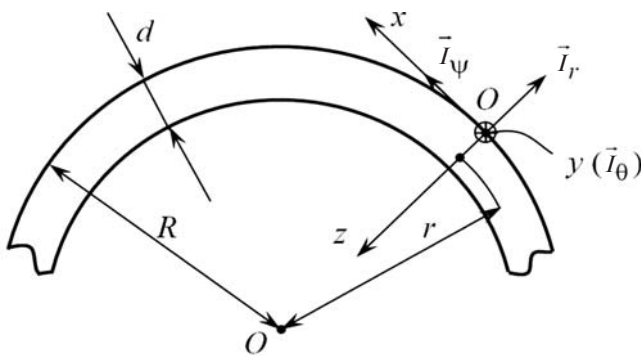


Рис. 2. Декартовы координаты с началом в произвольной точке O на внешней поверхности сферической оболочки ($\vec{I}_{r,q,y}$ – орты сферических координат; направления оси y и орта \vec{I}_q по-

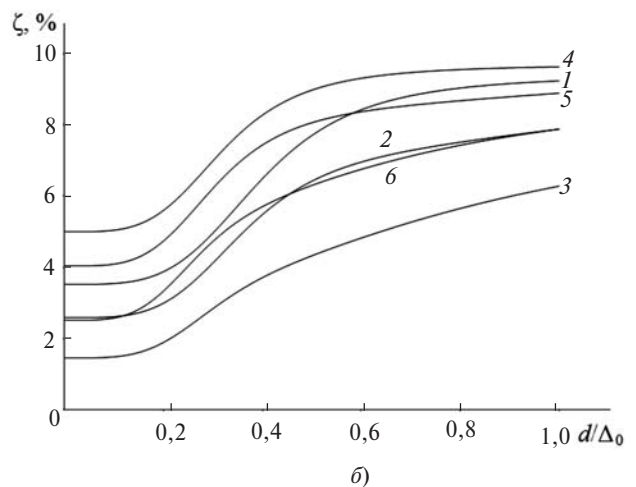
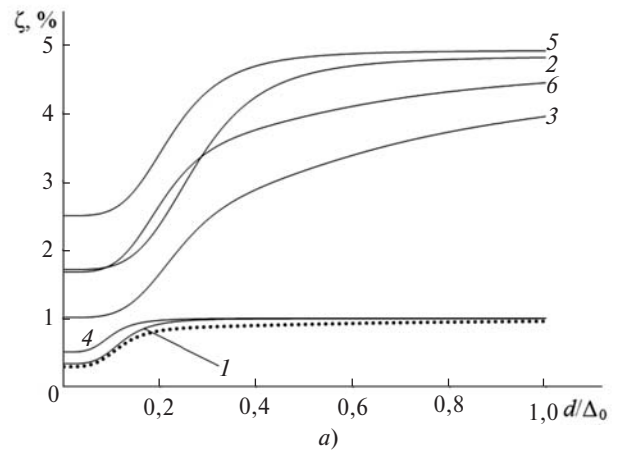


Рис. 3. Кривые, характеризующие влияние уточняющих множителей на коэффициенты экранирования сферической (кривые 1–3, точки вблизи 1) и цилиндрической (кривые 4–6) оболочек: а – 1, точки вблизи 1; 4 – $d/R = 0,01$; 2, 6 – $d/R = 0,05$; 1, 2, 4, 5 – $m_r = 1$; 3, 6, точки вблизи 1 – $m_r = 20$; б – $d/R = 0,1$; 1, 4 – $m_r = 1$; 2, 5 – 5; 3, 6 – 20

ской оболочки, и при $d/R=0,1$ достигают примерно 10% (рис. 3,а: кривые 1, 4, 2, 5; рис. б: кривые 1, 4). Увеличение m_r приводит к уменьшению z (рис. 3,б: кривые 2 и 3, 5 и 6).

Погрешности приближений при $\mu > \mu_0$. Принимая во внимание уточнение известных формул [10], погрешности всех приближений при $\mu > \mu_0$ будем характеризовать относительными расхождениями модуля коэффициента экранирования в соответствующем приближении и $|S_y|$ (формула (33)). На рис. 4 показаны зависимости относительных расхождений z от критериев подобия d/D_0 , d/R и m_r для сферической оболочки. При $d/D_0 \rightarrow 0$ ($w=0$) вихревые токи в оболочке исчезают и она становится магнитоэлектрическим экраном. При малых значениях $d/D_0 > 0$ расхождения z весьма малы и практически одинаковы для всех приближений, что следует из формул (26)–(30). В приближении плоской волны они минимальны и в отличие от остальных приближений с ростом d/D_0 стремятся к нулю

вследствие выполнения условия (31) (рис. 4,б, кривая 5).

