

Интервальные и двусторонние методы расчета магнитных систем

НЕКРАСОВ С.А.

Рассматриваются интервальные и двусторонние варианты цепевых методов расчета магнитных систем электромагнитных приводных механизмов. Предложенные методы позволяют находить решение с гарантированной точностью и с учетом погрешности в исходных данных задачи.

Ключевые слова: *приводные механизмы, магнитная система, погрешность, точность, методы расчета*

Магнитные системы (МС) являются важной частью широкого класса систем автоматики и телемеханики. Одной из актуальных задач для рассматриваемых МС является расчет с гарантированной точностью их параметров, в том числе с учетом погрешности исходных данных.

Рассмотрим часто решаемую в приложениях задачу расчета магнитной цепи электромагнита П-образного типа постоянного тока. Совместим начало координат с верхним обрезом стержня магнитопровода (рис. 1), тогда согласно [1] распределение магнитного потока Φ и магнитного напряжения между стержнями U вдоль координаты x описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} d\Phi / dx &= l(x)U(x); \\ dU / dx &= (R_1 + R_2)\Phi - f, \end{aligned} \quad (1)$$

где $l(x)$ — удельная (средняя на единицу длины) магнитная проводимость между стержнями магнитопровода; R_1, R_2 — удельные магнитные сопротивления стержней, которые определяются значением магнитного потока в стержнях магнитопровода; f — удельная магнитодвижущая сила обмотки.

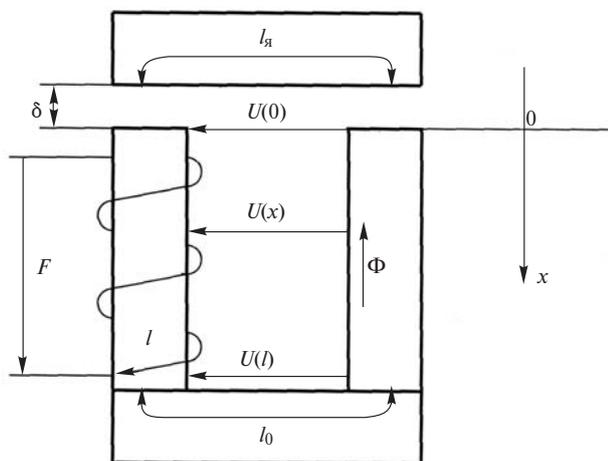


Рис. 1. Схема электромагнита П-образного типа

Interval and two-sided versions of circuit methods for calculating the magnetic systems of electromagnetic driving mechanisms are considered. The use of the proposed methods makes it possible to find a solution with guaranteed accuracy and taking into account the error in the initial data of a problem.

Key words: *driving mechanisms, magnetic system, error, accuracy, calculation methods*

Полная постановка задачи включает в себя различного рода краевые условия. Например, если задано значение магнитного потока в воздушном зазоре $\Phi(0) = \Phi_0$, то магнитное напряжение $U(0)$ между стержнями вычисляется по формуле

$$U(0) = \Phi(0)(R_{d1} + R_{я}(\Phi(0) + R_{d2})), \quad (2)$$

где R_{d1}, R_{d2} — магнитные сопротивления воздушных зазоров; $R_{я}$ — магнитное сопротивление якоря.

В основании магнитопровода выполняется второе граничное условие:

$$U(l) = -R_{oc}\Phi(l), \quad (3)$$

где $R_{oc} = R_{oc}(\Phi(l))$ — магнитное сопротивление основания магнитопровода.

Из (1)–(3) может быть найдено значение удельной магнитодвижущей силы обмотки. Один из алгоритмов итерационного уточнения значений f описан в [1].

В практике проектных и поверочных расчетов электромагнитов возможны другие постановки задачи расчета магнитной цепи:

заданы поток в зазоре $\Phi(0)$ и удельная магнитодвижущая сила f , требуется найти соответствующую длину стержней l ;

заданы значения f, l , требуется найти значение потока в зазоре $\Phi(0)$.

Геометрические параметры электромагнита, характеристика намагничивания стали могут быть заданы в интервальном виде, при этом удельные проводимости, сопротивления и магнитодвижущая сила являются интервальнозначными функциями. Для нахождения интервального решения соответствующих краевых задач можно применять описанные в [2–6] интервальные и двусторонние методы.

