

Расчет магнитного поля в воздушном зазоре магнитоэлектрических машин на основе комплексной потенциальной функции

АФАНАСЬЕВ А.А.

Периодическая комплексная потенциальная функция может быть положена в основу аналитического расчета характеристик магнитоэлектрических машин с односторонней зубчатостью воздушного зазора, который конформно отображается на бесконечную полосу с гладкими границами. Анализируется значение коэффициента Картера для рассматриваемых машин. Сравниваются результаты аналитического и численного расчетов магнитного поля и электромагнитного момента.

Ключевые слова: магнитоэлектрическая машина, воздушный зазор, магнитное поле, расчет, периодическая комплексная потенциальная функция

Высокоэнергетические постоянные магниты из редкоземельных элементов имеют магнитную проницаемость, близкую к воздуху. Например, для Ne-Fe-B магнитов с $B_r = 1,1$ Тл и $H_{cB} = 850$ кА/м относительная магнитная проницаемость

$$\mu_M = \frac{B_r}{\mu_0 H_{cB}} = \frac{1,1}{4\pi \times 10^{-7} \cdot 0,85 \times 10^6} = 1,0298.$$

Поэтому магнитное поле в активной зоне электрической машины с такими магнитами можно рассчитать, полагая пространство, занятое магнитами, воздушной средой. Будем считать в дальнейшем, что рабочая точка на кривой возврата магнита находится во втором квадранте, а сама кривая в этом квадранте линейна. Микроскопические связанные молекулярные токи (амперовы токи) в теле постоянного магнита, компенсируя друг друга, вызывают появление поверхностных токов [1, 2]. Полагаем, что плоскопараллельное магнитное поле призматического магнита с прямоугольным поперечным сечением создаётся встречными токами I двух параллельных шин высотой $2b = h_M$ (h_M — высота магнита в направлении его намагниченности), толщиной a , находящихся на расстоянии ширины магнита b_M (рис. 1,а).

При расположении магнитной призмы в воздушном зазоре электрической машины и с закреплением её нижнего торца на ярме ротора следует принять в расчёт также дополнительные источники магнитного поля ротора, являющиеся зеркальными отображениями исходных шин в ферромагнитных

A periodic complex potential function can be used as a basis for analytically calculating the characteristics of magnetolectric machines having a unilaterally toothed air gap, which is conformally mapped on an infinite belt with smooth boundaries. The value of Carter coefficient is analyzed for the considered machines. The results of analytic and numerical calculations of the magnetic field and electromagnetic torque are compared with each other.

Key words: magnetolectric machine, air gap, magnetic field, calculation, periodic complex potential function

массивах сердечников статора и ротора [3]. Корректный учёт этих источников возможен, если воздушная среда с исходными шинами имеет гладкие (без пазовых впадин) ферромагнитные границы. Выполнение этого условия возможно при конформном отображении зубчатого воздушного зазора на бесконечную полосу.

При указанном конформном отображении возможен и другой подход, при котором источники магнитного поля ротора и статора представляются периодическими функциями скалярного магнитного потенциала, связанными с границами бесконечной полосы, а также дополнительными полями во внутренних областях полосы, в которых плотности тока отличны от нуля.

Расчёт магнитного поля в немагнитном зазоре с односторонней зубчатостью. При односторонней зубчатости немагнитного зазора между сердечниками статора и ротора применение конформных отображений активной области позволяет аналитическими средствами рассчитать в ней магнитное поле с точностью, не уступающей точности численных методов. При этом вихревые источники магнитного поля будут сведены к скалярным магнитным потенциалам, расположенным на границах расчётной области, и легко рассчитываемым дополнительным полям в зонах с плотностью тока, отличной от нуля. Этот результат достигается благодаря использованию периодической функции комплексного магнитного потенциала в бесконечной полосе шириной d , являющейся образом зубчатого воздушного зазора.

