

Типовые ячейки-многополюсники решетчатых схем замещения плоскомеридианных электромагнитных и температурных полей в задачах электротехники

ИНКИН А.И., АЛИФЕРОВ А.И., БЛАНК А. В.

Двумерные осесимметричные электромагнитные и температурные поля — один из распространенных видов полей, к исследованиям которых приводит постановка различных инженерных задач в области теоретической электротехники. Общих теоретических решений таких задач не существует. В связи с этим в инженерной практике обычно используются различные эмпирические зависимости и основанные на них методики либо применяются численные методы решения дифференциальных уравнений теории поля. В статье разработаны алгоритмы синтеза типовых схем замещения прямоугольных ячеек малых размеров для плоскомеридианных электромагнитных и температурных полей. В основе предложенных алгоритмов лежат фундаментальные законы электромагнетизма и теории теплопередачи в интегральной форме, что обеспечивает простоту, наглядность и адекватность схемной аппроксимации электромагнитных и температурных полей. Представлены конкретные примеры, иллюстрирующие расчеты плоскомеридианного электромагнитного и температурного полей с использованием решетчатых схем в сравнении с численными расчетами. Статья имеет прикладную направленность и дает основание считать перспективным использование решетчатых схем замещения полей в научных исследованиях и инженерной практике.

Ключевые слова: электромагнитное поле, температурное поле, исследование, инженерные задачи, решетчатые схемы замещения

Двумерные осесимметричные электромагнитные и температурные поля — распространенные виды полей, к исследованиям которых приводят постановка и решение различных инженерных задач в области теоретической электротехники. Общих теоретических решений таких задач не существует. В инженерной практике обычно используются различные эмпирические зависимости и основанные на них методики либо применяются численные методы решения дифференциальных уравнений теории поля.

В настоящее время в известных пакетах компьютерной математики существуют стандартные программы решения систем алгебраических уравнений, например уравнений Кирхгофа для электрической цепи. Для моделирования электрических цепей широко используются и программы-симуляторы.

Представляется актуальной разработка научно обоснованного алгоритма эквивалентной схемной аппроксимации поля, которая по существу сводила бы расчет двумерного плоскомеридианного электромагнитного поля к решению стандартной задачи анализа электрических цепей.

В статье излагаются принципы синтеза типовых EH -, jD - и TQ -эквивалентных схем замещения ячеек электромагнитных, электростатических и температурных полей, а также приводятся конкретные тестовые примеры формирования решетчатых

схем замещения и расчета плоскомеридианных полей по этим схемам.

Типовая EH -ячейка-многополюсник решетчатой схемы замещения плоскомеридианного синусоидального электромагнитного поля. В исследуемом плоскомеридианном поле компоненты векторов электрической и магнитной напряженностей в цилиндрических координатах (r, α, z) являются функцией переменных r и z . В данном случае предполагается:

$$\vec{E} = \vec{e}_\alpha E_\alpha(r, z);$$

$$\vec{H} = \vec{e}_r H_r(r, z) + \vec{e}_z H_z(r, z).$$

Такое поле может существовать, например, в устройствах, содержащих цилиндрический индуктор с соизмеримыми продольными и радиальными размерами и совокупность соосных с ним проводящих тел вращения произвольного меридианного сечения.

На рис. 1 изображена прямоугольная (Dr, Dz) ячейка в проводящей (g, m) среде. Ячейка ограничена расстояниями от оси r_1 и r_2 , $\frac{r_1 + r_2}{2} = r_0$ и по существу является поперечным сечением кругового проводящего контура, обтекаемого синусоидальным током $D\vec{I}_0$. На рис. 1 также обозначены услов-

но положительные направления касательных составляющих векторов поля на поверхности круго-

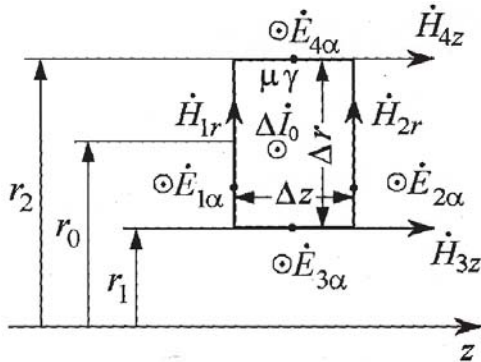


Рис. 1. EH-ячейка плоскомеридианного синусоидального электромагнитного поля

вого элемента (\dot{E}_a , \dot{H}_r , \dot{H}_z), общепринятые для цилиндрической системы координат.

