

Анализ чувствительности центрального коэффициента размагничивания цилиндрического стержня к магнитной восприимчивости его материала

САНДОМИРСКИЙ С.Г.

Расчет центральных коэффициентов размагничивания (ЦКР) цилиндрических стержней остается актуальной задачей, особенно для тел с малой относительной длиной. Это обусловлено тем, что многие объекты, встречающиеся в практике магнитного контроля и измерений, имеют именно такую форму. В то же время опубликованные данные по экспериментальным и расчетным значениям ЦКР не всегда позволяют использовать их на практике. Разработана, физически и математически обоснована формула для расчета центрального коэффициента N размагничивания цилиндрического стержня во всем возможном диапазоне изменения его размеров и магнитных свойств. С использованием формулы проанализирована чувствительность N к изменениям магнитных свойств и размеров стержня. Определены соотношения параметров, при которых влиянием изменений магнитных свойств материала цилиндра на значение N можно пренебречь.

Ключевые слова: ферромагнитное тело, намагничивание, размагничивающий фактор, центральный коэффициент размагничивания

Состояние рассматриваемого вопроса. Намагничивание изделия (тела) из ферромагнитного материала отличается от намагничивания материала. На границе раздела между областями, занятыми материалом и свободными от него, формируются «магнитные заряды», меняющие действующее на материал магнитное поле. Для описания процесса и результата намагничивания ферромагнитного тела введено понятие коэффициента размагничивания N — отношения напряженности размагничивающего магнитного поля в намагниченном теле к намагниченности этого тела. Введение N упростило расчеты и обеспечило наглядность результатов намагничивания ферромагнитных тел. Но точный расчет N возможен только для однородно намагниченных тел — эллипсоидов, значение N которых не зависит от магнитной восприимчивости s материала.

Для расчета N эллипсоида вращения с отношением осей l , намагничиваемого вдоль оси вращения, получена точная формула [1]:

$$N = \mathcal{E}(l), \quad (1)$$

где

$$\mathcal{E}(l) = \frac{1}{l^2 - 1} \frac{e}{e} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{l^2 - 1}} \arccos \left| \frac{1}{l} \right| \right), \quad 0 \leq l < 1; \quad (2)$$

$$\mathcal{E}(l) = \frac{1}{l^2 - 1} \frac{e}{e} \frac{1}{\sqrt{l^2 - 1}} \ln \left(1 + \sqrt{l^2 - 1} \right) - \frac{1}{l}, \quad l > 1. \quad (3)$$

Но физической моделью многих электротехнических и промышленных объектов (сердечников феррозондов, трансформаторов, индукционных датчиков, электромагнитов, осей и других изделий при их магнитном контроле) служит неоднородно намагничиваемое тело — цилиндрический стержень

(далее — «цилиндр») с отношением l длины L к диаметру из материала с постоянной s (магнитная проницаемость μ материала в системе СИ равна: $\mu = s + 1$). Намагничивание и функционирование этих объектов определяет их центральный коэффициент размагничивания N . Многочисленными исследованиями установлено: значение N цилиндра зависит от его l и от s его материала монотонно [2–11]. Наблюдаемую в [12] немонотонность зависимости $N(s)$ цилиндров вблизи технического насыщения автор объяснил разбросом магнитных свойств, вызванным погрешностью измерения и нестабильностью технологии изготовления и термообработки образцов. В попытках [13–15] объяснения этой немонотонности физическими эффектами, возникающими при намагничивании цилиндров, использованы физически не обоснованные методики расчета и допущения.

Так, рассмотренная в [13] модель прямоугольного стержня, имеющего бесконечно большой размер «поперек» намагничивающего поля, не адекватно отражает ферромагнитные цилиндры. Результаты [14] применения расчетной модели определения N стержня «с учетом несовпадения векторов намагниченности с направлением намагничивания стержня» не сопоставлены с результатами расчетов N стержня, полученными на основании распределения [2] (повторить расчеты могут только авторы, исправившие «некоторые незначительные опечатки» в программе). Для применения программы нужно знать распределение среднего по сечению суммарного поля «для того или иного состояния стержня». Допущение, что «магнитная восприимчивость магнетика в момент его насыщения во всем объеме стержня остается не ниже 100» [15],

применимо далеко не для всех материалов и размеров стержней.

Развитие численных методов расчета магнитных полей [16] при физически верной методике расчета полезно для расчета магнитного поля от изделий сложной формы. Однако правильно описать распределение намагниченности в изделиях удается не всегда. Авторы [17], например, не заметили разницы между похожими результатами измерения и расчета методом пространственных интегральных уравнений магнитного состояния стального диска в поле накладного соленоида. Но принципиально важного расширения «пятна» остаточной намагниченности в таком диске по сравнению с «пятном» в приложенном поле не заметила уже и сама методика расчета [18]. Достоверность расчета намагниченности в телах ограничена и влиянием неизбежных погрешностей исходных данных для расчета на его результаты. Анализ такого влияния обычно отсутствует.

Наиболее достоверные результаты расчета N цилиндрического стержня получены путем интерполяции на базе (1) упрощенного решения общего уравнения для расчета $N(l, c)$ стержня [2, 7]:

$$N(l, c) = - \frac{1}{l^2} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[\frac{1}{\bar{x}} \frac{d}{d\bar{x}} \frac{\partial M(l, c, \bar{x})}{\partial \bar{x}} \right]_{\bar{x}=0} + \frac{1}{2l^2} \frac{\partial M_1(l, c)}{\partial M_0(l, c)} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left[\frac{1}{(\bar{x}^2 + 1/l^2)^{1,5}} \right]_{\bar{x}=1} \quad (4)$$

в котором автор [2] для описания распределения $M(l, c, x)$ намагниченности вдоль стержня воспользовался бесконечным степенным рядом с четными степенями относительной продольной координаты $\bar{x} = 2x/L$ [2]:

$$M(l, c, \bar{x}) = M_0(l, c) \sum_{n=0}^{\infty} C_n(l, c) \bar{x}^{2n}, \quad (5)$$

где $M_0(l, c)$, $M_1(l, c)$ – намагниченности, усредненные по сечениям $\bar{x}=0$ и $\bar{x}=1$; $C_n(l, c)$ – сложная функция от l и c [3, 8].