Интервальный метод решения задачи (1)–(3). Введем следующие обозначения: $x_1 = \Phi / S$, $x_2 = U$, $t = x$, $k(t) = l(t) / S$, где S — площадь поперечного сечения стержней магнитопровода;

$R_1 + R_2 = 2r(x_1)/S$, где $r(x_1)$ — удельное магнитное сопротивление магнитопровода; $r(x_1)x_1 = H(x_1)$ — напряженность магнитного поля в стержнях.

С учетом этих обозначений краевая задача для расчета магнитной цепи может быть записана в виде:

$$dx_1/dt = k(t)x_2, \quad dx_2/dt = 2H(x_1) - f, \quad t \in (0, l); \quad (4)$$

$$\begin{aligned} x_1(0) &= x_{10} - \Phi(0)/S, \\ x_2(0) &= x_{20} = x_1(0)2d_p/m_0 + (l_k + a)H(x_1(0))a/a_{\text{я}}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$x_2(l) = -H(x_1(l))l_{\text{ос}}, \quad (6)$$

где $R_{\text{д1}} + R_{\text{д2}} = 2d_p/(m_0S)$; d_p — расчетная ширина воздушного зазора; $l_{\text{ос}}$ — длина основания магнитопровода; поперечные сечения основания и стержней магнитопровода предполагаются одинаковыми, $S = ab$ (a и b — размеры поперечного сечения магнитопровода); $a_{\text{я}}$ — толщина якоря; $S_{\text{я}} = a_{\text{я}}b$ — площадь его поперечного сечения; l_k — ширина окна электромагнита.

Очевидно, что в рассматриваемом случае значения $x_1(t)$ положительные, а величина $x_2(t)$ является знакопеременной на интервале $(0, l)$.

Исследуем характер зависимостей решения задач Коши (1)—(2), (4)—(5) от начальных условий и других параметров задачи. Производные по начальным условиям от решения удовлетворяют следующим задачам Коши:

$$\begin{aligned} d/dt(\partial x_1/\partial x_{j0}) &= k(t)\partial x_2/\partial x_{j0}; \\ d/dt(\partial x_2/\partial x_{j0}) &= 2dH/dB(x_1)\partial x_1/\partial x_{j0}, \quad t \in (0, l); \\ \partial x_1/\partial x_{j0}(0) &= d_{j1}, \quad \partial x_2/\partial x_{j0}(0) = d_{j2}, \quad j=1,2. \end{aligned}$$

Так как $dH/dB(x_1) > 0$, $k(t) \geq 0$, $\partial x_1/\partial x_{j0}(0) \geq 0$, $i, j=1,2$, то решения вышезаписанных задач Коши являются неотрицательными функциями параметра t :

$$\partial x_1/\partial x_{j0}(t) \geq 0, \quad i, j=1,2.$$

Таким образом, функция решения задачи (1)—(2) монотонно возрастает с увеличением значений начальных условий.

Чтобы исследовать характер зависимости решения задачи от значений величин f и k , которые в общем случае являются функциями параметра t , воспользуемся принципом максимума Понтрягина. Предположим, что требуется максимизировать значение $x_1(t_F)$ при условии, что $f \in [f^-, f^+]$, $k(t) \in [k^-(t), k^+(t)]$, $t_F > 0$.

Функция Гамильтона имеет вид

$$G = (1 + p_1)kx_2 + p_2(2H(x_1) - f).$$

Условие $G = \max_{f,k}$ эквивалентно требованию

$$kp_1x_2 - fp_2 = \max_{f,k}. \quad (7)$$

Сопряженная система ОДУ имеет вид:

$$\begin{aligned} dp_1/dt &= -2p_2dH/dB(x_1); \quad dp_2/dt = -k(1 + p_1); \\ t \in (0, t_F); \end{aligned}$$

$$p_1(t_F) = 0, \quad p_2(t_F) = 0.$$

Так как $-2dH/dB(x_1) < 0$, $-k \leq 0$, то

$$t \in (0, t_F) \quad dp_1/dt \leq 0, \quad dp_2/dt \leq 0,$$

откуда

$$p_1(t) \geq 0, \quad p_2(t) \geq 0. \quad (8)$$

Из (7), (8) следует $f = f^-$, $k = m(K) + 1/2w(K)\text{sign}(x_2)$, где $m(K)$ — середина интервала K , а $w(K)$ — его ширина.