Конфигурация схемы замещения ячейки определяется на основании закона полного тока [1]:

$$\oint \dot{H} dl = \oint \dot{H}_t dl = \oint \dot{H}_t dS = DI_0. \quad (1)$$

При указанных направлениях составляющих вектора магнитной напряженности для ячейки (Dr , Dz) справедливо уравнение

$$-H_{1r}Dr + H_{2r}Dr + H_{3z}Dz - H_{4z}Dz = DI_0. \quad (2)$$

Если в этом уравнении составляющие циркуляции вектора магнитной напряженности считать аналогами электрических токов

$$\begin{aligned} DI_1 &= H_{1r}Dr; & DI_2 &= H_{2r}Dr; \\ DI_3 &= H_{3z}Dz; & DI_4 &= H_{4z}Dz, \end{aligned} \quad (3)$$

то согласно первому закону Кирхгофа уравнению (2) следует поставить в соответствие пятиэлементную схему замещения на рис. 2. В этой схеме DI_0

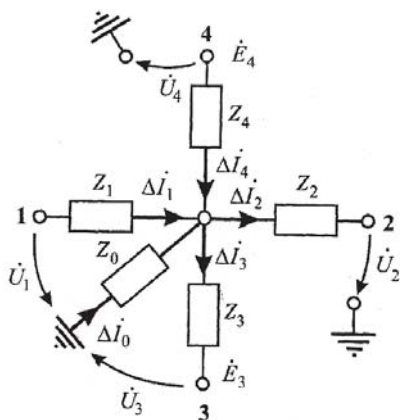


Рис. 2. Схема замещения EH-ячейки плоскомеридианного синусоидального электромагнитного поля

DI_0 – ток, охваченный контуром ячейки, реальный ток в круговом витке с сопротивлением

$$Z_0 = \frac{2pr_0}{gDrDz}. \quad (4)$$

Сопротивления Z_1, Z_4 – пока неизвестны. Для их определения воспользуемся законом электромагнитной индукции [1]:

$$\oint \dot{E} dl = -j\omega \oint \dot{B} dS = -j\omega F. \quad (5)$$

Для замкнутого контура (Da, r_0, Dz), изображенного на рис. 3, при малых размерах ячейки магнитный поток \dot{DF}_r определяется по средним значениям радиальных составляющих вектора \dot{H} :

$$\dot{DF}_r = m \frac{H_{1r} + H_{2r}}{2} DzDar_0, \quad (6)$$

откуда

$$\begin{aligned} E_1 Dar_0 - E_2 Dar_0 &= \\ = -j\omega m \frac{H_{1r} + H_{2r}}{2} DzDar_0. \end{aligned} \quad (7)$$

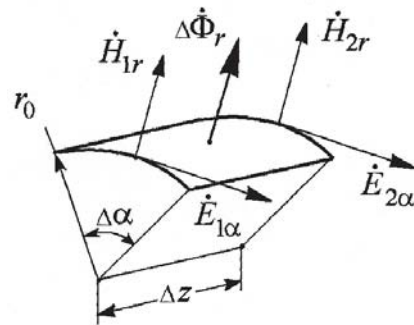


Рис. 3. Магнитный поток, пронизывающий EH-ячейку в радиальном направлении

Для плоскомеридианного поля Da соответствует $2p$. Полагая $E_1 2pr_0 = -U_1$ и $E_2 2pr_0 = -U_2$, имеем:

$$U_1 - U_2 = j\omega m p r_0 (H_{1r} + H_{2r}) Dz. \quad (8)$$

В соответствии со вторым законом Кирхгофа для схемы замещения (рис. 2) справедливо уравнение

$$U_1 - U_2 = H_{1r} Dr Z_1 + H_{2r} Dr Z_2. \quad (9)$$

Сопоставляя (8) и (9), находим:

$$Z_1 = Z_2 = j\omega m p r_0 \frac{Dz}{Dr}. \quad (10)$$

Аналогичные уравнения для магнитного потока $\Delta\psi_z$ и контура схемы замещения (U_3, U_4, Z_4, Z_3) приводят к выражению

$$Z_3 = Z_4 = j\omega\mu\epsilon r_0 \frac{Dr}{Dz}. \quad (11)$$

Типовая ячейка-многополюсник решетчатой схемы замещения плоскомеридианного потенциала поля.