Анализ [19] наиболее полных и достоверных исследований N показал, что для расчетов N цилиндров с $0 \leq l < \infty$ при $m > 1$ следует рекомендовать интерполяционную формулу Вармута [6, 7]:

$$N_1(l) \approx \mathcal{E}(l) k_1(l), \quad (6)$$

где

$$k_1(l) = \frac{1 + 2,35 \ln(1 + 0,1371)}{1 + 2,28 \ln(1 + 0,2841)}. \quad (7)$$

При выполнении условия $m=1$ ($c=0$) для расчетов N цилиндра Вармутом предложено использовать формулу [6, 7]:

$$N_2(l) \approx \mathcal{E}(l) k_2(l), \quad (8)$$

где

$$k_2(l) = [1 + 2,2 \ln(1 + 0,3261)]^{-1}. \quad (9)$$

Формулы (6), (7) и (8), (9) являются [7] интерполяцией полученной Штебляйном и Шлехтаегом [3] более общей приближенной формулы:

$$N(l, c) = 2t^2 [1 - 6t^2 + 30t^4 - 140t^6 - C(l, c) \cdot (-2 \ln t - 3 - 4t^2 + 51t^4 - 293t^6)], \quad (10)$$

где $t = 1/2l$.

Формула (10), в свою очередь, получена в результате упрощенного решения общего уравнения (4) для расчета $N(l, c)$ цилиндрического стержня [2, 7].

Проверка (5), проведенная в [20] при $c=15$ и $c=5$, показала «существенное» несовпадение теоретического по (5) при $n=4$ и измеренного распределения намагниченности вдоль цилиндров. Поэтому автор [7] в расчетах N пользовался предложенным ему эмпирическим соотношением [21]:

$$M(l, c, \bar{x}) = M_0(c) [1 - C(l, c) \bar{x}^{2,2+0,027 \bar{x}^{1,5} \frac{1}{c^{2/3}}}], \quad (11)$$

С использованием (4) и (11) рассчитаны (табл. 1) по разным методикам значения $N(l, c)$ цилиндров с $10 \leq l \leq 500$ для $c = \infty; 1000; 100; 10; 1$ и построены номограммы для определения N цилиндров из материалов с различными c [7]. Но преимущества расчетов $N(l, c)$ цилиндров с использованием (11) по сравнению с (5) не убедительны из-за неизбежных погрешностей в экспериментах в [20, 21] и в связи с тем, что «образцов и их магнитная однородность на практике далеко не всегда известны достоверно» [7]. Кроме того, все результаты расчетов $N(l, c)$ по (4) с использованием как (11), так и (5) применимы лишь для цилиндров с $l \geq 10$, так как при $l \rightarrow 0$ полученные выражения теряют физический смысл.

Трудности в решении (4) при $l < 10$ Вармут обошел, интерполировав зависимости $N(l, c)$ из области $l > 10$ к достоверному значению $N(l=0, c) = 1$. Значения $N(l)$, вычисляемые по (6) и (8), практически являются усредненными по поперечному сечению цилиндров [7]. Именно это обеспечивает высокую точность описания с использованием (6) всех известных достоверных результатов измерения или расчета $N(l, c)$ цилиндров, сопоставление которых с результатами расчета по (6) в диапазоне $0,8 \leq l \leq 50,4$ при $c = \infty$ проведено в [19].

Однако относительная разница $s(l) = [N_1(l) - N_2(l)] / N_2(l)$ в расчете N цилиндров по (6) и (8) с увеличением l возрастает (рис. 1) от 0 при $l \rightarrow 0$ до 33 % при $l \rightarrow 1$, 206 % при $l=10$ и 619% при $l=100$. Вопрос, в какой степени N ци-

линдра чувствителен к изменению его c и когда этим влиянием можно пренебречь, несмотря на попытки [7–15] ответа на него, остается открытым. Актуальность проблемы подчеркивают и современные неудачи в попытках ее решения. Авторы [22], например, рассчитанные распределения намагниченности вдоль стержня обосновывают измеренными распределениями магнитной индукции.

Таблица 1

Значения		Расчет			
c	l	[3]	[7]	[10]	[16]
100	10	0,0147	0,01546	0,01538	0,014942
	25	0,00373	0,0036	0,00372	0,003585
	50	0,00116	0,00108	0,00116	0,001125
	100	0,0003	0,00028	0,000344	0,000326
10	10	0,0141	0,0143	0,0143	0,01442
	25	0,00319	0,00309	0,00312	0,003117
	50	0,000796	0,000753	0,000845	0,000780
	100	0,000153	0,000143	0,000200	0,000150
1	10	0,0105	0,00998	0,006632	0,010277
	25	0,00164	0,00158	0,0008742	0,001393
	50	0,000325	0,000257	0,000157	0,000286
	100	0,0000642	0,0000536	0,00002587	0,0000612

Цель статьи – анализ чувствительности центрального коэффициента размагничивания N цилиндров к изменениям магнитной восприимчивости c их материала, определение условий, при которых влиянием c материала цилиндров на их N можно пренебречь.

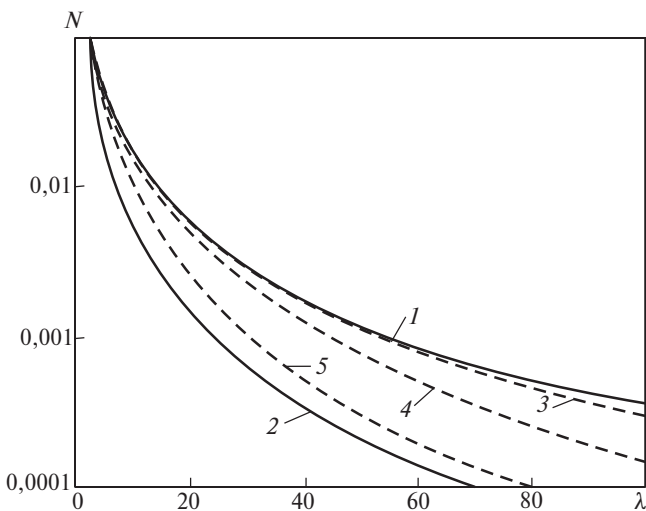


Рис. 1. Результаты расчета зависимостей $N(l)$ для цилиндров из материалов с различным значением c : 1 – по (6); 2 – по (8); 3, 4, 5 – по (16) соответственно при $c = 100; 10; 1$

Метод решения. Для проведения анализа необходимо физически верное и экспериментально обоснованное аналитическое описание зависимости $N = N(l, c)$ цилиндров во всем возможном диапазоне изменения их l и c : $0 < l < \infty$; $0 \leq c < \infty$.

