

3. **Czarnecki L.S.** Power related phenomena in three-phase unbalanced systems. — IEEE Trans. on Power Delivery, 1995, vol. 10, №3.

4. **Czarnecki L.S.** Energy flow and power phenomena in electrical circuits: illusions and reality. — Electrical Engineering, 2000, №82.

5. **Czarnecki L.S.** Physical reasons of currents RMS value increase in power systems with nonsinusoidal voltage. — IEEE Trans. on Power Delivery, January 1993, vol.8, №1.

6. **Filipsky P.S., Baghzouz Y., Cox M.D.** Discussion of power in the IEEE Dictionary. — IEEE Trans. on Power Delivery, July 1994, vol. 9, №3.

7. **Лурье Л.С.** Кажущаяся мощность трехфазной системы. — Электричество, 1951, №1.

8. **Czarnecki L.S.** Instantaneous Reactive Power $p-q$ Theory and Power Properties of Three-Phase Systems. — IEEE Trans. on Power Delivery, January 2006, vol. 21, №1.

9. **Czarnecki L.S.** Orthogonal decomposition of the current in a 3-phase nonlinear asymmetrical circuit with a nonsinusoidal voltage

source. — IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement, March 1988, vol. 37, №1.

[07.09.10]

Авторы: Цицикян Георгий Николаевич окончил электротехнический факультет Ереванского политехнического института в 1963 г. Докторскую диссертацию «Электротехнические комплексы и системы, включая их управление и регулирование» защитил в 1989 г. в Ленинградском электротехническом институте. Начальник НИО ФГУП ЦНИИ «СЭТ», ученый секретарь научно-технического совета.

Казначеев Анатолий Николаевич — курсант 6 курса Государственной морской академии им. адмирала С.О. Макарова, инженер ФГУП ЦНИИ «СЭТ».

* * *

Поправка

В статье Цицикяна Г.Н. «Полная мощность и коэффициент мощности... («Электричество», 2010, №7) замечены следующие опечатки: на с. 49 во второй колонке снизу вместо $([u], [i]^t)$ должно быть $([v], [i]^t)$; вместо $([u], [i]^t)$ в выделенной строке для мощности $([u], [v]^t)=0$; двумя строчками выше должно быть $[v]$ вместо $[i]$; на с. 50 в девятой строке сверху в первой колонке должно быть $[i], [i]^t$; в формуле (2) следует вертикальную черту заменить на плюс; на рис. 2 медианы треугольника должны пересекаться в одной точке; на с. 53 в первой колонке во второй строке таблицы численных значений должно быть всюду 1,0; в приложении в восьмой строке сверху должно быть $U_k \cos j_k$; перед выводами в строке после (П-2) должна стоять величина U^2 .

Цилиндрический виток индуктора с разрезом как инструмент для магнитно-импульсной обработки металлов

БАТЫГИН Ю.В., ГНАТОВ А.В.

Проведен расчёт трехмерной электродинамической задачи пространственно-временного распределения вихревых токов, возбуждаемых полем плоского кругового витка с разрезом. Получены аналитические выражения для расчета азимутальной и радиальной составляющих плотности индуцированного тока в массивном металлическом листе. Построены эюры амплитудно-пространственного распределения плотности индуцированного тока.

Ключевые слова: *одновитковый индуктор, магнитно-импульсная обработка металлов, плотность индуцированного тока, напряженность поля*

Для магнитно-импульсной обработки металлов (МИОМ) широко используются плоские одновитковые соленоиды [1–3]. В известных публикациях по электродинамическим расчётам эти соленоиды представляются замкнутыми круговыми контурами, что позволяет ввести условие аксиальной симметрии и существенно упростить решение задачи о поле изолированного витка на поверхности металлического объекта (это может быть и проводящее полупро-

A 3D electrodynamic problem of spatial-and-time distribution of eddy currents excited by the field created by a flat circular turn with a cut is calculated. Analytical expressions for calculating the azimuth and radial components of the density of current induced in a bulk metal sheet are obtained. Graphs of amplitude-and-spatial distribution of the induced current density are constructed.

Key words: *single-turn inductor, processing of metals, induced current, magnetic field strength*

странство, и тонкая пластина) [4–6]. В действительности виток не может быть замкнутым круговым контуром, поскольку он является элементом, последовательно включаемым в цепь источника мощности. Он имеет разрез, и функция, описывающая азимутальное распределение возбуждающего тока, терпит разрыв второго рода. Поэтому в дальнейшем одинаково справедливы термины «виток с разрезом» или «виток с разрывом».