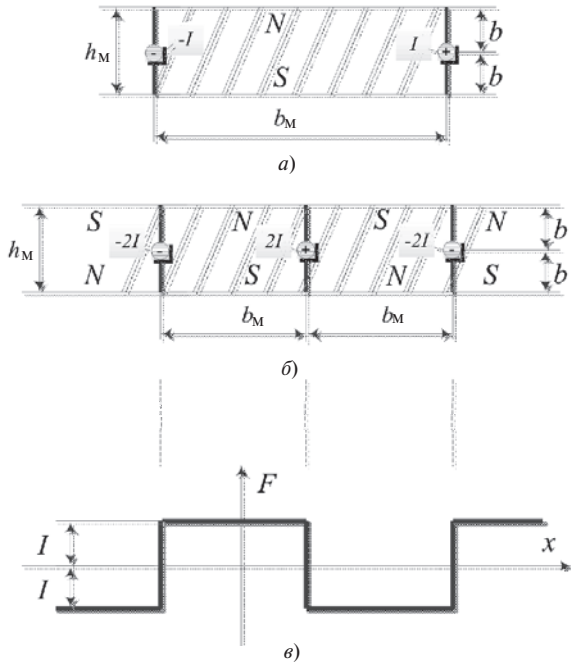


Рис. 1. Поверхностные токи призматического магнита с прямоугольным поперечным сечением, протекающие по тонким шинам (а); поверхностные токи в местах стыка разнополюсных магнитов (б); кривая МДС магнитов индуктора (в)

Расчетная область охватывает одно зубцовое деление статора с учётом воздействия на неё источников поля соседних зубцовых делений, которое, как показано в [4], достаточно для адекватного описания магнитного поля в зоне рассматриваемого зубцового деления.

Конфигурация воздушного зазора в исходной (физической) плоскости z показана на рис. 2,а. Конформное отображение этой области на верхнюю половину комплексной плоскости $t = x + jy$ известно [5]:

$$z = \frac{2\varrho b_{\Pi}}{\rho \zeta} \arctg \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} + \operatorname{darth} \frac{2d}{b_{\Pi}} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \quad (1)$$

где $l^2 = 1 + \frac{\varrho d}{\zeta b_{\Pi}}$; $d = d_B + h_M$; d_B – реальный (классический) воздушный зазор.

Дифференцируя (1), найдем

$$\frac{dz}{dt} = \frac{b_{\Pi}}{\rho} \frac{\sqrt{1-t^2}}{1-t^2} \quad (2)$$

Верхняя половина комплексной плоскости t (рис. 2,б) может быть конформно отображена на бесконечную горизонтальную полосу шириной d в комплексной плоскости $s = t + js$ с помощью выражения [5]:

$$s = \frac{2d}{\rho} \operatorname{arctht} \quad (3)$$

Источники магнитного поля – проводники с током I в пазах статора и тонкие шины высотой h_M со встречными токами I_M на поверхности яра ротора (рис. 2) – могут быть заменены скалярными магнитными потенциалами на границах зазора и дополнительной напряженностью H_0 магнитного поля внутри указанных проводников [6]. На рис. 2,а показана конфигурация дополнительного поля $H_0 = H_{0x}$ внутри паза статора. Аналогичные поля могут учитываться и внутри тонких магнитных шин на роторе.

Как известно, скалярный магнитный потенциал является инвариантом конформного преобразования [7], т.е. его значение будет одним и тем же как для исходной точки, так и для её образа. Возможный характер распределения потенциала на сторонах бесконечной полосы, из которых верхняя сторона относится к статору, а нижняя – к ротору, показан на рис. 2,в. В общем случае с учетом специфики конструкций обмотки статора и характера расположения магнитов на ярме ротора распределение потенциалов на сторонах полосы в комплексной плоскости $s = t + js$ можно представить тригонометрическими рядами с наличием косинусных и синусных слагаемых:

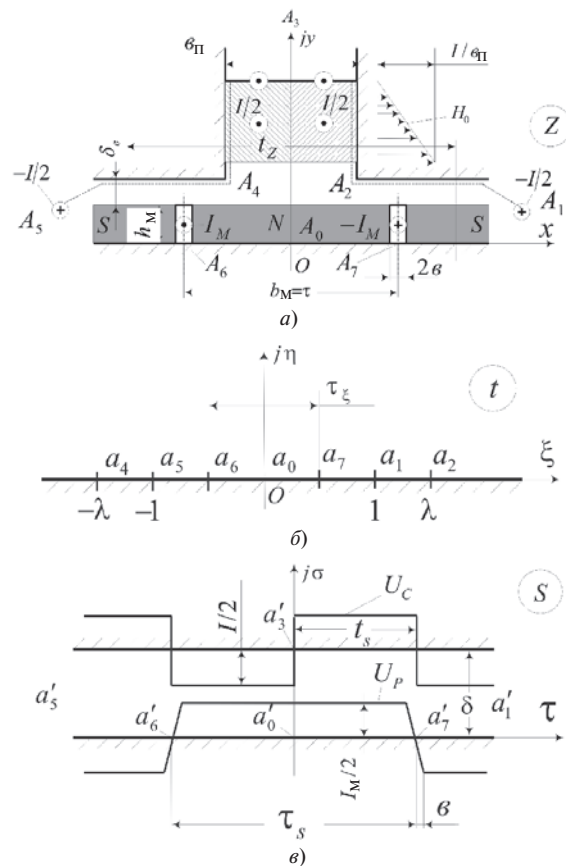


Рис. 2. К расчёту магнитного поля в немагнитном зазоре: а – конфигурация расчётной области в исходной (физической) плоскости z ; б – верхняя полуплоскость t – конформный образ расчётной области; в – бесконечная полоса шириной d в плоскости s – конформный образ расчётной области

$$F_{c(p)} = \frac{I_{(M)}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{a} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t). \quad (4)$$

Известно общее решение граничной задачи Дирихле для бесконечной полосы при периодическом изменении магнитного потенциала в виде прямоугольного синуса на одной граничной стороне (например, для которой $s=0$), полученное методом разделения переменных [8]:

$$u(t,s) = \frac{I_M}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{a} \frac{b_n \sin n\omega t \operatorname{sh}[na(d-s)]}{\operatorname{sh}nad}, \quad (5)$$

где $a = p/t_s$; t_s – полюсное деление в комплексной плоскости s ; d – ширина полосы.

Считая зависимость (5) (после умножения её на мнимую единицу j) скалярным магнитным потенциалом и вычисляя сопряженную ей гармоническую функцию магнитного потока $\mathbf{n}(t,s)$, получаем комплексный скалярный магнитный потенциал для бесконечной полосы плоскости s : $w(s) = \mathbf{n}(t,s) + ju(t,s)$.

Например, комплексный скалярный магнитный потенциал для магнитных шин ротора применительно к основной косинусной гармонике выражения (4) будет иметь вид [7]:

$$w_{\cos}(s) = \mathbf{n}(t,s) + ju(t,s) = \frac{-a_1 I_M}{2\operatorname{sh}ad} \{ \sin a \operatorname{ch}[a(s-d)] + j \cos a \operatorname{sh}[a(s-d)] \} = - \frac{a_1 I_M}{2\operatorname{sh}ad} \sin[a(s-jd)].$$

Тогда для комплексного скалярного магнитного потенциала, вызванного токами шин ротора с учётом всего спектра косинусных гармоник, получим

$$w_{\cos}(s) = - \frac{I_M}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{a} \frac{a_n \sin[na(s-jd)]}{\operatorname{sh}nad} = - \frac{I_M}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{a} \frac{a_n [\sin n a \operatorname{ch}(s-d) + j \cos n a \operatorname{sh}(s-d)]}{\operatorname{sh}nad}. \quad (6)$$

Аналогично можно записать выражение для комплексного скалярного магнитного потенциала, обусловленного синусными гармониками выражения (4):

$$w_{\sin}(s) = - \frac{I_M}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{a} \frac{b_n \{ \cos n a \operatorname{ch}[na(d-s)] - j \sin n a \operatorname{sh}[na(d-s)] \}}{\operatorname{sh}nad} = - \frac{I_M}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{a} \frac{b_n \cos na(s-jd)}{\operatorname{sh}nad}, \quad (7)$$

где $\dot{s} = t - jd$ – комплексно-сопряжённый вектор.