Если требуется максимизировать значение $x_1(t_F)$ при тех же условиях, то функция Гамильтона запишется следующим образом:

$$kp_1x_2 - f(1 + p_2) = \max_{f,k}. \quad (9)$$

Соответствующая сопряженная система ОДУ имеет вид:

$$dp_1/dt = -2(1 + p_2)dH/dB(x_1);$$

$$dp_2/dt = -kp_1; \quad t \in (0, t_F);$$

$$p_1(t_F) = 0, \quad p_2(t_F) = 0.$$

Из (9) с учетом (8) следует $p_1(t) \geq 0$, $p_2(t) \geq 0$, откуда $f = f^-$, $k = m(K) + 1/2w(K)\text{sign}(x_2)$.

Аналогичным образом можно показать, что минимум значений решения $x_1(t_F)$ и $x_2(t_F)$ при $t_F > 0$ достигается при

$$f = f^+, \quad k = m(K) - 1/2w(K)\text{sign}(x_2).$$

Таким образом, доказан монотонный характер зависимостей решения задач Коши (1)—(2), (4)—(5) от начальных условий и значений удельной магнитодвижущей силы f . Зависимость решения от значений коэффициента рассеяния потока $k(t)$ имеет более сложный характер. В силу данного свойства решения следующих ниже задач Коши будут являться двусторонними оценками к решению системы (4)—(5):

$$dx_1^{\pm}/dt = m(K)x_2^{\pm} \pm 1/2w(K)|x_2^{\pm}|;$$

$$dx_2^{\pm}/dt = 2H(x_1^{\pm}) + (-f)^{\pm}, \quad t \in (0, l);$$

$$x_1^{\pm}(0) = [\Phi(0)/S]^{\pm};$$

$$x_2^{\pm}(0) = x_1^{\pm}(0)2d^{\pm}/m_0 + (l_k^{\pm} + a^{\pm})H(x_1^{\pm}(0))[a/a_{\text{я}}]^{\pm};$$

$$x_j^-(t) \in x_j(t) \in x_j^+(t), \quad j=1,2.$$

Интервальные оценки численного решения данных задач Коши могут быть найдены методами, описанными в [2—5].

Для численного решения краевой задачи (4)—(6) с гарантированной точностью можно применять интервальный вариант известного численного метода стрельбы.

Введем в рассмотрение двусторонние оценки для невязки краевого условия (6):

$$r^\pm(f, l, \Phi(0)) = x_2^\pm(l) + H(x_1^\pm(l))l_{oc}.$$

Если $X_j^\pm(t) = [x_{j-}^\pm(t), x_{j+}^\pm(t)]$ — интервальные оценки функций $x_j^\pm(t)$, $j=1, 2$, то

$$r^\pm(f, l, \Phi(0)) \hat{=} X_2^\pm(l) + H(X_1^\pm(l))l_{oc} = R^\pm(f, l, \Phi(0)) = [R_-^\pm(f, l, \Phi(0)), R_+^\pm(f, l, \Phi(0))].$$

Двусторонние оценки корней уравнений $r^\pm(f, l, \Phi(0)) = 0$ находятся путем решения методом половинного деления или другим аналогичным методом уравнений:

$$R_-^\pm(f, l, \Phi(0)) = 0, \quad R_+^\pm(f, l, \Phi(0)) = 0.$$

Обоснование аналогичных алгоритмов интервальных методов стрельбы содержится в [2—6].

Примеры расчета магнитной цепи с учетом погрешности исходных данных. *Пример 1.* Рассмотрим расчет магнитной цепи интервальным методом для случая, когда поток и длина стержней магнитопровода заданы, а магнитодвижущая сила неизвестна. Исходные данные: поток в воздушном зазоре $\Phi(0) = 0,35 \times 10^{-3}$ Вб, начальное значение магнитного напряжения $U(0) = 0,8 \times 10^4$ А, длина стержней $l = 5 \times 10^{-2}$ м, остальные геометрические параметры: $l_{oc} = 6,4 \times 10^{-2}$ м, $a = 2 \times 10^{-2}$ м, $b = 2 \times 10^{-2}$ м, $d_p = 4,8 \times 10^{-3}$ м. Магнитопровод выполнен из стали Э41А, характеристика намагничивания которой дана в [1].

Проводимость потоков рассеяния рассчитывалась по формуле [1]:

$$l(x) = 2(1 - \epsilon) \mu_0 [l / \ln(2l_k / b + 1) + 1 / \rho \ln(2b / l_k + 1)],$$

где ϵ — поправочный коэффициент, выбранный равным 0,5 из соображений согласования с данными [1].