Ближе всего к решению этой задачи подошли авторы [10]. На основании результатов расчета $N(l, c)$ цилиндров с $10 \leq c \leq 100$ по методикам [3, 7] ими предложена интерполяционная формула для описания зависимости $N = N(l, c)$:

$$N(l, c) = \frac{(0,489 + 0,00031) \left[\left(1,6 - \frac{2,72}{l}\right) \ln 2l + \frac{3,74}{l} - 1,2 \right]}{l^2 \frac{e^{\frac{0,05p}{c}}}{c} \arctg 0,795c - 0,1 \frac{l}{c} + 1 \frac{l}{c}}$$

(12)

Результаты расчета по (12) удовлетворительно (табл. 1) совпадают с результатами расчета $N(l, c)$ по [3, 7] при $10 \leq c \leq 100$ для $l = 10, 25$ и 50 . Но при уменьшении c и увеличении l разница в результатах расчетов по (12) и по [3, 7] возрастает до +30% при $c = 10$ и $l = 100$ (табл.1). При $c = 1$ результаты расчета по (12) вдвое меньше (табл. 1), чем по [3, 7].

Такая точность расчета для достижения цели настоящей работы не удовлетворительна. Она является следствием физически неверной интерполяции формулой (12) зависимости $N = N(l, c)$ цилиндров: при $l \rightarrow 0$ формула (12) теряет физический смысл. Это приводит и к низкой точности описания результатов экспериментов для цилиндров с $l < 8$. Диапазон $0 < l < 8$ изменения размеров цилиндров важен для достижения цели работы, так как соответствует размерам многих изделий.

Для разработки формулы, аналитически описывающей зависимость $N = N(l, c)$ цилиндров во всем возможном диапазоне изменения l и c , воспользуемся следующими физически обоснованными постулатами.

1. Будем считать, что зависимость $N(l, c)$ для цилиндров из материалов с $c \rightarrow \infty$ описывается

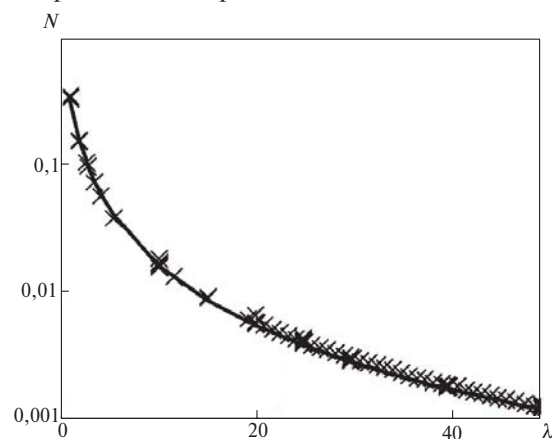


Рис. 2. Зависимости $N(l)$ цилиндров: — — расчет по (6); - - - результаты измерения (см. табл. 2)

Таблица 2

Номер п/п	l	Источник информ. (1-автор)	Эксперимент	Расчет по (6)	$s \times 100\%$	Номер п/п	l	Источник информ. (1-автор)	Эксперимент	Расчет по (6)	$s \times 100\%$
1	0,872	[23] ¹	0,3311	0,312	-5,8	41	28,45	[24] ¹	0,003119	0,002955	-5,3
2	0,9		0,3165	0,303	-4,3	42	29,32		0,00296	0,002815	-5,0
3	1,778		0,1439	0,154	+7,0	43	30	[5] ¹	0,00279	0,002712	-2,8
4	0,7875		0,1477	0,153	+3,6	44		[5] ³	0,002722		-4,0
5	2,5		0,09852	0,103	+4,5	45		[5] ⁵	0,002897		-6,4
6	2,667		0,09066	0,095	+9,0	46		[5] ⁶	0,002849		-4,8
7	3,333		0,0684	0,071	+3,8	47	30,19	[24] ¹	0,002841	0,002685	-5,5
8	4,0		0,05333	0,056	+5,0	48	31,02		0,002737	0,002569	-6,1
9	5,333		0,03521	0,038	+7,9	49	31,86		0,002634	0,00246	-6,6
10	10	[5] ¹	0,016	0,0150	-3,2	50	32,7		0,002491	0,002358	-5,3
11		[5] ²	0,01481		+1,3	51	33,56		0,002395	0,00226	-5,6
12		[5] ³	0,0151		-0,8	52	34,39		0,002324	0,002171	-6,6
13		[5] ⁴	0,0172		-12,7	53	35,24		0,002204	0,002086	-5,4
14		[5] ⁵	0,0154		-3,0	54	36,07		0,002093	0,002008	-4,1
15		[5] ⁷	0,01552		-3,4	55	36,91		0,002013	0,001934	-3,9
16	11,56	[25] ¹	0,0124	0,01257	+1,4	56	37,75	0,001958	0,001864	-4,8	
17	15	[5] ⁵	0,008356	0,008141	-2,6	57	38,59	0,001862	0,001747	-3,5	
18		[5] ⁷	0,008515		-4,4	58	39,45	0,001798	0,001733	-3,6	
19	19,25	[23] ¹	0,005738	0,005514	-3,9	59	40	[5] ¹	0,001723	0,001694	-1,8
20	20	[5] ¹	0,00539	0,005191	-3,7	60		[5] ³	0,001703		-0,5
21		[5] ³	0,00518		+0,2	61		[5] ⁶	0,001775		-4,6
22		[5] ⁴	0,00617		-15,8	62		[5] ⁷	0,001775	-4,6	
23		[5] ⁵	0,005348		-2,9	63		40,30	0,001751	0,001674	-4,4
24		[5] ⁶	0,005371		-3,4	64		41,18	0,001743	0,001615	-7,3
25	[5] ⁷	0,005454	-4,9	65	42,02	0,001615		0,001562	-3,4		
26	20,09	0,00534	0,005155	-3,5	66	42,86	0,001552	0,001512	-2,6		
27	20,92	0,005061	0,004835	-4,5	67	43,70	0,001512	0,001464	-3,8		
28	21,76	0,004759	0,004542	-4,6	68	44,54	0,001472	0,001418	-3,7		
29	22,60	0,004504	0,004276	-5,1	69	45,38	0,001424	0,001375	-3,4		
30	23,43	0,004178	0,004037	-3,4	70	46,22	0,001377	0,001334	-3,1		
31	24,27	0,003979	0,003816	-4,1	71	47,23	0,001321	0,001287	-2,8		
32	25	[5] ¹	0,004078	0,003639	-10,7	72	48,23	0,001273	0,001243	-2,4	
33		[5] ²	0,003796		-4,1	73	49,25	0,001241	0,001200	-3,3	
34		[5] ³	0,00366		-0,6	74	50	[5] ¹	0,00118	0,00117	-1,0
35		[5] ⁶	0,003788		-3,9	75		[5] ²	0,001225		-4,5
36	[5] ⁷	0,003883	-5,8	76	[5] ³	0,00118		-0,7			
37	25,10	0,003764	0,003616	-3,9	77	[5] ⁴		0,00129	-9,2		
38	25,94	0,003581	0,00343	-4,2	78	[5] ⁶	0,001218	-3,9			
39	26,78	0,003438	0,003259	-5,2	79	[7] ¹	0,0012	-2,5			
40	27,56	0,003287	0,003111	-5,4	80	50,42	[5] ⁸	0,001205	0,001154	-4,2	

Примечание к табл. 2. Авторы экспериментов: [23]¹ – А.Г. Сливинская; [5]¹ – Нейман и К. Вармут; [5]² – Штейблейн и Шлехтвег; [5]³ – К. Вармут; [5]⁴ – Бозорт; [5]⁵ – Бурдин; [5]⁶ – Вюршмидт; [5]⁷ – Томпсон и Мосс; [5]⁸ – М.А. Розенблат; [24]¹ – Вюршмидт; [7]¹ – Г.А. Бурцев; [25]¹ – Дитц.