Выражение (7) можно записать в комплексно-сопряжённой форме:

$$\begin{aligned} \dot{w}_{\sin}(s) &= \\ &= - \frac{I_M}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{a} \frac{b_n \{ \cos n a \operatorname{ch}[na(d-s)] + j \sin n a \operatorname{sh}[na(d-s)] \}}{\operatorname{sh}nad} = \\ &= - \frac{I_M}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{a} \frac{b_n \cos na(s-jd)}{\operatorname{sh}nad}. \end{aligned} \quad (8)$$

Комплексные скалярные магнитные потенциалы, созданные суммарным током I рассматриваемого паза статора и действующие на верхней границе бесконечной полосы шириной d , описываются формулами, похожими на (6), (8):

$$\begin{aligned} w_{\cos}(s) &= - \frac{I}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{a} \frac{a_n \sin nas}{\operatorname{sh}nad}; \\ \dot{w}_{\sin}(s) &= - \frac{I}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{a} \frac{b_n \cos nas}{\operatorname{sh}nad}. \end{aligned} \quad (9)$$

Аналогичные формулы для соседних пазов будут иметь вид:

$$\begin{aligned} w_{\cos}(s) &= - \frac{I_{л(п)}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{a} \frac{a_n \sin na(s \pm t_s)}{\operatorname{sh}nad}; \\ \dot{w}_{\sin}(s) &= - \frac{I_{л(п)}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{a} \frac{b_n \cos na(s \pm t_s)}{\operatorname{sh}nad}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $I_{л(п)}$ – суммарные токи левого (правого) соседнего паза; t_s – образ зубцового деления в плоскости s .

Для комплексно-сопряжённого вектора магнитной индукции в исходной (физической) плоскости справедливо:

$$\dot{B}(z) = j\mathbf{m}_0 \frac{sw(s) ds dt}{ds dt dz}. \quad (11)$$

Из этого выражения с учетом (2), (3) и (6) можем получить формулу для магнитной индукции, созданной косинусными гармониками скалярного магнитного потенциала магнитов ротора:

$$\begin{aligned} B_{\cos}^*(z) &= - \frac{j\mathbf{m}_0 da I_M}{b_{II} \sqrt{1-t^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{a} \frac{na_n \cos[na(s-jd)]}{\operatorname{sh}nad} = \\ &= - \frac{j\mathbf{m}_0 da I_M}{b_{II} \sqrt{1-t^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{a} \frac{na_n [\sin n a \operatorname{sh}na(s-d) + j \cos n a \operatorname{ch}na(s-d)]}{\operatorname{sh}nad}. \end{aligned} \quad (12)$$

Поскольку [7]

$$B(s) = -j\mu_0 \frac{dw^*(s)}{ds},$$

то с помощью (2), (3) и (8) можем получить выражение для магнитной индукции, созданной синусными гармониками скалярного магнитного потенциала магнитов ротора:

$$B_{\sin}(z) = -j\mu_0 \frac{dw^*(s)}{ds} \frac{ds}{dt} \frac{dt}{dz} = -\frac{j\mu_0 da I_M}{b_n \sqrt{1-t^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nb_n \sin[na(s-jd)]}{\operatorname{sh} na d} = -\frac{j\mu_0 da I_M}{b_n \sqrt{1-t^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nb_n \{ \cos nat \operatorname{sh} na(s-d) + j \sin nat \operatorname{ch} na(s-d) \}}{\operatorname{sh} na d}. \quad (13)$$