Решение задачи находилось с помощью интервального метода стрельбы первого порядка точности [2—5]. Число шагов интегрирования было принято равным 10, точность решения нелинейного уравнения в методе стрельбы 0,1%.

Начальное приближение: $F = [1,6 \times 10^5, 2,1 \times 10^5]$.

Результаты вычислений:

интервальные оценки магнитодвижущей силы

$$F^- = [1,890 \times 10^5, 1,891 \times 10^5],$$

$$F^+ = [1,952 \times 10^5, 1,954 \times 10^5],$$

следовательно

$$F = [1,890 \times 10^5, 1,954 \times 10^5].$$

Двусторонние оценки магнитной индукции и магнитного напряжения приведены ниже:

x, см	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
$B^-(F_+^+)$, Тл	0,9471	1,0111	1,0641	1,1081	1,1431	1,1681	1,1841	1,1911	1,1891	1,177
$B^+(F_-^-)$, Тл	0,9481	1,0121	1,0661	1,1111	1,1481	1,1751	1,1931	1,2031	1,2041	1,196
$U^-(F_+^+)$, А	7061	6128	5203	4285	3374	2470	1571	674,9	-220,2	-1118
$U^+(F_-^-)$, А	7093	6192	5298	4412	3534	2663	1796	934	73,62	-788,3

Затраты времени на вычисления на ПЭВМ типа Pentium (600 МГц) составили порядка миллисекунды.

Из приведенных данных следует, что погрешность двусторонних оценок для магнитного напряжения значительно больше, чем для магнитной индукции, что объясняется большой крутизной зависимости $H(B)$. На практике наибольший интерес представляют значения индукции. Если все же требуется повысить точность расчета магнитного напряжения, то достаточно уменьшить в соответствующее число раз шаг интегрирования. Затраты времени на расчет при этом остаются по-прежнему незначительными. В данном примере специально выбран относительно крупный шаг интегрирования, чтобы наглядно продемонстрировать характер нарастания погрешности двусторонних оценок.

Графики двусторонних оценок значений магнитной индукции, магнитного напряжения и погрешности интервального метода интегрирования системы ОДУ показаны на рис. 2.

Пример 2. Рассмотрим расчет магнитной цепи интервальным методом для случая, когда магнитодвижущая сила и поток в магнитопроводе заданы, а длина стержней неизвестна. Исходные данные: $f = 1,574 \times 10^5$, начальное приближение $L = [4 \times 10^{-2}, 7 \times 10^{-2}]$, остальные данные те же, что и в предыдущем примере.

Число шагов интегрирования было принято равным 20, точность решения нелинейного уравнения в методе стрельбы 1%.