Приближение аксиальной симметрии нарушается тем больше, чем больше требуется по конструктивным соображениям расстояние между электрическими выводами к источнику мощности. В конечном итоге нарушение аксиальной симметрии приводит к неадекватности широко применяемой симметричной модели расчёта реальным системам «виток – проводящий объект».

Обращаясь к проблемам МИОМ, следует подчеркнуть актуальность исследований именно систем «одновитковый индуктор – проводящая среда», поскольку последние представляют собой типичные конструкции инструментов, например для плоской штамповки [7]. Понятно, что нарушение аксиальной симметрии формы источника поля – индуктора приводит к искажению силового воздействия на обрабатываемый объект, что объясняет многие неудачные применения электромагнитных полей для решения насущных технологических задач.

В статье решается трехмерная электродинамическая задача пространственно-временного распределения вихревых токов, возбуждаемых полем плоского «незамкнутого» кругового витка в массивном проводнике с высоким значением удельной электропроводности.

Постановка и аналитическое решение задачи.

Расчётная модель представлена на рис. 1, где направляющие орты координат в выбранной цилиндрической системе координат.

Реальный виток, безусловно, имеет конечную ширину. Но в постановке задачи будем считать его бесконечно тонким. Данное приближение позволит наиболее ярко осветить роль именно разреза и

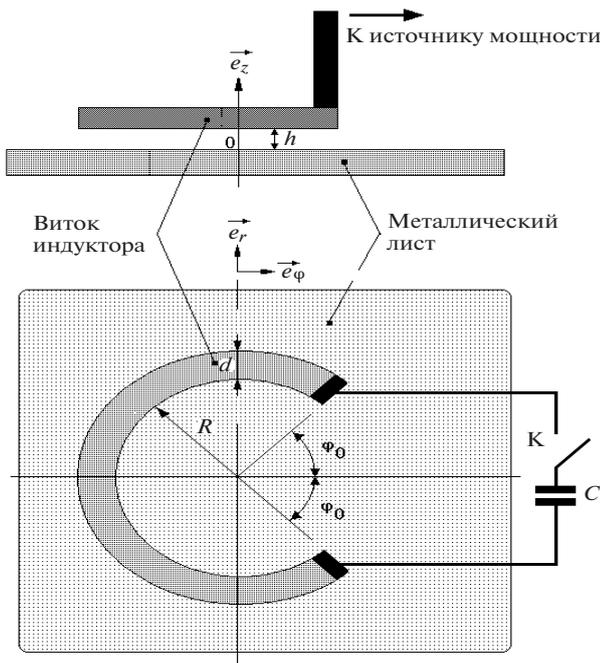


Рис. 1. Плоский «незамкнутый» виток над массивным металлическим листом

избежать неоднозначности в интерпретации расчётных результатов, обусловленной конечными радиальными размерами индуктора в зоне «разреза».

Примем следующие допущения.

Бесконечно протяжённый в поперечных направлениях металлический лист – объект обработки выполнен из немагнитного идеального проводника.

Виток индуктора радиусом R расположен над поверхностью металлического листа на расстоянии h , поперечные размеры токопровода витка достаточно малы, так что $d \ll 0$, и математически его положение в координатах $\{z, r\}$ можно описать произведением дельта-функций Дирака: $d(z-h)d(r-R)$.

Токопровод витка в местах подключения к источнику имеет радиальный разрез, математически описываемый функцией азимутального угла с разрывом первого рода (типа «скачок»):

$$f(j) = h(j - j_0) - h(j - 2\pi - j_0),$$

где $h(j)$ – ступенчатая функция Хевисайда; $2j_0$ – ширина разреза, выраженная в единицах измерения азимутального угла.

По витку протекает азимутальный ток с плотностью

$$j_{\phi, i}(t, r, j, z) = j_m j(t) d(r-R) d(z-h) f(j),$$

где j_m – амплитуда плотности; $j(t)$ – ее временная зависимость.

Примечание. Подчеркнем, что допущение о форме импульса возбуждающего тока с азимутальным разрывом первого рода исключает влияние токоподводов к витку, но не противоречит требованию непрерывности линий тока. Принятая модель расчёта предполагает их замкнутость в элементах разрядного контура (рис.1), частью которого является и токопровод витка, а не в пространстве между местами его подсоединения к источнику за счёт априори пренебрежимо малых токов смещения.

Согласно принятым допущениям в системе возбуждается магнитное поле с вектором напряжённости $\vec{H} = \{H_r, N_0, H_j, N_0, H_z, N_0\}$.