Формулы (12), (13) определяют магнитные индукции от потенциальных источников магнитного поля на роторе. Мнимая составляющая в них есть проекция вектора индукции на ось y (радиальная индукция), вещественная составляющая – на ось x (тангенциальная индукция). К ним следует добавить дополнительную (вихревую) составляющую индукции

$$\mu_0 H_0 = \mu_0 H_{0x} = \pm \mu_0 \frac{\partial}{\partial y} \left(1 - \frac{y}{h_M} \right) \frac{\partial I_M}{\partial z} \frac{1}{b}, \quad (14)$$

где знаки (\pm) соответствуют магнитным шинам с токами, направленными соответственно к нам (+) и от нас (–); b – толщина магнитной шины.

Дополнительное магнитное поле присутствует в областях с плотностью тока, отличной от нуля. Поскольку толщина магнитных шин составляет доли миллиметра, то зоны с дополнительным полем от токов этих шин невелики. Однако дополнительное поле, имеющее тангенциальное направление, следует учитывать при расчёте электромагнитного момента магнитоэлектрической машины.

Потенциальное магнитное поле, созданное обмоткой статора в активной зоне рассматриваемого паза, находим аналогичным образом, используя (2), (3), (9)–(11). Кроме этого поля в зоне сечения проводника статора с током I будет существовать дополнительное магнитное поле по оси x (рис. 2,а):

$$\mu_0 H_0 = \mu_0 H_{0x} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial y} \left(d + h_k + h_{\text{пр}} - \frac{y}{b_{\text{п}}} \right) \frac{\partial I}{\partial z}; \quad (15)$$

$$d + h_k \leq y \leq d + h_k + h_{\text{пр}},$$

где h_k – высота пазового клина; $h_{\text{пр}}$ – высота области паза, занятой проводниками (в которой плотность тока не равна нулю и одинакова для всех точек области); I – суммарный ток паза; $b_{\text{п}}$ – ширина паза.

Рассмотрим расчёт магнитного поля в воздушном зазоре однофазного магнитоэлектрического двигателя со специфическим расположением магнитов, обеспечивающим предупусковую фиксацию положения ротора [9]. С этой целью удалены магниты на одной трети магнитного периода. Кривая МДС ротора будет содержать только синусные гармоники. Функция скалярного магнитного потенциала в бесконечной полосе плоскости s может быть представлена тригонометрическим рядом (8) с коэффициентами

$$b_n = \frac{4 - 1 + (-1)^n \cos(pn/3)}{pn}.$$

При обесточенной обмотке статора магнитная индукция в исходной области будет определяться по (13), в которой следует принять: $d = 4,5 \times 10^{-3}$ м;

$$l^2 = 1 + \frac{\partial d}{\partial b_{\text{п}}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} = 2,12; \quad b_{\text{п}} = 8,5 \times 10^{-3} \text{ м}; \quad I_M = 3320 \text{ А};$$

$$a = p / t_s = 211,84.$$

Результаты численного расчёта магнитного поля двигателя известны [9], его параметры: $n_{\text{н}} = 3000$ об/мин; $M_{\text{н}} = 0,8$ Нм; $I = 20$ А; $2p = 12$; число зубцов статора $Z = 12$; число витков в катушке $w_k = 9$; зубцовое деление $t_z = 25,4$ мм; ширина паза $h_{\text{п}} = 8,5$ мм; воздушный зазор $d_{\text{в}} = 0,5$ мм; магнитопластовые магниты имеют высоту $h_{\text{м}} = 4$ мм; ширину $b_{\text{м}} = 17,1$ мм; коэрцитивную силу $H_{\text{св}} = 415 \times 10^3$ А/м; полный ток магнитной шины в зоне стыка соседних разнополярных магнитов $I_M = 2h_{\text{м}}H_{\text{св}} = 2 \times 4 \times 10^{-3} \times 415 \times 10^3 = 3320$ А.

На рис. 3 представлены результаты численного и аналитического расчётов.