формулой (6). Аналитическое и экспериментальное подтверждение этого приведено в [5–7, 19]. В дополнение в табл. 2 и на рис. 2 результаты N_p расчета $N(l)$ по (6) сопоставлены с известными результатами N_3 измерения N цилиндров и их расчета по методикам [3, 7] при $c \in \mathbb{R}$; $0,8 \leq l \leq 50,4$, представленными в [5, 7, 23–25].

Точность интерполяции формулой (6) результатов измерения и модельного расчета $N(l, c \in \mathbb{R})$ в практически важном диапазоне изменения l следует признать высокой. Тем более, что c , l и магнитная однородность образцов в экспериментах не всегда достоверны, что оказывает решающее влияние на значение N [7]. Существенное расхождение расчета по (6) и эксперимента для образцов № 13, 22, 77 из табл. 2 объясняется [5] методической погрешностью эксперимента, а не неточностью интерполяции (6). Коэффициент корреляции R в линейном уравнении регрессии $N_3 = N_p$ для данных из табл. 2 составил $R = 0,9988$.

Правомерность использования (6) для целей настоящей работы обосновывается и тем, что результаты Вармута непосредственно или в преобразованном виде вошли в стабильные справочные и методические руководства [26–30]. Например, относительное отклонение результатов расчета N по (6) от значений N постоянных магнитов, рекомендованных к использованию в [30], в диапазоне изменения l от 0,1 до 5 находится в пределах от –4,3 до +2,5%. Значение N при этом изменяется более чем в 20 раз. Такая точность приемлема для технических расчетов, и, как показано в [19], попытки дальнейшего «уточнения» формулы (6) не имеют смысла.

2. Будем считать, что зависимость $N = N(l)$ для цилиндров из материалов с $c = 0$ описывается интерполяционной формулой (8), применимость которой для случая $c = 0$ обоснована в [6, 7]. В дополнение к этому на рис. 3 результаты расчета $N(l)$ по (8) сопоставлены с результатами расчета $N(l)$ по полученному в [31] для коэффициентов $N(l, c = 0)$ размагничивания однородно намагниченных цилиндрических стержней с $l^3 \leq 4$ «точному аналитическому выражению» [9]:

$$N(l, c = 0) = \frac{1}{2} \frac{c}{l^2} - \frac{3}{2} \frac{c}{l^3} \quad (13)$$

Результаты на рис. 3 показывают, что в диапазоне изменения l , в котором (13) имеет физический смысл, относительная разница в расчете $N(l, c = 0)$ по (8) и (13) не превышает $\pm 2\%$, что су-

щественно меньше возможной [9] погрешности измерения N .

3. Зависимость $N = N(l, c)$ для $0 \leq c < \infty$ будем искать в виде

$$N(l, c) = N_1(l) \frac{2}{\rho} \arctg \frac{c}{e^{1/n}} + N_2(l) \frac{1}{e} - \frac{2}{\rho} \arctg \frac{c}{e^{1/n}} \quad (14)$$

где n, x – постоянные коэффициенты, численные значения которых определим из условия получения максимально высокого значения коэффициента корреляции R в линейном уравнении регрессии $N_3 = N_{p14}$ для данных из табл. 1 при $c = 1, 10, 100$ и $l = 10, 25, 50, 100$. В качестве дополнительных условий при выборе значений коэффициентов n и x из бесконечного числа их возможных комбинаций были требования максимальной простоты формулы (14) и минимального относительного отклонения между N_{p14} и N_3 для каждого значения c и l цилиндров из табл. 1.

По результатам оценки оптимальными значениями коэффициентов, удовлетворяющими перечисленным требованиям, являются:

$$n = 1,3; \quad x = 22. \quad (15)$$

С учетом (14) и (15) получим формулу

$$N(l, c) = N_1(l) \frac{2}{\rho} \arctg \frac{c}{e^{1,3}} + N_2(l) \frac{1}{e} - \frac{2}{\rho} \arctg \frac{c}{e^{1,3}} \quad (16)$$

Анализ формулы. Зависимость (16) удовлетворяет постулатам 1 и 2 во всем возможном диапазоне $0 < l < \infty$ изменения размеров цилиндров. Результа-

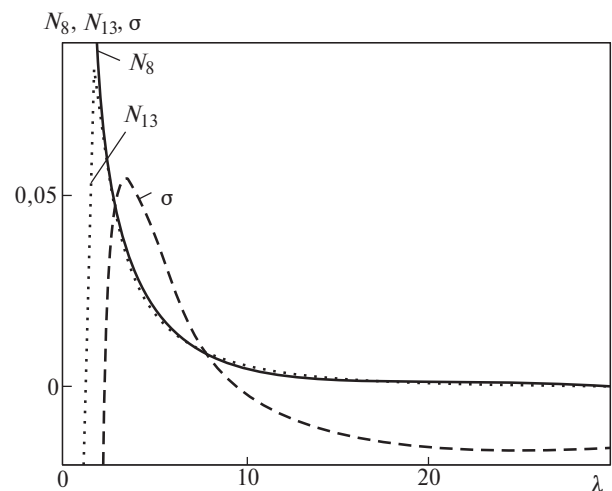


Рис. 3. Результаты расчета $N(l)$ по (8) и (13) и относительная разница $s = (N_8 - N_{13}) / N_8$ между ними

ты N_{p16} расчета $N(l, c)$ по (16) в табл. 1 и на рис. 4 сопоставлены с результатами N_3 расчета $N(l, c)$ цилиндров с $c=1; 10; 100$ и $l=10; 25; 50; 100$, полученными в [3 и 7]. Коэффициент корреляции R в линейном уравнении регрессии $N_3 = N_{p16}$ (рис. 4) для данных из табл. 1 составил $R = 0,9995$. Среднее относительное отклонение $d = 100\% |N_{p16} - N_3| / N_3$ между результатами расчета $N(l, c)$ цилиндров по (16) и методике [3] для данных из табл. 1 составило 1,9% – меньше, чем $d \approx 2,6\%$ при расчете по методикам [3] и [7]. При этом результаты расчета $N(l, c)$ цилиндров по (16) обычно имеют промежуточное значение между результатами расчета $N(l, c)$ по методикам [3, 7]: значение d между результатами расчета $N(l, c)$ цилиндров по (16) и значениям $N(l, c)$, усредненным по [3] и [7], для данных из табл. 1 составило 1,6%. При этом значения l цилиндров в табл. 1 изменяется в 10 раз, c – в 100 раз, а $N(l, c)$ – более чем в 220 раз; такая точность приемлема для технических расчетов.