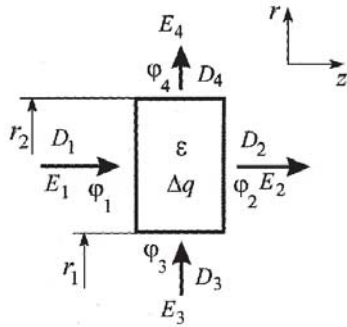


Рис. 4. Активная j D-ячейка плоскомеридианного электростатического поля

На рис. 4 изображена прямоугольная (Dr, Dz) ячейка (закрывающая в своем объеме заряд Dq), которая по существу является поперечным сечением кольца, ограниченного цилиндрическими поверхностями радиусов r_1 и r_2 ; средний радиус ячейки $r_0 = \frac{r_1 + r_2}{2}$.

Схема замещения ячейки формируется на основании базовой интегральной теоремы электростатики – теоремы Гаусса [1]:

$$\oint_V \bar{D} dS = \int_V \bar{\rho} dV. \quad (12)$$

С учетом указанных на рис. 4 условно положительных направлений нормальных составляющих вектора электрического смещения \bar{D} на поверхности кольца из (12) следует:

$$- D_1 2\pi r_0 Dr + D_2 2\pi r_0 Dr - D_3 2\pi r_1 Dz + D_4 2\pi r_2 Dz = Dq. \quad (13)$$

В левой части этого уравнения – составляющие потоков вектора \bar{D} (DY_1, DY_2, DY_3, DY_4), в правой части – реальный заряд в объеме кольца.

По своей структуре уравнение (13) аналогично уравнению Кирхгофа, ему можно поставить в соответствие пятиэлементную схему замещения (рис. 5) с неизвестными пока сопротивлениями Z_1, Z_4 . Аналогом токов в этой схеме замещения являются потоки DY_1, DY_2, DY_3, DY_4 , а источник Dq задан по условию задачи и обладает свойствами источника тока.

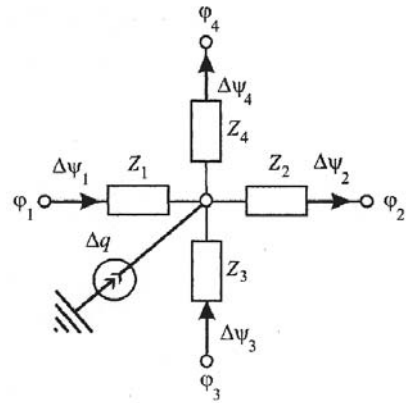


Рис. 5. Схема замещения j D-ячейки плоскомеридианного электростатического поля

Полагая, что внутри каждой ячейки компоненты векторов поля изменяются по линейному закону, составим уравнения для разностей потенциалов в ячейке по направлениям r и z :

$$j_1 - j_2 = \frac{E_1 + E_2}{2} Dz; \quad (14)$$

$$j_3 - j_4 = \frac{E_3 + E_4}{2} Dr. \quad (15)$$

Для схемы на рис. 5:

$$j_1 - j_2 = DY_1 Z_1 + DY_2 Z_2; \quad (16)$$

$$j_3 - j_4 = DY_3 Z_3 + DY_4 Z_4. \quad (17)$$

Учтем далее, что в (16) и (17)

$$\begin{aligned} DY_1 &= E_1 \epsilon_0 2\pi r_0 Dr; \\ DY_2 &= E_2 \epsilon_0 2\pi r_0 Dr; \\ DY_3 &= E_3 \epsilon_0 2\pi r_1 Dz; \\ DY_4 &= E_4 \epsilon_0 2\pi r_2 Dz. \end{aligned} \quad (18)$$

Сопоставляя (14), (15) и (16), (17) с учетом (18), находим сопротивления:

$$Z_1 = Z_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Dz}{Dr}; \quad (19)$$

$$Z_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \frac{Dr}{Dz}; \quad (20)$$

$$Z_4 = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{Dr}{Dz}. \quad (21)$$

Использование аналогии потенциальных электростатических и температурных полей позволяет также синтезировать TQ-схемы замещения осесимметричных стационарных температурных полей.