Тогда уравнения Максвелла запишем в таком виде [8]:

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{H}(t, r, j, z) &= j_{\phi, i}(t, r, j, z); \\ \text{div} \vec{H}(t, r, j, z) &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Из системы (1) получаем уравнения в частных производных для нетривиальных компонент вектора напряжённости магнитного поля:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) - \frac{\partial^2 H_z}{\partial j^2} + \dots$$

$$+ \frac{\partial^2 H_z(t, r, j, z)}{\partial z^2} = - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r j_i(t, r, j, z)); \quad (2)$$

$$\frac{\partial H_z(t, r, j, z)}{\partial j} - \frac{\partial}{\partial z} (r H_j(t, r, j, z)) = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r H_j(t, r, j, z)) - \frac{\partial H_r(t, r, j, z)}{\partial j} = 0. \quad (4)$$

Учитывая азимутальную зависимость тока в витке, его можно представить разложением по косинусам кратных дуг [9]:

$$j_i(t, r, j, z) = \sum_{n=0}^{\infty} j_n(t, r, z) \cos(nj), \quad (5)$$

где $j_n(t, r, z) = j_m j(t) F_n(j_0) d(r-R) dz-h$,

$$F_n(j_0) = \begin{cases} \frac{2 \sin(nj_0)}{pn} & n \neq 0; \\ \frac{j_0}{p} & n = 0. \end{cases}$$

Интегрируя дифференциальное уравнение (2), находим нормальную компоненту напряжённости магнитного поля, возбуждаемого в рассматриваемой системе [9]:

$$H_z(t, r, j, z) = \sum_{n=0}^{\infty} (j_m j(t)) K_n(1) J_n(1r) \cos(nj) \cdot [\text{sh}(1z)e^{-1h} - \text{sh}(1(z-h))\text{h}(z-h)] dl, \quad (6)$$

где $K_n(1) = \int_0^1 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r j_n(t, r, z)) J_n(1r) r dr = F_n(j_0) f_n(1)$;

$f_n(1) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial r} (r d(r-R)) J_n(1r) dr = R \frac{dJ_n(1r)}{dr} \Big|_{r=R} = \frac{(1r)}{2} [J_{n-1}(1r) - J_{n+1}(1r)]$; $J_n(1r)$ – функция Бесселя n -го порядка; 1 – параметр преобразования.

Из уравнения (3) с помощью (6) определяем азимутальную компоненту $H_j(t, r, j, z)$:

$$H_j(t, r, j, z) = - \sum_{n=0}^{\infty} (j_m j(t)) n K_n(1) \frac{J_n(1r)}{r} \sin(nj) \cdot \frac{[\text{ch}(1z)e^{-1h} - \text{ch}(1(z-h))\text{h}(z-h)]}{1} dl. \quad (7)$$

Отметим, что при интегрировании по переменной z в зависимости (3) произвольная постоянная интегрирования принята равной нулю, чтобы удовлетворить условию $\lim_{z \rightarrow \Gamma} H_j(t, r, j, z) = 0$.

Из выражений (4) и (7) находим радиальную компоненту напряжённости магнитного поля:

$$H_r(t, r, j, z) = - \sum_{n=0}^{\infty} (j_m j(t)) K_n(1) \frac{J_n(1r)}{r} \cos(nj) \cdot \frac{[\text{ch}(1z)e^{-1h} - \text{ch}(1(z-h))\text{h}(z-h)]}{1} dl. \quad (8)$$

Как известно, на поверхности идеального проводника модули компонент плотности возбуждаемых токов равны модулям соответствующих составляющих вектора напряжённости магнитного поля.

С помощью (8) при учёте взаимного расположения направляющих ортов в выбранной системе координат (согласно рис. 1) определяем, что

$$j_j(t, r, j) = - \sum_{n=0}^{\infty} (j_m j(t)) K_n(1) \frac{dJ_n(1r)}{dr} \cos(nj) \cdot \frac{e^{-1h}}{1} dl, \quad (9)$$

Достоверность выражения (9) можно установить предельным переходом к зависимости, которая может быть получена из формул монографии Г.А. Шнеерсона для поля аксиально-симметричного витка над идеально проводящим пространством [8].

Так, для «замкнутого» витка с $j_0 \gg 0$ зависимость (9) принимает вид:

$$j_j(t, r, j) = - \sum_{n=0}^{\infty} (j_m j(t)) R T J_1(1R) J_1(1r) | e^{-1h} dl. \quad (10)$$

1) Следует отметить: результат (10) полностью совпадает с выражением для азимутальной компоненты вихревого тока, найденным в приближении аксиальной симметрии;

2) при $h=0$ выражение (10) преобразуется к виду:

$$j_j(t, r, j) = - \sum_{n=0}^{\infty} (j_m j(t)) T [R J_1(1R)] J_1(1r) dl = - \sum_{n=0}^{\infty} (j_m j(t)) T [T d(r-R) J_1(1r) dr] J_1(1r) dl = - \sum_{n=0}^{\infty} (j_m j(t)) d(r-R). \quad (11)$$

Конечный результат преобразований в (11) с точностью до знака совпадает с выражением для возбуждающего тока в постановке задачи, что физически означает равенство значений индуцированного тока и тока индуктора, когда расстояние между индукторами и идеально проводящим объектом ничтожно мало.