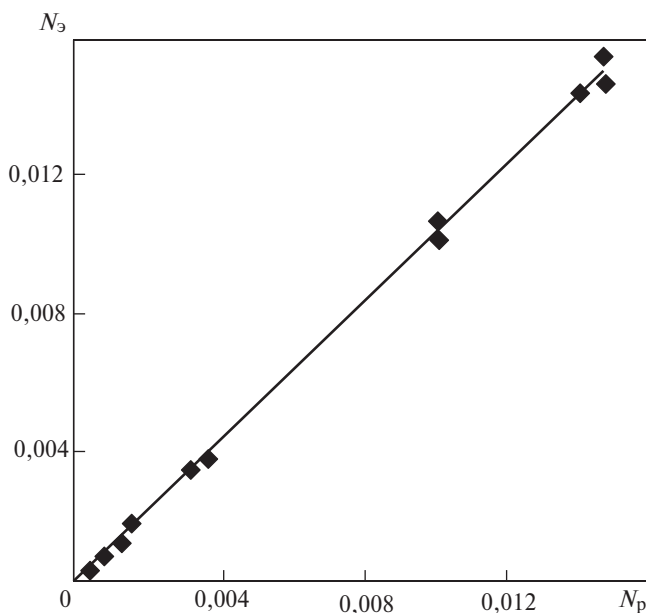


Рис. 4. Сопоставление результатов N_p расчета $N(l, c)$ цилиндров из табл. 1 по (16) с результатами N_3 модельного расчета $N(l, c)$ этих цилиндров в [3, 7]

Таким образом, формула (16) физически верно, математически просто и с достаточной для практических расчетов точностью интерполирует реально существующую в природе зависимость N цилиндров от значений l и c их материала. Попытки дальнейшего «уточнения» формулы (16) не имеют смысла.

Результаты расчетов. Полученный результат позволяет рекомендовать формулу (16) для расчета $N(l, c)$ цилиндров во всем возможном диапазоне изменения $0 < l < \infty$ и $0 \leq c < \infty$. Результаты расчета

для $0 < l \leq 100$ при $c=1; 10; 100$ приведены на рис. 1. Отметим, что результаты расчета $N(l, c)$ для конкретных значений l и c по (16) могут быть получены проще и точнее, чем по интерполирующим зависимостям $N(l, c)$ номограммам [7]. Определив с материала цилиндра на основной кривой намагничивания, предельной или частной петле его магнитного гистерезиса с использованием формул [32], можно по (16) рассчитать $N(l, c)$ цилиндра из любого материала по основным магнитным параметрам (коэрцитивной силе, намагниченности технического насыщения и остаточной намагниченности) и напряженности магнитного поля, в котором цилиндр находится.

Анализ влияния изменений c . Используем формулу (16) для анализа влияния изменений c материала цилиндров с различным l на их $N(l, c)$ в возможном диапазоне изменения l и c . Для этого используем чувствительность $S_y^{N(l, c)}$ величины $N(l, c)$ к параметру y (в качестве которого могут быть l или c), определяемую по формуле [33, 34]:

$$S_y^{N(l, c)} = \lim_{Dy \rightarrow 0} \frac{DN(l, c)y}{DyN(l, c)} = \frac{y}{N(l, c)} N(l, c) \phi, \quad (17)$$

где $DN(l, c)$ – изменение $N(l, c)$, соответствующее изменению Dy параметра y при постоянстве другого параметра; $N(l, c) \phi$ – производная $N(l, c)$ по параметру y .

Чувствительность $S_y^{N(l, c)}$ показывает, в какой степени изменение параметра y при постоянстве другого параметра влияет на значение $N(l, c)$ (например, при $S_y^{N(l, c)} = 2$ изменение y на 1% вызовет изменение $N(l, c)$ на 2%).

Из (17) с учетом (16) для чувствительности $S_c^{N(l, c)}$ и $S_l^{N(l, c)}$ получим:

$$S_c^{N(l, c)} = \frac{44l^{1,3} \phi [N_1(l, c) - N_2(l, c)]}{\rho N(l, c) (l^{2,6} + 484c^2)}, \quad (18)$$

$$S_l^{N(l, c)} = \frac{l}{N(l, c)} N(l, c) \phi. \quad (19)$$

Результаты расчета зависимостей $S_c^{N(l, c)}(c)$ для цилиндров с различными значениями l и $S_l^{N(l, c)}(l)$ для цилиндров с различными значениями c по (18) и (19) с учетом (16) представлены на рис. 5, а и б.

Обсуждение результатов. Анализ рис. 5 позволил установить закономерности изменения чувствительности $S_c^{N(l, c)}$ и $S_l^{N(l, c)}$:

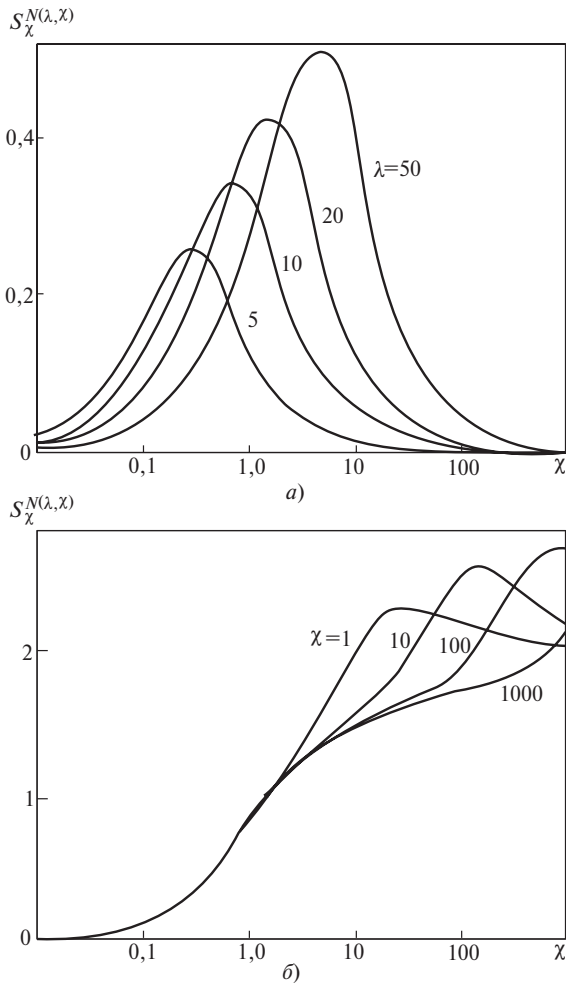


Рис. 5. Расчет по (18) зависимости $S_c^{N(l,c)}(c)$ для $l = 5; 10; 20; 50$ (а) и по (19) зависимости $S_l^{N(l,c)}(l)$ для $c = 1; 10; 100; 1000$ (б)

чувствительность $S_c^{N(l,c)}$ положительна, а $S_l^{N(l,c)}$ отрицательна для любых значений l и c . Следовательно, увеличение l цилиндра и снижение c его материала всегда приводит к уменьшению $N(l,c)$ цилиндра;

модуль чувствительности $S_l^{N(l,c)}$ монотонно возрастает от 0 при $l = 0$ до максимума $S_{l \max}^{N(l,c)} > 2$, значение и расположение которого определяются значениями l и c и который при $l \in \mathbb{R}$ и любом значении c стремится к 2 «сверху»;

изменение чувствительности $S_c^{N(l,c)}$ при изменении c от 0 до ∞ также происходит немонотонно. При $c \in \mathbb{R}$ и $c \in \mathbb{R}$ чувствительность $S_c^{N(l,c)} \in \mathbb{R}$ для любого значения l . По мере увеличения c для любого l чувствительность $S_c^{N(l,c)}$ возрастает до максимального значения, тем большего, чем больше l , а затем стремится к 0, тем быстрее, чем

меньше l . При этом при $l_1 > l_2$ значение $S_c^{N(l,c)}(l_1)$ может быть больше или меньше $S_c^{N(l,c)}(l_2)$ в зависимости от значения c .

Результаты анализа не могут быть изменены возможными попытками «уточнения» формулы (16). Они позволяют лучше понять влияние магнитных свойств и l цилиндров на значение N , чем рассуждения [5, 7–11].

Для оценки превалирующего влияния изменения размеров или магнитных свойств цилиндров на $N(l,c)$ предлагается использовать отношение $E(l,c)$ чувствительности $S_l^{N(l,c)}$ к чувствительности $S_c^{N(l,c)}$, определяемое формулой

$$E(l,c) = - S_l^{N(l,c)}(l,c) / S_c^{N(l,c)}(l,c). \quad (20)$$

Результаты расчета по (20) зависимости параметра $E(l,c)$ от l цилиндров при различных значениях c их материала представлены на рис. 6.

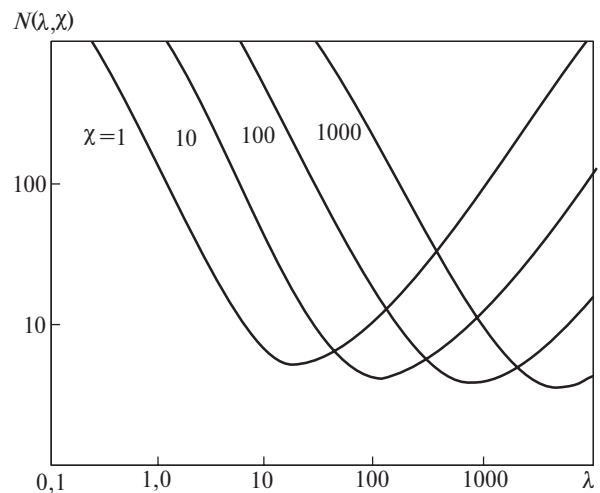


Рис. 6. Расчетные по (20) зависимости параметра $E(l,c)$ от l цилиндров при $c = 1; 10; 100; 1000$

Полученные результаты позволяют определять соотношения между магнитными свойствами и размерами цилиндра, при которых влияние изменения магнитных свойств материала на коэффициент N цилиндра становится пренебрежимо малым по сравнению с влиянием на него изменений размеров цилиндра. Так, коэффициент N цилиндра становится в 100 и более раз чувствительнее к изменению его размеров, чем магнитных свойств, для цилиндров с $l \in \mathbb{R} 1,17$ при $c = 1$; $l \in \mathbb{R} 5,2$ при $c = 10$; $l \in \mathbb{R} 26,6$ при $c = 10^2$ и $l \in \mathbb{R} 152$ при $c = 10^3$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аркадьев В.К. Магнитные коэффициенты формы вещества и тела. – Журнал Русского физико-химического общества, т. 46. Физический отдел, 1914, вып. 1, с. 22–42.