Уравнение теплового баланса, связывающее плотность теплового потока \bar{q} с объемной плотностью внутренних источников теплоты q_n [2], в случае стационарного температурного поля аналогично теореме Гаусса (12):

$$\dot{\bar{q}} dS = \dot{q}_n dV. \quad (22)$$

Если учесть, что плотность теплового потока связана с градиентом температуры законом Фурье

$$\bar{q} = -l \text{grad} T, \quad (23)$$

где l – теплопроводность среды, достаточно заменить в (19)–(21) e на l , чтобы получить выражения для параметров ячейки стационарного температурного поля:

$$Z_1 = Z_2 = \frac{1}{4\pi l r_0} \frac{Dz}{Dr}; \quad (24)$$

$$Z_3 = \frac{1}{4\pi l r_1} \frac{Dr}{Dz}; \quad (25)$$

$$Z_4 = \frac{1}{4\pi l r_2} \frac{Dr}{Dz}. \quad (26)$$

При этом аналогом токов в схеме замещения (рис. 5) служат тепловые потоки через соответствующие поверхности ячейки, аналогом источника – мощность внутренних источников теплоты в объеме ячейки, температура является аналогом потенциала.

Расчеты плоскомеридианного электромагнитного и температурного полей с использованием решетчатых схем. Для проверки разработанного расчетного метода были проведены расчеты электромагнитного и температурного полей двумя различными методами: по решетчатым схемам (аналитически) и численно. В аналитических расчетах использована программа-симулятор для схемотехнического моделирования электрических цепей Multisim 10. Численные расчеты проведены в программе Elcut 5.5, позволяющей решать связанные электромагнитно-тепловые задачи.

Решена следующая тестовая задача. Стальной ферромагнитный цилиндр (высотой 100 мм, диаметром 40 мм, с относительной магнитной проницаемостью 200, проводимостью $2,27 \times 10^6 \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$) нагревается водоохлаждаемым индуктором (высота индуктора 102 мм, внутренний диаметр 50 мм, число витков 9, ток 1300 А, 50 Гц). При численном расчете сначала рассчитано поле синусоидальных токов, после чего – стационарное температурное поле (теплопроводность цилиндра 42 Вт/(м·К), коэффициент теплоотдачи с поверхности 34 Вт/(м²·К), температура омывающего воздуха 20 °С), причем источники тепла взяты из расчета электромагнитного поля.

При аналитическом расчете также сначала с помощью решетчатой схемы рассчитано электромагнитное поле, затем сформирована TQ -схема для расчета стационарного температурного поля, в ко-

торой источники тепла для каждой ячейки вычислены интегрированием двумерной функции элект-

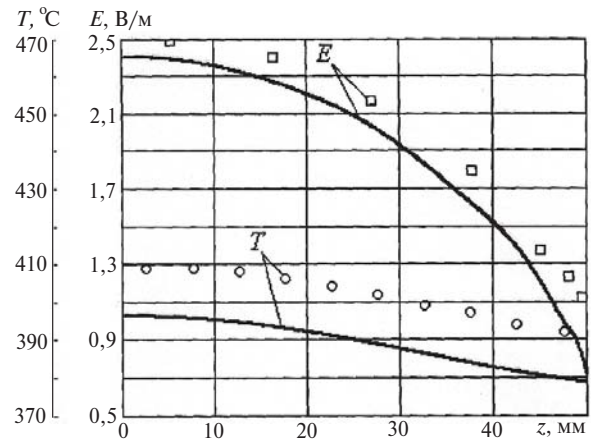


Рис. 6. Распределение электрической напряженности и температуры на боковой поверхности нагреваемого цилиндра, полученное численным и аналитическим расчетом

трической напряженности, полученной интерполированием решения электромагнитной задачи.

Результаты расчета тестовой задачи представлены на рис. 6. Сравнение численных и аналитических расчетов электромагнитного и температурного полей свидетельствует о достаточно высокой точности разрабатываемого расчетного метода.