Аналогичным образом с помощью (7) записываем выражение для радиальной составляющей линейной плотности вихревого тока на поверхности проводника:

$$j_r(t, r, j) = - (j_m j(t)) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nh} \frac{J_n(1r)}{r} \sin(nj) \frac{e^{-lh}}{l} dl. \quad (12)$$

Как следует из полученных выражений для компонент индуцированных токов, их временные зависимости совпадают с временной функцией тока в индукторе, что также согласуется с выводами известных работ.

Для удобства в расчётах распределения вихревых токов на поверхности пластины целесообразно ввести безразмерную переменную интегрирования $x = lR, x \in [0, 1]$ и расчёты проводить для относительных величин.

В этом случае для компонент вихревого тока получаем:

$$j_{j-отн} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nh} F_n(j_0) \cos(nj) \quad (13)$$

$$j_{r-отн} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nh} n F_n(j_0) \sin(nj) \quad (14)$$

где $F_n(j_0) = \frac{2 \sin(nj_0)}{pn}$ $n \neq 0$;
 $F_n(j_0) = \frac{j_0}{p}$ $n = 0$;

$$f_n(x) = \frac{x}{4} [J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)].$$

Полный ток, индуцированный в металлической пластине, будет определяться как корень квадратный из суммы квадратов составляющих:

$$j_{отн} = \sqrt{j_{j-отн}^2 + j_{r-отн}^2} \quad (15)$$

Численные оценки индуцированных токов. Вычисления амплитудно-пространственного распределения вихревых токов, возбуждаемых «незамкнутым» одновитковым индуктором в идеально проводящем металлическом объекте, проведём для постоянного воздушного зазора между ними, рав-

ного $h/R = 0,1$. Изменение данного значения зазора и исследование его влияния не представляют интереса, поскольку из априорных физических соображений очевидна роль этого параметра системы.

Особый интерес для практики в первую очередь вызывают оценки влияния размеров разреза в витке на амплитуды и распределения индуцированных токов.

Как это видно из рис. 1, значение величины разреза («разрыва») определяется в единицах измерения азимутального угла $2j_0$. При расчётах более предпочтительным и репрезентативным представляется введение относительной ширины разреза, определяемой как $q = 2j_0 / 2\pi$ (фактически отношение длины дуги, соответствующей углу разреза, к длине окружности всего витка в целом).

Графическую иллюстрацию исследуемых процессов представим в виде объёмных эпюр, которые наглядно представляют распределение плотности возбуждаемых вихревых токов по пространственным координатам (на шкале слева указаны амплитуды в относительных единицах). Расчётные зависимости будут даны в виде эпюр двух видов.

Первая из них соответствует представлению в естественной цилиндрической системе координат, непосредственно связанной с геометрией витка индуктора. Вторая представляет собой развёртку цилиндрической интерпретации, но в декартовой прямоугольной системе координат. Наиболее иллюстративные эпюры представлены на рис. 2–4.

Вычисления плотности полного тока, индуцированного в проводнике, проводились по формулам (13)–(15).

Перейдём к компонентам вектора плотности тока, индуцированного в проводнике. Вычисления азимутальной и радиальной компонент проводились по формулам (13) и (14).

Так же как и ранее, графическую иллюстрацию исследуемых процессов оформим в виде объёмных эпюр. Для лучшего визуального восприятия компоненты вектора плотности тока расположены рядом (рис. 5 и 6).

Сформулируем основные результаты проведенных вычислений.

В зоне под разрезом в витке отмечается существенное нарушение однородности пространственного распределения плотности индуцированных токов и уменьшение их амплитудных значений, что делает недопустимым использование приближения аксиальной симметрии в расчётах одновитковых индукторных систем.