2. **Wurschmidt J.** Theorie des Entmagnetisierungsfaktor und der Scherung von Magnetisierungskurven, Braunschweig, 1925.
3. **Stablein F., Schlechtweg H.** Über den Entmagnetisierungsfaktor zylindrischen Stäbe. — Zeltschrift fur Phys, 1935, v. 35, H.9, B.95, 630 p.
4. **Витол В.Г.** О размагничивающем факторе и неопределяющих коэффициентах подобия намагничивания цилиндров. — Труды Института физики АН Латвийской ССР, 1954, т. VIII, с. 45–68.
5. **Розенблат М.А.** Коэффициенты размагничивания стержней высокой проницаемости. — Журнал технической физики, 1954, т. XXIV, В.4, с. 637–661.
6. **Warmuth K.** Über den ballistischen Entmagnetisierungsfaktor zylindrischen Stäbe. — Archiv Fur Elektrotechnik, 1954, т. 41, № 5, pp. 242–257.
7. **Бурцев Г.А.** Расчет коэффициента размагничивания цилиндрических стержней. — Дефектоскопия, 1971, № 5, с. 20–30.
8. **Антонов В.Г.** Коэффициенты размагничивания стержней на основной кривой намагничивания. — Труды метрологических институтов СССР, 1978, вып. 215 (278), с. 63–67.
9. **Антонов В.Г., Малеревская Т.Н., Студенцов Н.В.** Расчет коэффициентов размагничивания цилиндрических стержней на основной кривой намагничивания. — Сб.: Методы и средства точных магнитных измерений. — Л.: НПО ВНИИМ им. Д.И. Менделеева, 1980, с. 65–79.
10. **Зверев В.С., Катык В.С.** К определению центрального коэффициента размагничивания цилиндрических стержней. — Дефектоскопия, 1991, № 1, с.40–43.
11. **Захаров В.А., Ульянов А.И., Чулкина А.А.** Коэффициенты размагничивания ферромагнитных стержней при намагничивании. — Электричество, 2001, № 10, с. 61–67.
12. **Бурдин С.П.** Определение баллистическим методом коэффициентов размагничивания цилиндрических стержней с плоскими и закругленными концами. — Вестник главной палаты мер и весов, 1930, вып. 4(16), с. 61–69.
13. **Горкунов Э.С., Захаров В.А., Зембеков Н.С., Ульянов А.И., Чулкина А.А.** Коэффициенты размагничивания ферромагнитных стержней при насыщении магнетика. — Дефектоскопия, 2005, № 2, с. 23–32.
14. **Захаров В.А., Зембеков Н.С., Захаров А.В., Русских И.Т.** Расчет центральных коэффициентов намагничивания цилиндрических ферромагнитных стержней при насыщении магнетика. — Изв. вузов. Физика, 2005, № 4, с. 53–61.
15. **Захаров В.А., Зембеков Н.С., Захаров А.В., Русских И.Т.** Учет неколлинеарности векторов намагниченности при расчете магнитных полей в ферромагнитных цилиндрических стержнях. — Изв. вузов. Физика, 2005, № 2, с. 63–69.
16. **Курбатов П.А., Аринчин С.А.** Численный расчет электромагнитных полей. — М.: Энергоатомиздат, 1984, 168 с.
17. **Матюк В.Ф., Чурило В.Р., Стрелюхин А.В.** Численное моделирование магнитного состояния магнетика в неоднородном постоянном поле методом пространственных интегральных уравнений. II. Ферромагнитный диск в поле накладного соленоида. — Дефектоскопия, 2003, № 12, с. 59–66.
18. **Матюк В.Ф., Чурило В.Р., Стрелюхин А.В.** Численное моделирование поля остаточной намагниченности плоского ферромагнитного диска при его импульсном намагничивании. — Весці НАН Беларусі. Сер.фіз.-тэхн. навук, 1999, № 4, с. 66–72.
19. **Сандомирский С.Г.** Рекомендации по применению в технических расчетах формул для центрального коэффициента размагничивания сплошных и полых цилиндров, стержней и пластин из материала с высокой магнитной проницаемостью (обзор). — Техническая диагностика и неразрушающий контроль, 2008, № 3, с. 38–46.
20. **Гринберг Г.К.** Экспериментальная проверка теоретического распределения намагниченности вдоль цилиндра. — Известия АН Латвийской ССР, 1959, № 9 (146), с. 85–89.
21. **Гринберг Г.К.** Намагничивание цилиндров в слабых постоянных полях: Автореф. дис. канд. физ.-мат. Наук, Рига, 1960, 13 с.
22. **Матюк В.Ф., Осипов А.А., Стрелюхин А.В.** Распределение намагниченности вдоль цилиндрического стержня, находящегося в продольном постоянном магнитном поле. — Электротехника, 2009, № 8, с. 37–46.
23. **Сливинская А.Г.** Проницаемость формы цилиндров и приз. — Труды МЭИ, 1956, вып.16, с. 67–81.
24. **Месякин В.С.** Ферромагнитные сплавы. — М.;Л.: ОНТИ, 1937, 790 с.
25. **Dietz G., Meingast R.** Ein ferromagnetischer Stab in homogenen Minetfeld. — Zs. F. Ang. Physik, 1971, vol. 31, № 1, s. 77–82.
26. **Яновский Б.М.** Земной магнетизм. — М.: ГИТТЛ, 1953, 55 с.
27. **Кифер И.И.** Испытания ферромагнитных материалов. — М.;Л.: Госэнергоиздат, 1962, 37 с.
28. **Чечерников В.И.** Магнитные измерения. — М.: Изд. МГУ, 1969, с. 9–12.
29. **Kneller E.** Ferromagnetismus. — Berlin: Springer, 1962, 103 p.
30. **Белевцев А.Т.** Постоянные магниты в приборостроении (обзор). — М.: ОНТИПрибор, 1966, 160 с.
31. **Joseph R.I.** Ballistic Demagnetizing factor in uniformly magnetized cylinders. — J. Appl. Phys., 1966, vol. 37, № 18.
32. **Сандомирский С.Г.** Расчет кривой намагничивания и частных петель гистерезиса ферромагнитных материалов по основному магнитным параметрам. — Электричество, 2010, № 1, с. 61–64.
33. **Сандомирский С.Г.** Чувствительность остаточной намагниченности ферромагнитных изделий к магнитным характеристикам их материалов и геометрическим параметрам. — Дефектоскопия, 1990, № 12, с. 53–59.
34. **Сандомирский С.Г.** Анализ структурной и фазовой чувствительности релаксационной намагниченности сталей. — Металлы, 2011, № 2, с. 92–96.

[22.09.14]

Автор: Сандомирский Сергей Григорьевич окончил физический факультет Белорусского государственного университета в 1978 г. Докторскую диссертацию «Магнитный контроль механических свойств движущихся малогабаритных изделий» защитил в 1993 г. в Институте МНПО «Спектр», Москва. Главный научный сотрудник Объединенного института машиностроения Национальной академии наук Беларуси.

Elektrichestvo (Electricity), 2015, No. 2, pp. 31–39.

Analyzing the Sensitivity of the Central Demagnetization Coefficient of a Cylindrical Rod to the Magnetic Susceptibility of Its Material

S.G. SANDOMIRSKII

Calculation of central demagnetization coefficients (CDCs) for cylindrical rods remains a topical problem, especially for bodies with a small relative length. This is because many objects encountered in

practice of magnetic examination and measurements have just this shape. At the same time, the published data on experimentally determined and calculated values of CDCs are not always suitable for being used in practice. A formula for calculating the central demagnetization coefficient N for a cylindrical rod in the entire possible variation range of its sizes and magnetic properties has been developed and substantiated in physical and mathematical respects. The obtained formula was used for analyzing the sensitivity of N to variations of the magnetic properties and sizes of a rod. The ratios of parameters at which it is possible to ignore the effect the changes in the cylinder material magnetic properties have on the value of N are determined.