В заключение отметим, что статья имеет прикладную направленность и дает основание считать перспективным использование решетчатых схем замещения полей в научных исследованиях и инженерной практике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нейман Л.Р., Демирчян К.С., Коровкин Н.В., Чечурин В.Л. Теоретические основы электротехники: Учеб. для вузов. – СПб: Питер, 2003, т. 3, изд. 4-е, 384 с.
2. Луканин В.Н., Шатров М.Г., Камфер Г.М. и др. Теплотехника: Учеб. пособие для вузов/Под ред. В.Н. Луканина. – М.: Высшая школа, 2000, изд. 2-е, 671 с.

[28.11.13]

Авторы: Инкин Алексей Иванович окончил электромеханический факультет Новосибирского электротехнического института (НЭТИ) в 1959 г. В 1987 г. защитил докторскую диссертацию «Теория и электромагнитный расчет электрических машин с составными активными объемами» в Московском энергетическом институте. Профессор кафедры теоретических основ электротехники Новосибирского государственного технического университета (НГТУ).

Алиферов Александр Иванович окончил электромеханический факультет НЭТИ в 1978 г. В 1999 г. защитил докторскую диссертацию «Электротепловые процессы в токоведущих проводниках произвольной конфигурации. Теория и практика» в НГТУ. За-

ведущий кафедрой автоматизированных электро-технологических установок НГТУ.

Бланк Алексей Валерьевич окончил электромеханический факультет НГТУ в 1999 г. В 2005 г. защитил кандидатскую диссертацию «Разработка метода расчета магнитного поля в дискретно-однородных цилиндрических структурах явнополюсных электрических машин» в НГТУ. Доцент кафедры теоретических основ электротехники НГТУ.

Elektrichestvo (Electricity), 2014, No. 11, pp. 53–57.

Two-dimensional axially symmetrical electromagnetic and temperature fields are one of widely encountered kinds of fields the need to analyze which follows from the statement of various practical problems in the field of theoretical electrical engineering. There are no general theoretical solutions to such problems. In view of this, various empirical dependences and techniques based on these dependences are commonly used in engineering practice, or numerical methods for solving the differential equations of field theory are applied. Algorithms for synthesizing standard equivalent networks of small-size rectangular cells for plane-meridian electromagnetic and temperature fields are developed. The proposed algorithms are based of the fundamental laws of electromagnetism and theory of heat transfer in integral form due to which the equivalent circuits approximating electromagnetic and temperature fields are simple and clear and adequately reflect the originals. Specific examples illustrating the calculations of plane-meridian electromagnetic and temperature fields with the use of lattice-type equivalent networks in comparison with numerical calculation methods are presented. The article is aimed at solving applied problems and gives us grounds to consider that application of lattice-type equivalent networks for analyzing fields has good prospects for use in scientific research works and in engineering practice.

Key words: electromagnetic field, temperature field, investigation, engineering problems, lattice-type equivalent networks

Standard Multiport Cells of Lattice-Type Equivalent Networks for Representing Plane-Meridian Electromagnetic and Temperature Fields in Solving Electric Engineering Problems

Authors: Inkin Aleksei Ivanovich (Novosibirsk, Russia) – Doctor Techn. Sci. He is Professor at the Novosibirsk State Technical University (NSTU).

Aliferov Aleksandr Ivanovich (Novosibirsk, Russia) – Doctor Techn. Sci. He is Head of the Department at the NSTU.

Blank Aleksei Valer'yevich (Novosibirsk, Russia) – Cand. Techn. Sci. He is Associate Professor at the NSTU.

A.I. INKIN, A.I. ALIFEROV and A.V. BLANK

REFERENCES

1. **Neiman L.R., Demirchyan K.S., Korovkin N.V., Chechurin V.L.** *Teoreticheskiye osnovy elektrotekhniki* (Teoretical Principles of Electrical Engineering). 4th edit. St. Petersburg. Publ. «Piter», 2003, vol. 3, 384 p.
2. **Lukanin V.N., Shatrov M.G., Kamfer G.M.** *Teplotekhnika* (Heating Engineering)/Edit. by V.N. Lukanin. Moscow. Publ. «Vysshaya Shkola», 2th edit., 671 p.