Следствием отмеченной неоднородности пространственного распределения является, в первую очередь, снижение интегрального значения инду-

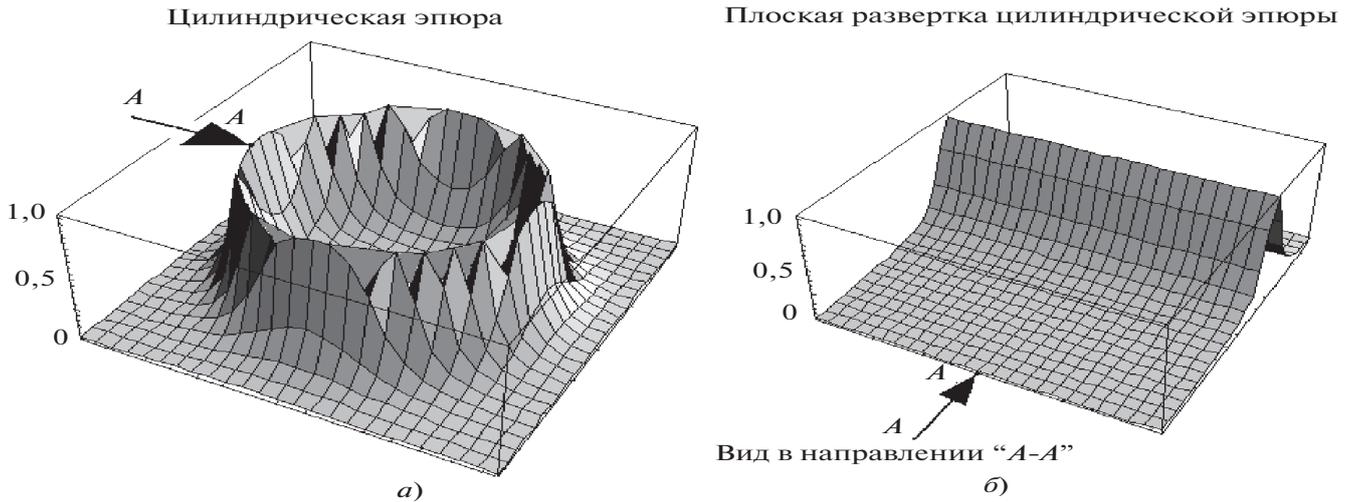


Рис. 2. Объёмные эпюры амплитудно-пространственного распределения плотности полного тока, индуцированного замкнутым витком, $q = 0$: *a* – объёмная эпюра в цилиндрической системе координат; *б* – объёмная развёртка эпюры в декартовой прямоугольной системе координат

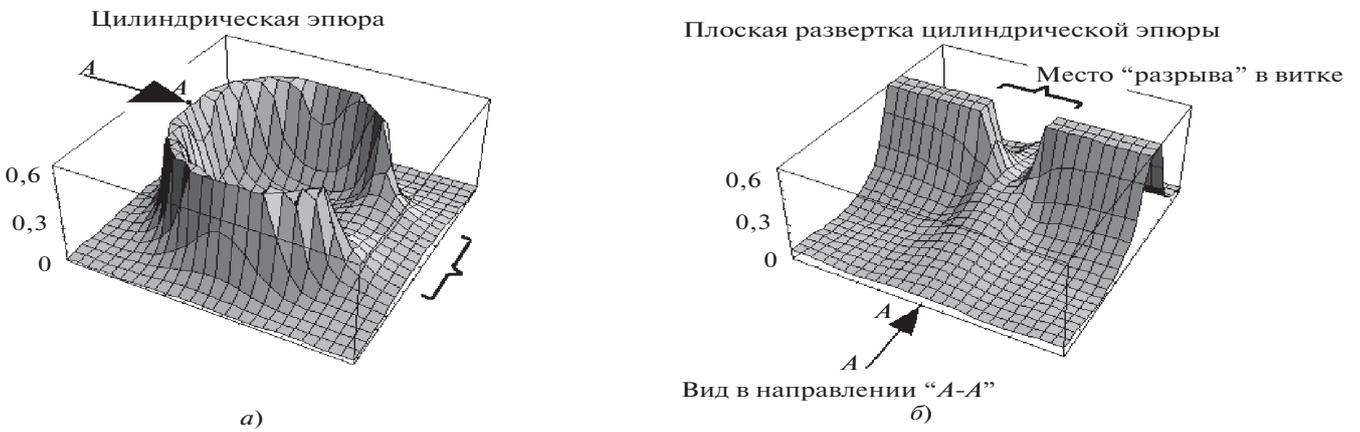


Рис. 3. Объёмные эпюры амплитудно-пространственного распределения плотности полного тока, индуцированного витком с «разрывом», $q = 0,2$: *a* – объёмная эпюра в цилиндрической системе координат; *б* – объёмная развёртка эпюры в декартовой прямоугольной системе координат