Поскольку в основе остальных приближений лежит допущение о линейном распределении тока по толщине оболочки, при увеличении d/R , μ_r и

d/D_0 значения z возрастают из-за отклонения действительного распределения тока от линейного (кривые 2–4). Значительно меньшие расхождения z во втором приближении-1 (кривые 2) и во втором приближении-3 (кривые 3) – благодаря более точным граничным условиям для напряженностей магнитного поля.

Худшим из трех вариантов второго приближения является вариант-2, кривые для которого на рис. 4 не показаны. Причина – более сложная картина результирующего магнитного поля на внешней поверхности оболочек по сравнению с однородным полем внутри них из-за влияния магнитного поля вихревых токов. Поскольку в линейном приближении и во втором приближении-3 использовано граничное условие (18), в котором имеется производная по времени H_{1t} , эта же причина привела к быстрому росту значения z при относительно небольших значениях d/D_0 (кривые 3, 4). Однако во втором приближении-3 рост z ограничен (кривые 3), что можно объяснить влиянием более точного, чем (24), второго граничного условия (15). Точки вблизи кривой 1 на рис. 4 иллюстрируют изменения знака $|S_y| - |S|$, вызвавшие сложную форму кривых 3.

Подобный характер имеют зависимости z и для цилиндрических оболочек.

Погрешности приближений при $\mu = \mu_0$. В этом случае при $d/D_0 \ll 1$ ($w \ll 0$) коэффициент экранирования должен стремиться к единице. Однако в отличие от предыдущего случая ($\mu > \mu_0$) при $w = 0$ магнитоэстатическая задача не имеет смысла, поэтому формулы (25) и (32) при малых значениях d/D_0 приводят к погрешностям порядка d/R $\frac{\partial}{\partial t} \frac{d}{R} \frac{\partial}{\partial t}$ и $d/(2R)(d/R)$ (в скобках – погрешности

для сферической оболочки), которые существенно меньше для S_y . По этой же причине следует ожидать увеличения погрешностей расчетов при небольших значениях μ/μ_0 . Это подтверждается кривыми 1–3 на рис. 5, где расхождения z определены относительно $|S|$ в приближении плоской волны. Во всем рассматриваемом промежутке значений d/D_0 при $d/R \leq 0,1$ меньшие значения z (не превышающие 2%) наблюдаются для второго приближения-1 (кривые 5). Для линейного приближения, как и при $\mu > \mu_0$, расхождения z неограниченно возрастают, причем скорость этого роста увеличивается с увеличением d/R (кривые 4). Для первого приближения (кривые 7) расхождения z не превосходят 2% только для очень тонких оболочек (рис. 5,а), а при $d/R = 0,05$ достигают 6% и более и больше, чем в линейном приближении (рис. 5,б).