Key words: ferromagnetic body, magnetization, demagnetizing factor, central demagnetization coefficient

REFERENCES

1. Arkad'yev V.K. *Zhurnal Russkogo fiziko-khimicheskogo obshchestva. Fizicheskii otdel (Russian Physical and Chemical Society Journal. Physical Section)*, 1914, iss. 1, vol. 46, pp. 22–42.
2. Wurschmidt J. Theorie des Entmagnetisierungsfaktor und der Scherung von Magnetisierungskurven, Braunschweig, 1925.
3. Stablein F., Schlechtweg H. Über den Entmagnetisierungsfaktor zylindrischen Stäbe. – *Zeitschrift für Phys.*, 1935, v. 35, H.9, B.95, 630 p.
4. Vitol V.G. *Trudy Instituta fiziki Akademii Nauk Latvii SSR (Proc. of Physics Institute of Latvia SSR Academy of Sciences)*, 1954, vol. VII, pp. 45–68.
5. Rozenblat M.A. *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki (Technical Physics Journal)*, 1954, vol. XXIV, pp. 637–661.
6. Warmuth K. Über den ballistischen Entmagnetisierungsfaktor zylindrischen Stäbe. – *Archiv für Elektrotechnik*, 1954, т. 41, № 5, pp. 242 – 257.
7. Burtsev G.A. *Defektoskopiya (Fault Defection)*, 1971, No. 5, pp. 20–30.
8. Antonov V.G. *Trudy metrologicheskikh institutov SSSR (Proc. of Metrology Institutions of SSSR)*, 1978, iss. 215(278), pp. 63–67.
9. Antonov V.G., Malerevskaya T.N., Studentsov N.V. *Sbornik: Metody i sredstva tochnykh magnitnykh izmerenii (Proc. Methods and Means of Ideal Magnetical Measurements)*. Leningrad. Scientific and Industrial Unification VNIIM name D.I. Mendeleyev, 1980, pp. 65–79.
10. Zverev V.S., Katyk V.S. *Defektoskopiya (Fault Defection)*, 1991, No. 1, pp. 40–43.
11. Zakharov V.A., Ul'yanov A.I., Chulkina A.A. *Elektrichestvo (Electricity)*, 2001, No. 10, pp. 61–67.
12. Budrin S.P. *Vestnik glavnoi palaty mer i vesov (Bulletin of Main Chamber of Weights and Measures)*, 1930, iss. 4(16), pp. 61–69.
13. Gorkunov E.S., Zakharov V.A., Zembekov N.S., Ul'yanov A.I., Chulkina A.A. *Defektoskopiya (Fault Defection)*, 2005, No. 2, pp. 23–32.
14. Zakharov V.A., Zembekov N.S., Zakharov A.V., Russkikh I.T. *Izv. vuzov. Fizika (News of Higher Education Institutions. Physics)*, 2005, No. 4, pp. 53–61.
15. Zakharov V.A., Zembekov N.S., Zakharov A.V., Russkikh I.T. *Izv. vuzov. Fizika (News of Higher Education Institutions. Physics)*, 2005, No. 2, pp. 63–69.
16. Kurbatov P.A., Arinchin S.A. *Chislenniye raschet elektromagnitnykh polei (Numerical Calculation of Electromagnetic Fields)*. Moscow, Publ. Energoatomizdat, 1984, 168 p.
17. Matyuk V.F., Churilo V.R., Strelyukhin A.V. *Defektoskopiya (Fault Defection)*, 2005, No. 12, pp. 59–66.
18. Matyuk V.F., Churilo V.R., Strelyukhin A.V. *Vesti NAN Belarusi. Ser. Fiz.-tekhn. nauk (News of Belarus' National Academy of Sciences. Ser. of Physical and Technical Sciences)*, 1999, No. 4, pp. 66–72.
19. Sandomirskii S.G. *Tekhnicheskaya diagnostika i nerazrushayushchii kontrol' (Technical Diagnostic and Nondestructive Monitoring)*, 2008, No. 3, pp. 38–46.
20. Grinberg G.K. *Izvestiya AN Latvii SSR (News of Latvia SSR Academy of Sciences)*, 1959, No. 9(146), pp. 85–89.
21. Grinberg G.K. *Namagnichivaniye tsilindrov v slabykh postoyannykh polyakh: Avto-ref. dis...kand. fiz.-mat.nauk (Magnetization of Cylinders in Weak DC Fields. An abstract of a thesis of Cand. Phys.-Math. Sci.)*. Riga, 1960, 13 p.
22. Matyuk V.F., Osipov A.A., Strelyukhin A.V. *Elektrotehnika (Electrical Engineering)*, 2009, No. 8, pp. 37–46.
23. Slivinskaya A.G. *Trudy Moskovskogo energeticheskogo instituta (Proc. of Moscow Power Engineering Institute)*, 1956, iss. 16, pp. 67–81.
24. Mes'kin V.S. *Ferromagnitnye splavy (Ferromagnetical Alloys)*. Moscow; Leningrad, United Scientific and Technical Publishing House, 1937, 790 p.
25. Dietz G., Meingast R. Ein ferromagnetischer Stab in homogenen Minetfeld. – *Zs. F. Ang. Physik*, 1971, vol. 31, № 1, pp. 77–82.
26. Yanovskii B.M. *Zemnoi magnetizm (Earth Magnetizm)*. Moscow, State Publishing House of Technical and Technical Literature, 1953, 55 p.
27. Kifer I.I. *Ispytaniya ferromagnitnykh materialov (Tests of Ferromagnetical Matherials)*. Moscow; Leningrad, Publ. Gosenergoizdat, 1962, 37 p.
28. Chechernikov V.I. *Magnitnye izmereniya (Magnetical Measurements)*. Moscow, Publ. of Moscow State University, 1969, pp. 9–12.
29. Kneller E. *Ferromagnetismus*. – Berlin: Springer, 1962, 103 p.
30. Belevtsev A.T. *Postoyannye magnity v priborostroenii (Obzor) (Permanent magnets in instrument-making.—Observation)*. Moscow, United Scientific and Technical Publishing House «Pribor», 1966, 160 p.
31. Joseph R.I. Ballistic Demagnetizing factor in uniformly magnetized Cylinders. – *J. Appl. Phys.*, 1966, vol. 37, № 18.
32. Sandomirskii S.G. *Elektrichestvo (Electricity)*, 2010, No. 1, pp. 61–64.
33. Sandomirskii S.G. *Defektoskopiya (Fault Defection)*, 1990, No. 12, pp. 53–59.
34. Sandomirskii S.G. *Metally (Metalls)*, 2011, No. 2, pp. 92–96.

Author: Sandomirskii Sergei Grigor'yevich (Minsk, Belarus') – Doctor Techn. Sci., Chief Scientific Researcher, Unified Institute of Automobile Construction, Belarus National Academy of Sciences.