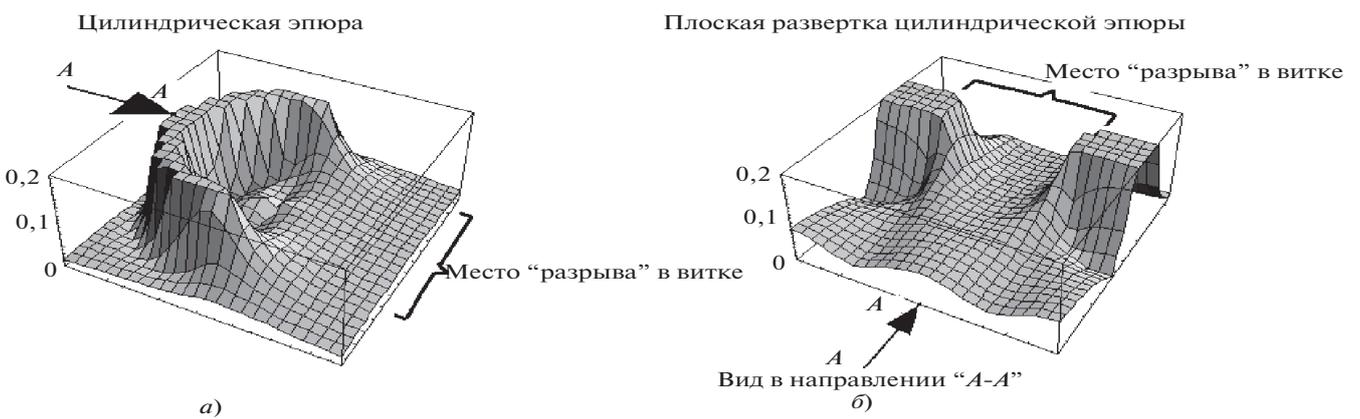


Рис. 4. Объёмные эпюры амплитудно-пространственного распределения плотности полного тока, индуцированного витком с «разрывом», $q \gg 0,5$: *a* – объёмная эпюра в цилиндрической системе координат; *б* – объёмная развёртка эпюры в декартовой прямоугольной системе координат

цированного тока как векторной суммы компонент.

Физически возбуждение вихревых токов в проводнике внешним полем цилиндрического витка можно интерпретировать как процесс протекания

индуцированного тока в замкнутом контуре с некоторым эквивалентным сопротивлением.

Значение эквивалентного сопротивления определяет амплитуду индуцированного тока, при этом оно обусловлено не только совокупностью извест-

ных факторов (пространственная ориентация витка и поверхности проводника, а также расстояние между ними), но и асимметрией витка из-за наличия разреза для подсоединения токопроводов от источника мощности.

В рамках изложенной физической модели становится очевидным, что при минимальной электромагнитной связи, когда виток перпендикулярен плоскости проводника или между ними достаточно

большое расстояние, или же довольно большой разрез, значение эквивалентного сопротивления стремится к бесконечности, а значение индуцированного тока стремится к нулю. При максимальной связи, если плоскости витка и проводника компланарны, расстояние между ними стремится к нулю, разрез отсутствует, значение эквивалентного сопротивления стремится к нулю, а значение индуцированного тока приближается к значению возбу-

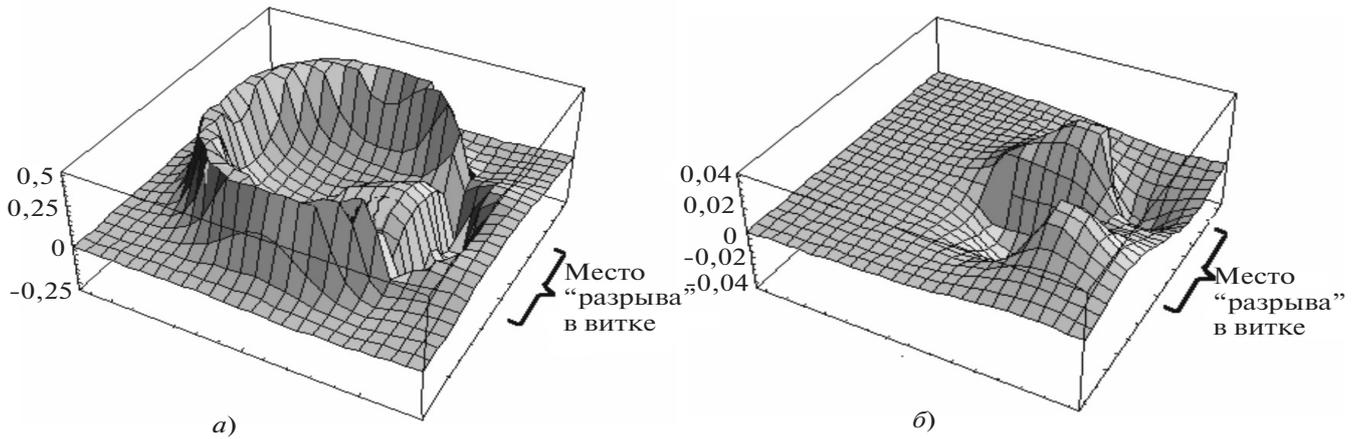


Рис. 5. Пространственные распределения азимутальной (а) и радиальной (б) компонент вектора индуцированного тока для $q = 0,2$