Электромагнитный момент «залипания» ротора. Формулы (12) или (13) позволяют определить радиальную и тангенциальную составляющие магнитной индукции на поверхности магнитов и, следовательно, рассчитать реактивный электромагнитный момент (момент «залипания» ротора) по универсальной формуле метода натяжений [10]:

$$M = \frac{pID}{2\mu_0} \int_0^{2t} \frac{\partial B_n}{\partial z} B_t dx. \quad (16)$$

На рис. 4 представлены результаты расчёта реактивного момента $M = M(J)$ в функции углового положения ротора J , изменяемого в пределах магнитного периода применительно к рассматриваемому вентильному двигателю. Видим, что кривая момента имеет три точки и один интервал перехода через нуль, из которых только два нулевых момента будут устойчивыми. Двигатель имеет 6 магнит-

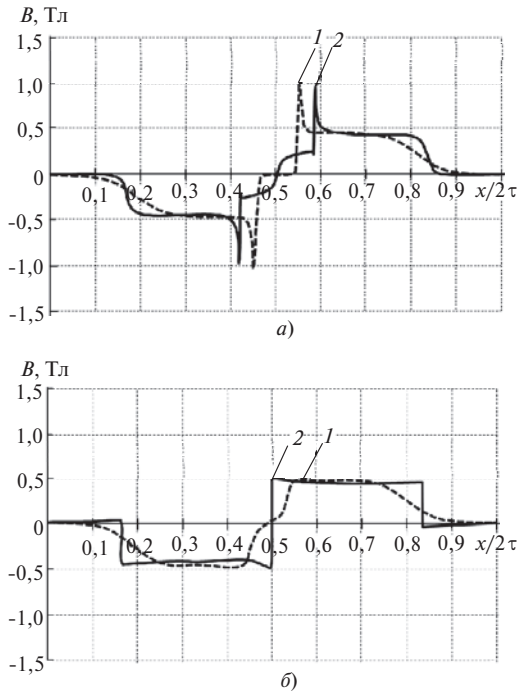


Рис. 3. Радиальная составляющая магнитной индукции в воздушном зазоре магнитоэлектрического вентильного двигателя: *a* – на поверхности расточки статора; *b* – на наружной поверхности магнита; 1 – аналитический расчёт; 2 – численный расчёт

ных периодов, поэтому полное число устойчивых фиксаций ротора за оборот будет равно 12; оно совпадает с числом зубцов статора.

Коэффициент Картера. Этот коэффициент равен отношению максимальной индукции B_{max} на зубцовом делении t_z к её среднему значению B_0 . Согласно классическому определению этого коэффициента [11] значение B_{max} определяется на невозбуждённой беспазовой стороне воздушного зазора с односторонней зубчатостью. Противоположная сторона имеет во всех её точках одинаковый однополярный (не периодический) скалярный магнитный потенциал.

Будем полагать, что магнитный индуктор симметричен, имеет полюсное деление $t_z = b_m$, равное ширине магнита, и его функция скалярного магнитного потенциала $u(x, y)$ содержит только косинусные (четные) гармоники (рис. 2):

$$w_{\cos}(s) = - \frac{I_M}{2} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin[na(s - jd)]}{shnad}.$$

Согласно (6) комплексно-сопряжённое значение магнитной индукции на невозбуждённой стороне бесконечной полосы плоскости s равно:

$$B^*(s = t + jd) = j\mu_0 \frac{dw_{\cos}}{ds} = - \frac{j\mu_0 a I_M}{2} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n a_n \cos nat}{shnad}. \tag{17}$$