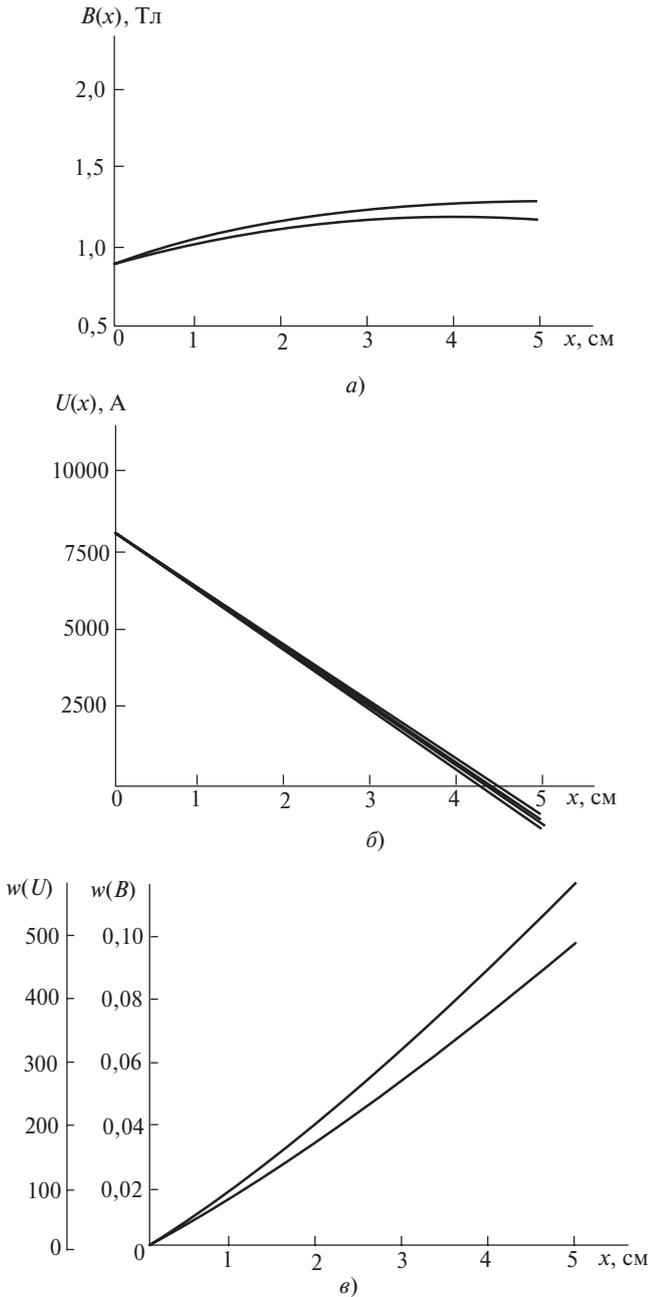


Рис. 2. Графики двусторонних оценок магнитной индукции (а), магнитного напряжения (б), а также ширины интервальных решений (в)

Результаты вычислений:

$$L^- = [6,344 \times 10^{-2}, 6,391 \times 10^{-2}]; \quad L^+ = [6,531 \times 10^{-2}, 6,578 \times 10^{-2}],$$

следовательно,

$$L = [6,344 \times 10^{-2}, 6,578 \times 10^{-2}].$$

Затраты времени на вычисления того же порядка, что в первом примере.

Пример 3. Рассмотрим расчет магнитной цепи интервальным методом для случая, когда магнитодвижущая сила и поток в магнитопроводе заданы, а длина стержней неизвестна. Исходные данные заданы как точным образом, так и в интервальном виде. Исходные данные: поток в воздушном зазоре

$\Phi(0) = 0,35 \times 10^{-3}$ Вб, начальное значение магнитного напряжения $U(0) = 0,8 \times 10^4$ А, геометрические параметры магнитной системы:

$$l_{oc} \hat{=} [6,3 \times 10^{-2}, 6,6 \times 10^{-2}], \quad a \hat{=} [1,9 \times 10^{-2}, 2,1 \times 10^{-2}], \\ b \hat{=} [1,9 \times 10^{-2}, 2,1 \times 10^{-2}]; \quad f \hat{=} [1,5 \times 10^5, 1,7 \times 10^5], \\ d_p = 4,8 \times 10^{-3} \text{ м.}$$

Число шагов интегрирования было принято равным 20, требуемая точность решения нелинейного уравнения в методе стрельбы 0,001, начальное приближение $L = [5 \times 10^{-2}, 9 \times 10^{-2}]$.

Результаты вычислений:

$$L^- = [5,422 \times 10^{-2}, 5,426 \times 10^{-2}], \quad L^+ = [8,672 \times 10^{-2}, 8,680 \times 10^{-2}],$$

следовательно,

$$L = [5,422 \times 10^{-2}, 8,680 \times 10^{-2}].$$

Более простым и во многих случаях эффективным подходом к решению задач с учетом неустранимой погрешности является комбинирование точных и асимптотически двусторонних методов. Согласно [2] учет неустранимой погрешности можно осуществлять точным образом на основе принципа максимума, а решение соответствующей системы ОДУ находить асимптотически двусторонним методом.

Пример 4. Расчет магнитной цепи с учетом неустранимой погрешности с помощью конечно-разностной схемы рядов Тейлора второго порядка точности. Оценка погрешности метода осуществляется с помощью экстраполяции по Ричардсону.

Магнитодвижущая сила и поток в магнитопроводе заданы, а длина стержней неизвестна. Исходные данные заданы в вещественном и интервальном виде (см. условие примера 3).

Результаты вычислений следующие.

При шаге интегрирования $h = 0,01$
 $L_h^- = [5,439 \times 10^{-2}, 8,089 \times 10^{-2}].$

При вдвое меньшем шаге $h/2 = [5,461 \times 10^{-2}, 7,974 \times 10^{-2}].$

Формулы экстраполяции по Ричардсону имеют вид:

$$L^\pm = L_h^\pm + c^\pm h^2 (1 + o(1)), \quad h \rightarrow 0, \quad c^\pm = \text{const};$$

$$c^\pm \approx h^{-2} (L_{h/2}^\pm - L_h^\pm) / (1 - 2^{-2}).$$

Следовательно,

$$c^- \approx 2,911, \quad c^+ \approx -15,33, \quad L^- - L_h^- \approx 2,911 \times 10^{-4},$$

$$L^+ - L_h^+ \approx -1,533 \times 10^{-3}, \quad L^- - L_{h/2}^- \approx 7,278 \times 10^{-5},$$

$$L^+ - L_{h/2}^+ \approx -3,833 \times 10^{-4}.$$

Асимптотически двустороннее решение из-за более высокого порядка метода оказалось несколько точнее, чем интервальное из примера 3.