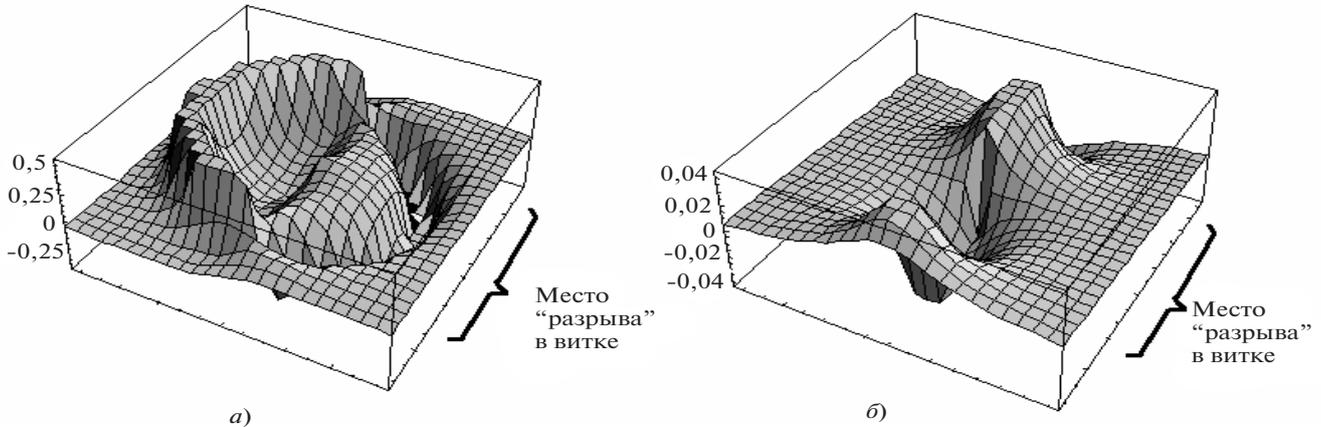


Рис. 6. Пространственные распределения азимутальной (а) и радиальной (б) компонент вектора индуцированного тока для $q = 0,5$

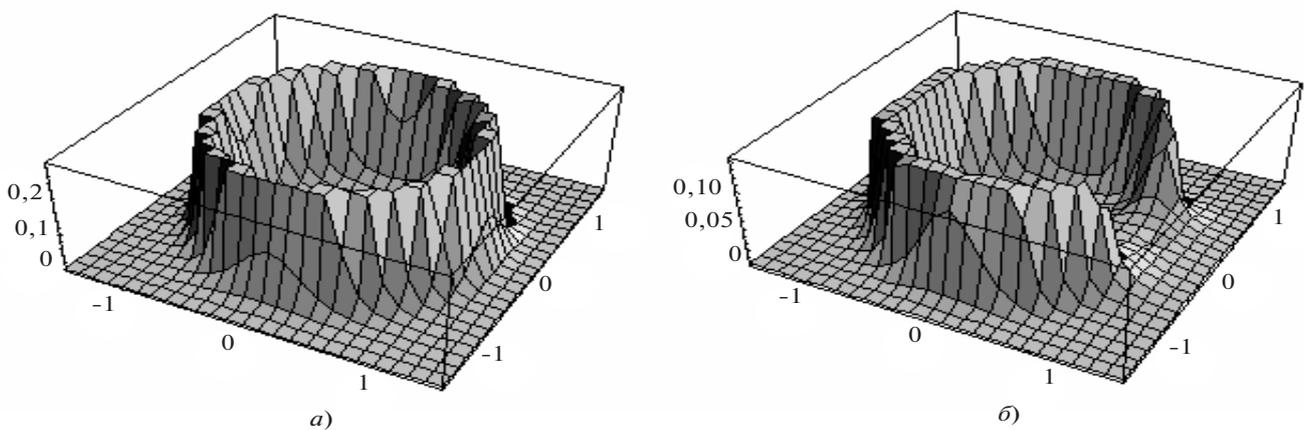


Рис. 7. Пространственные распределения сил магнитного давления на проводник при строгой аксиальной симметрии витка (а) и наличии радиального разреза с относительной шириной $q = 0,2$ (б)

ждающего тока в витке индуктора, но их направления противоположны.

В аксиально-симметричной системе (виток без разреза) возбуждается только азимутальная компонента индуцированного тока.

Нарушение аксиальной симметрии (виток с разрезом) есть причина появления радиальной составляющей индуцированного тока (эпюры на рис. 5, 6).