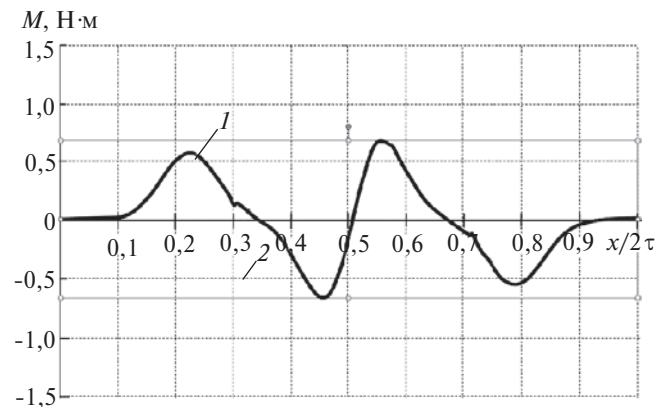


Рис. 4. Электромагнитный момент обесточенного магнитоэлектрического двигателя

Это чисто мнимый вектор, при смене его знака получим

$$B(s = t + jd) = \frac{j\mu_0 a I_M}{2} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n a_n \cos nat}{shnad}. \tag{18}$$

Тогда среднее значение индукции B_0 на отрезке t_s , являющимся образом длины зубцового деления t_z , будет равно:

$$B_{0s} = \frac{2}{t_s} \int_0^{t_s/2} B(t + jd) dt = \frac{j\mu_0 I_M}{t_s} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nat_s/2)}{shnad}. \tag{19}$$

Как известно, магнитный поток является инвариантом конформного преобразования, поэтому справедливо равенство

$$B_{0s} t_s = B_0 t_z,$$

откуда следует:

$$B_0 = \frac{t_s}{t_z} B_{0s} = \frac{j\mu_0 I_M}{t_z} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nat_s/2)}{shnad}. \tag{20}$$

При сравнительно большом немагнитном (эквивалентном) зазоре $d = h_m + d_b$ максимум индукции, приходящийся на области с центром в середине зубцов (в нашем случае с центром в точках $x = \pm t_z / 2$), может не достигать предельного очевидного значения

$$B_{max} = j\mu_0 \frac{I_M}{2d}. \tag{21}$$

Известно, что края этих областей отстоят от краёв паза примерно на $2d$ [7], поэтому при расчёте коэффициента Картера следует отказаться в общем случае от использования (21) для определения максимального значения магнитной индукции.

При ширине магнита b_m , равной или большей значения $t_z + 2b$ (b – толщина магнитной шины одного магнита), индукция всегда будет максимальной в точках $x = \pm t_z / 2$; при $b_m = t_z$ обмотка статора будет иметь $q = 1$.

С помощью (12) можем найти максимальное значение магнитной индукции на статорном «бере-

ным, описываемым скалярным непериодическим магнитным потенциалом

$$w(s) = v + ju = \frac{u_M}{d} s, \quad (29)$$

где v — функция магнитного потока; u — функция скалярного магнитного потенциала.

Поскольку $s = t + js$, получим из (29):

$$v = \frac{u_M}{d} t; \quad u = \frac{u_M}{d} s. \quad (30)$$

Из второй формулы (30) видим, что действительно магнитный потенциал статора ($s = d$) равен u_M , а ротора ($s = 0$) имеет нулевое значение. Используя выражения конформной связи (3) и (2) плоскостей s и t , t и z , найдем магнитную индукцию в плоскости z по (11):

$$B_n(x) = u_M L_{dn}(x); \quad B_t(x) = u_M L_{dt}(x), \quad (31)$$

где $L_{dn}(x)$, $L_{dt}(x)$ — удельные нормальные (радиальные) и касательные (тангенциальные) проводимости воздушного зазора.

Такой подход лежит в основе метода удельной магнитной проводимости [13]. Метод предполагает, что разность магнитных потенциалов сердечников может быть не постоянной, а изменяться в функции тангенциальной координаты x . В этом случае нарушается исходный принцип получения формул (31): поле в плоскости s должно быть равномерным.