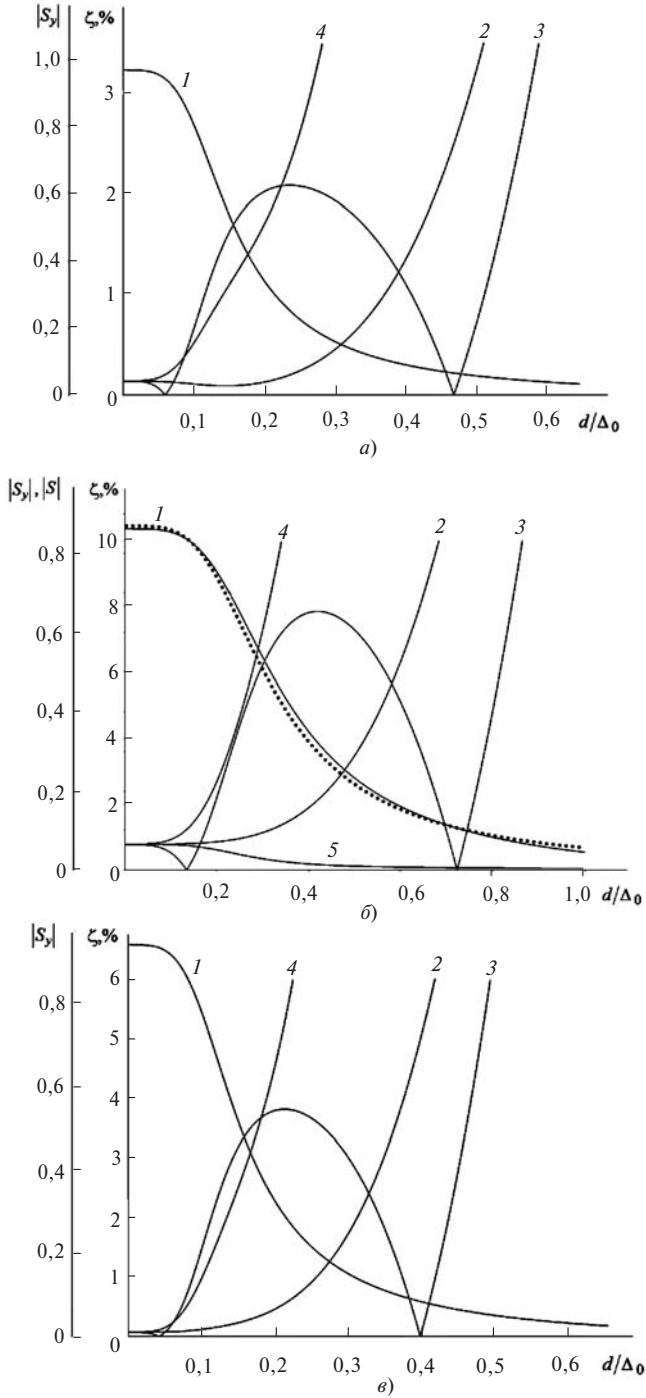


Рис. 4. Зависимости $|S_y|$ (кривые 1) и z от критериев подобия для сферической оболочки: кривые 2 – второе приближение-1, 3 – второе приближение-3, 4 – линейное приближение, 5 – приближение плоской волны; точки вблизи кривой 1 – $|S_y| - |S|$ во втором приближении-3; а – $d/R = 0,01$, $\mu_r = 5$; б – $d/R = 0,05$, $\mu_r = 5$; в – $d/R = 0,01$, $\mu_r = 10$

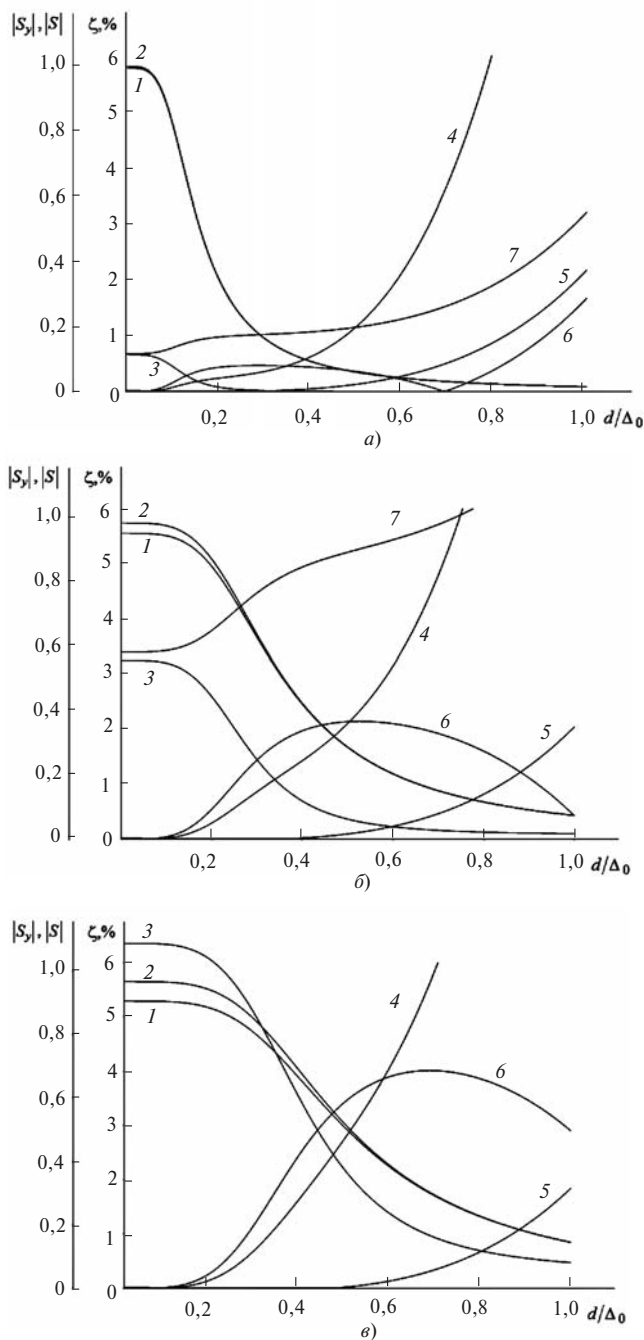


Рис. 5. Зависимости $|S_y|$ (кривые 1), $|S|$ в приближении плоской волны (кривые 2) и z (кривые 3–7) от критериев подобия для сферической оболочки при $\mu = \mu_0$: а — $d/R = 0,01$; б — $d/R = 0,05$; в — $d/R = 0,1$; кривые 3 — для $|S_y|$, 4 — для линейного приближения, 5 и 6 — для второго приближения-1 и 3, 7 — для первого приближения

Выводы. 1. При допущении плоской волны на поверхностях тонких проводящих слоев и оболочек могут быть сформулированы такие приближенные граничные условия, связывающие между собой касательные составляющие напряженностей электромагнитного поля: граничные условия первого приближения, для которых распределение тока по толщине слоя принимается равномерным; граничные

условия второго приближения — это распределение линейно относительно координаты z ; граничные условия приближения плоской волны — напряженности поля в слое находятся из решений соответствующих краевых задач для одномерных уравнений параболического типа [2]. Граничные условия приближения плоской волны являются наиболее точными, но и наиболее сложными, поскольку содержат гиперболические функции комплексного аргумента. Граничные условия первого приближения менее точные и применимы к тонким слоям из немагнитных материалов.