Пространственные максимумы радиальных токов располагаются вблизи краёв разреза в витке и имеют разные знаки (рис. 5, 6), что говорит об их протекании в противоположном направлении.

В целом сравнение эпюр индуцированных токов на рис. 3, 4 и 5, 6 показывает, что пространственная форма полного индуцированного тока (как суммы векторных компонент!) определяется, в основном, азимутальной составляющей.

В заключение приведём эпюры пространственного распределения сил магнитного давления, вычисленные с помощью выражений для индуцированных токов (формула (15)). В условиях рассматриваемой задачи нет проникновения полей сквозь идеально проводящий металлический лист. Возбуждаемые силы магнитного давления определяются как величины, пропорциональные квадрату индуцированных токов: $P = j_{\text{отн}}^2 \frac{\mu_0 r}{3R} j \frac{\mu_0}{\mu} [1, 8]$.

Как видно из вычислений, наличие разреза в витке приводит не только к появлению «провала» в области разреза, но и к снижению амплитуд возбуждаемых электродинамических усилий по контуру витка.

Отметим, что графические зависимости рис. 7 наглядно иллюстрируют практическое применение проведенных вычислений для создания действенных инструментов в магнитно-импульсной обработке металлов.

Выводы. 1. Получены аналитические решения трёхмерной электродинамической задачи возбуждения вихревых токов в идеально проводящем объекте полем тонкого кругового витка с разрезом. Несомненными преимуществами предложенных решений по сравнению с численными аналогами (например программный продукт ANSYS) является возможность выделять влияние отдельных факторов для анализа протекающих процессов и отсутствие требований по заданию граничных условий для вектора электромагнитного поля в непосредственной окрестности исследуемого объекта.

2. Анализ показал:

в области под разрезом витка существенно нарушается однородность пространственного распределения плотности индуцированных токов и снижаются их амплитудные значения;

нарушение аксиальной симметрии витка является причиной появления радиальной составляющей индуцированного тока;

пространственная форма полного индуцированного тока (как суммы векторных компонент!) определяется в основном азимутальной составляющей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Туренко А.Н., Батыгин Ю.В., Гнатов А.В. Импульсные магнитные поля для прогрессивных технологий. Т. 3. Теория и эксперимент притяжения тонкостенных металлов импульсными магнитными полями: Монография. — Харьков: ХНАДУ, 2009.
2. Гнатов А.В. Электромагнитные процессы в индукционной индукторной системе с одновитковым соленоидом, массивным экраном и тонкостенной листовой заготовкой. — Электротехника і електромеханіка, 2009, № 6.
3. Батыгин Ю.В., Бондаренко А.Ю., Чаплыгин Е.А. Электродинамические процессы в цилиндрической индукционной индукторной системе для магнитно-импульсного притяжения листовых заготовок. — Авіаційно-космічна техніка і технологія, 2007, № 11(47).
4. Батыгин Ю.В., Гнатов А.В., Сериков Г.С. Расчет усилий в индукционной индукторной системе прямоугольной геометрии с неферромагнитными массивным экраном и заготовкой. — Электротехніка і електромеханіка, 2009, № 3.
5. Батыгин Ю.В., Лавинский В.И., Бондаренко А.Ю. Вихревые токи в тонких металлических листах при магнитно-импульсной обработке металлов. — Электричество, 2009, №9.
6. Батыгин Ю.В., Бондаренко А.Ю. Силы, действующие на тонкостенный проводник, в проникающем поле плоского одновиткового соленоида. — Техническая электродинамика, 2010, №1.
7. Батыгин Ю.В., Гнатов А.В. Магнитно-импульсное притяжение листовых металлов — перспективное направление в развитии электромагнитной штамповки. — Технічна електродинаміка. (Тематичний випуск), 2010, ч.1.
8. Шнеерсон Г.А. Поля и переходные процессы в аппаратуре сверхсильных токов. — Л.: Энергоиздат, 1981.
9. Дж. Мэтьюз, Р.Уокер. Математические методы физики. — М: Атомиздат, 1978.

[09.12.10]

Авторы: Батыгин Юрий Викторович в 1972 г. окончил инженерно-физический факультет Харьковского политехнического института (ХПИ). Докторскую диссертацию по специальности «Техника сильных электрических и магнитных полей» защитил в Национальном техническом университете «ХПИ» в 1994 г. Заведующий кафедрой физики Харьковского национального автомобильно-дорожного университета (ХНАДУ).

Гнатов Андрей Викторович в 1998 г. окончил факультет энергетического и специального обеспечения Харьковского военного университета (ХВУ). Кандидатскую диссертацию по специальности «Вооружение и военная техника» защитил в ХВУ в 2004 г. Доцент кафедры автомобильной электроники ХНАДУ.