Анализ применения формул (31) показывает [14], что первая формула достаточно точно воспроизводит радиальное магнитное поле, а поле тангенциальное рассчитывается по второй формуле недостаточно адекватно (учитывается только влияние зубчатости воздушного зазора, но не учитывается наличие тангенциальной составляющей у магнитного потенциала). По этой причине на основе метода удельной магнитной проводимости не удается корректно рассчитывать электромагнитный момент методом натяжений по (16), содержащей напряжённость поперечного (тангенциального) магнитного поля.

Выводы. 1. Конформное отображение немагнитного зазора магнитоэлектрической машины с односторонней зубчатостью на гладкую бесконечную полосу с заданием в ней периодической функции скалярного магнитного потенциала составляет универсальную основу для аналитического расчёта магнитного поля в воздушном зазоре.

2. Расчёт магнитного поля в воздушном зазоре с помощью функции скалярного магнитного потен-

циала, полученной при допущении равномерности поля в бесконечной полосе, недостаточно универсален. Он составляет теоретическую основу метода удельной магнитной проводимости и даёт достаточно корректные результаты при расчёте радиального магнитного поля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Поливанов К.М.** Теоретические основы электротехники, ч. 3. Теория электромагнитного поля. — М.: Энергия, 1969, 352 с.
2. **Тамм И.Е.** Основы теории электричества. — М.: Наука, 1989, 504 с.
3. **Бинс К., Лауренсон П.** Анализ и расчёт электрических и магнитных полей/ Пер. с англ. — М.: Энергия, 1970, 376 с.
4. **Иванов-Смоленский А.В., Абрамкин Ю.В., Власов А.И., Кузнецов В.А.** Универсальный метод расчёта электромагнитных процессов в электрических машинах/Под ред. А.В. Иванова-Смоленского. — М.: Энергоатомиздат, 1986, 216 с.
5. **Лаврик В.И., Савенков В.Н.** Справочник по конформным отображениям. — Киев: Наукова думка, 1970, 252 с.
6. **Афанасьев А.А.** Расчёт магнитного поля проводника в пазу электрической машины. — Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1985, № 4, с. 14–22.
7. **Иванов-Смоленский А.В., Абрамкин Ю.В.** Применение конформного преобразования в электромагнитных расчётах электрических машин. Аналитические методы. — М.: Изд-во МЭИ, 1980, 85 с.
8. **Домбровский В.В.** Справочное пособие по расчёту электромагнитного поля в электрических машинах. — Л.: Энергоатомиздат, 1983, 256 с.
9. **Афанасьев А.А., Белов В.В., Гарифуллин М.Ф. и др.** Однофазные вентильные электродвигатели для системы охлаждения автомобильного мотора. — Электричество, 2010, № 6, с. 35–38.
10. **Иванов-Смоленский А.В.** Электромагнитные силы и преобразование энергии в электрических машинах. — М.: Высшая школа, 1989, 312 с.
11. **Рихтер Р.** Электрические машины, т. 1/Пер. с немецкого под ред. Ю.С. Чечета. — М.:Л.: Главная редакция энергетической литературы, 1935, 598 с.
12. **Frey.** Применение конформных изображений в практических задачах электромашиностроения. — A. d. El. L, 1911, vd. 4.
13. **Вольдек А.И., Солдатенкова Н.А.** К расчёту магнитного поля в воздушном зазоре электрических машин с помощью метода гармонических проводимостей. — Труды ЛПИ № 301. Электромашиностроение. — Л.: Энергия, 1969, с. 40–44.
14. **Афанасьев А.А., Белов В.В., Ефимов В.В., Николаев А.В.** Метод удельной магнитной проводимости в расчетах радиальных и тангенциальных магнитных полей магнитоэлектрических машин. — Электричество, 2013, № 4, с. 39–44.

[05.09.13]

Автор: Афанасьев Александр Александрович окончил электромеханический факультет Московского энергетического института (МЭИ) в 1962 г. Докторскую диссертацию «Совместная работа синхронной машины со статическим преобразователем частоты (теория и приложения)» защитил в МЭИ в 1991 г. Заведующий кафедрой управления и информатики в технических системах Чувашского государственного университета.