2. В зависимости от граничной поверхности тонкого слоя (внутренней, $z = d$ или внешней, $z = 0$, рис. 1), вблизи которой напряженность электрического поля аппроксимируется линейной зависимостью по координате z , могут быть получены два основных варианта граничных условий второго приближения, соответственно 1 или 2. В этих вариантах линейные зависимости различны, что приводит к различным значениям скачка касательных составляющих \vec{H}_k при переходе через тонкий слой. Согласованность граничных условий второго приближения-1 и 2 заключается в том, что напряженность магнитного поля в тонком слое аппроксимируется соответствующими полиномами второй степени относительно координаты z и удовлетворяют закону полного тока.

3. Усреднение граничных условий второго приближения-1 и 2 для напряженности электрического поля эквивалентно упомянутым выше скачкам касательных составляющих \vec{H}_k и приводит к граничному условию известного линейного приближения [2]. Усредненное граничное условие для напряженности электрического поля может быть использовано в сочетании со вторым граничным условием (для касательных составляющих \vec{H}_k) любого из двух основных вариантов второго приближения.

4. Известные формулы Г. Кадена для расчета коэффициентов экранирования тонкостенных цилиндрической и сферической оболочек с увеличением частоты внешнего магнитного поля должны переходить в формулу (29) приближения плоской волны. Это не происходит из-за погрешности, обусловленной принятым на внутренних поверхностях оболочек значением множителя $1/r$ в формуле для расчета радиальной проекции напряженности магнитного поля $1/R$ вместо $1/(R-d)$ [10, с. 37, 45]. Рассматриваемая погрешность с увеличением частоты (критерия d/D_0) стремится к значению величины d/R .

5. Граничные условия второго приближения позволяют получить простые формулы для расчета коэффициентов передачи и операторных коэффициентов передачи (в случае экранирующих оболочек — коэффициентов экранирования) между напряженностями магнитного поля на границах слоя со стороны прилегающих сред или их изображениями. На значительной части спектральных характеристик модулей коэффициентов экранирования тонкостенных сферических и цилиндрических проводящих оболочек при $d/R \ll 0,5$ и $1 \text{ мк}, \ll 10$ граничные условия второго приближения-1 и 3 приводят к относительным расхождениям с условно точными результатами порядка нескольких процентов (рис. 4, 5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Цейтлин Л.А. Об определении магнитных и электрических полей тонких слоев и оболочек. — Журнал технической физики, 1958, т. 28, вып. 6.
2. Жуков С.В. О граничных условиях для определения переменных магнитных полей тонких металлических оболочек. — Журнал технической физики, 1969, т. 39, вып. 7.
3. Жуков С.В. Электромагнитные параметры плоских и трубчатых шин. — Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1970, № 2.
4. Аполлонский С.М. Расчет электромагнитных экранирующих оболочек. — Л.: Энергоиздат, 1982.
5. Шпицберг В.Е. О приближенных граничных условиях электродинамики для тонких экранов. — Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1989, № 1.
6. Михайлов В.М. Исходные соотношения и приближенные граничные условия для расчета поля в системах с тонкими слоями. — Электричество, 2007, № 3.
7. Смирнов В.И. Курс высшей математики, т. 1. — М.; Л.: ГИИТЛ, 1951.
8. Нейман Л.Р., Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники, т. 2. — Л.: Энергоиздат, 1981.
9. Никольский В.В. Теория электромагнитного поля. — М.: Высшая школа, 1964.
10. Каден Г. Электромагнитные экраны в высокочастотной технике и технике электросвязи. — М.; Л.: Госэнергоиздат, 1957.

[09.08.12]

Автор: Михайлов Валерий Михайлович окончил электромашиностроительный факультет Харьковского политехнического института (ХПИ) в 1966 г. В 1985 г. защитил докторскую диссертацию по исследованиям поверхностного эффекта в проводниках при получении сильных импульсных магнитных полей во ВНИИ электромашиностроения. Профессор кафедры инженерной электрофизики Национального технического университета «Харьковский политехнический институт» (ранее ХПИ), Украина.