Выводы. 1. Рассмотрены вопросы расчета магнитных цепей с гарантированной точностью с учетом погрешностей в исходных данных. Поскольку на практике проектирования исходные данные задаются, как правило, приближенно, то соответствующая задача является актуальной. Сформулированы двусторонние и интервальные методы для решения соответствующей краевой задачи.

2. Установлено, что наиболее простым и эффективным подходом, как правило, является комбинирование точных и асимптотически двусторонних методов. Неустраняемую погрешность целесообразно учитывать точным образом на основе принципа максимума, а численное решение соответствующей системы ОДУ находить асимптотически двусторонним методом.

3. Разработанные методы, алгоритмы и программы могут применяться при автоматизированном проектировании с гарантированной точностью систем автоматики и телемеханики, содержащих магнитные цепи.

3. Некрасов С.А. Двусторонний метод решения задач Коши. — Журнал вычислительной математики и математической физики, 1986, т. 26, № 5.

4. Некрасов С.А. О построении двусторонних приближений к решению задачи Коши. — Журнал вычислительной математики и математической физики, 1988, т. 28, № 5.

5. Некрасов С.А. Двусторонние методы интегрирования начальных и краевых задач. — Журнал вычислительной математики и математической физики, 1995, т. 35, № 10.

6. Некрасов С.А., Власов Ю.В., Хенгов В.Я. Методика косвенной оценки угла смачивания по геометрическим размерам пробной капли. — Математическое моделирование, 1994, т. 6, № 9.

7. Некрасов С.А. Эффективные двусторонние методы для решения задачи Коши в случае больших промежутков интегрирования. — Дифференциальные уравнения, 2003, т. 39, № 7.

8. Некрасов С.А. Интервальные методы и алгоритмы глобальной нелинейной оптимизации и их применение в области проектирования электротехнических устройств, ч. I. — Электричество, 2001, № 8.

9. Некрасов С.А. Интервальные методы и алгоритмы глобальной нелинейной оптимизации и их применение в области проектирования электротехнических устройств, ч. II. — Электричество, 2002, № 7.

[24.07.12]

А в т о р : Некрасов Сергей Александрович окончил электромеханический факультет Новочеркасского политехнического института (НПИ) в 1985 г. В 2002 г. защитил докторскую диссертацию «Интервальные и двусторонние методы для расчета с гарантированной точностью электрических и магнитных систем» в Южно-Российском государственном техническом университете (бывший НПИ). Профессор кафедры прикладной математики Южно-Российского государственного технического университета.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Никитенко А.Г., Щербаков В.Г., Лобов Б.Н., Лобанова Л.С. Математическое моделирование и автоматизация проектирования тяговых электрических аппаратов/Под ред. А.Г. Никитенко, В.Г. Щербакова. — М.: Высшая школа, 1996.

2. Некрасов С.А. Интервальные и двусторонние методы для расчета с гарантированной точностью электрических и магнитных систем. Дис... док. техн. наук по специальности «Теоретическая электротехника». — Новочеркасск: ЮРГТУ(НПИ), 2002.

* * *

Зарубежная подписка

на журнал «Электричество»
оформляется через фирмы-партнеры ЗАО «МК-Периодика» или непосредственно
в ЗАО «МК-Периодика» по адресу:

Россия, 111524 Москва, Электродная ул., 10, стр. 3

ЗАО «МК-Периодика»;

тел. (495) 672-70-12; факс (495) 306-37-57

E-mail: info@periodicals.ru

Internet: <http://www.periodicals.ru>

To effect subscription it is necessary to address to one of the partners of JSC «МК-Periodica» in your country or to JSC «МК-Periodica» directly.

Address: Russia, 111524 Moscow; 10, str.3, Elektrodnyaya ul.

JSC «МК-Periodica»

Tel.: (495) 672-70-12; fax (495) 306-37-57

E-mail: info@periodicals.ru

Internet: <http://www.periodicals.org>