

# Универсальная структура математической модели управляемых электрических машин переменного тока

МУСТАФАЕВ Р.И., ГАСАНОВА Л.Г.

*Разработана универсальная структура математической модели электрических машин переменного тока, базирующаяся на уравнениях, записанных в осях, вращающихся со скоростью ротора, относительно потокоцеплений, представленных в векторно-матричной форме. Структура модели позволяет учесть все возможные виды управления машин переменного тока: частотное как со стороны статора, так и со стороны ротора, а также продольно-поперечное управление цепей возбуждения для синхронных машин. На модели может быть исследовано абсолютное большинство применяемых на практике электрических машин переменного тока: синхронная машина с продольно-поперечным возбуждением; «классическая» синхронная машина с возбуждением по продольной оси; частотно-управляемая синхронная машина с возбуждением от постоянных магнитов; частотно-управляемая асинхронная машина с короткозамкнутым ротором; асинхронная машина двойного питания, а также асинхронная машина с частотным управлением как со стороны статора, так и со стороны ротора.*

**Ключевые слова:** ветроэнергетика, гидроэнергетика, машины переменного тока, система управления, математическая модель

Для электрических машин переменного тока в качестве систем управления могут быть использованы преобразователи частоты, а также регуляторы напряжения, выполненные на полностью управляемых тиристорах или силовых транзисторах. При проектировании сложных электромеханических устройств, например для энергетики, которые могут содержать электрические машины, требуется не только оптимально сочленить электрическую машину с механической, но в ряде случаев оптимизировать выбор и тип управляемой электрической машины.

Хорошо известны уравнения обобщенной электрической машины [1], для практического использования которых необходимо их преобразование с учетом типа машины и формы записи уравнений. Принципы управляемости и переходные процессы в отдельных электрических машинах переменного тока исследованы в [2–6].

В связи с расширяющимся применением в энергосистемах возобновляемых источников энергии возникает задача исследования режимов работы указанных энергосистем, в основе которых классическая синхронная машина, с электрическими машинами нетрадиционной возобновляемой энергетики. Исследования определяют создание универсальной математической модели управляемой электрической машины переменного тока, которая, оставаясь структурно неизменной, позволила бы проанализировать все режимы работы применяемых на практике электрических машин переменного тока: синхронных машин с электромагнитным возбуждением и с постоянными магнитами, в том числе и частотно-управляемых; асинхронных машин с короткозамкнутым и фазным ротором, в том числе и частотно-управляемых.

**Общая структура уравнений.** В предлагаемой статье математическая модель электрических машин переменного тока базируется на уравнениях Горева–Парка, записанных в координатных осях, вращающихся со скоростью ротора  $\omega_r$ , причем машина обладает двумя статорными обмотками и четырьмя роторными. Отличие от базисных уравнений лишь в том, что в качестве угла мощности выбирается не угол  $q$  между осью ротора, вращающегося со скоростью  $\omega_r$ , и синхронной осью, вращающейся с синхронной скоростью  $\omega_s$ , а угол между осью ротора и неподвижной осью, который в дальнейшем обозначается через  $a$ . Таким образом, скорость ротора  $\omega_r = p a = \frac{da}{dt}$ , где  $p$  – символ дифференцирования,  $t$  – синхронное время, равное  $t = \omega_s t = 314t$ . Кроме того, уравнения машины записываются в потокоцеплениях.

В этом случае уравнения управляемых электрических машин переменного тока можно записать в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \dot{e} p Y_s \\ \dot{e} p Y_f \\ \dot{e} p Y_r \end{pmatrix} \dot{u} = \begin{pmatrix} \dot{e} A_{s1} & A_{s2} & A_{s3} \\ \dot{e} B_{f1} & B_{f2} & B_{f3} \\ \dot{e} C_{r1} & C_{r2} & C_{r3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{e} Y_s \\ \dot{e} Y_f \\ \dot{e} Y_r \end{pmatrix} \dot{u} + \begin{pmatrix} \dot{e} U_s \\ \dot{e} U_f \\ \dot{e} U_r \end{pmatrix} \dot{u} \quad (1)$$

Матрицы-столбцы – суть векторы с проекциями на оси  $d, q$ :

производных потокоцеплений обмоток статора, возбуждения и ротора

$$p Y_s = \begin{pmatrix} \dot{e} p y_{ds} \\ \dot{e} p y_{qs} \end{pmatrix} \dot{u}, \quad p Y_f = \begin{pmatrix} \dot{e} p y_{df} \\ \dot{e} p y_{qf} \end{pmatrix} \dot{u}, \quad p Y_r = \begin{pmatrix} \dot{e} p y_{dr} \\ \dot{e} p y_{qr} \end{pmatrix} \dot{u}$$

самых потокоцеплений

$$Y_s = \begin{matrix} \dot{e}y_{ds} \\ \dot{e}y_{qs} \end{matrix} \dot{u} \quad Y_f = \begin{matrix} \dot{e}y_{df} \\ \dot{e}y_{qf} \end{matrix} \dot{u} \quad Y_r = \begin{matrix} \dot{e}y_{dr} \\ \dot{e}y_{qr} \end{matrix} \dot{u}$$

напряжений обмоток статора, возбуждения и ротора (управляющие воздействия)

$$U_s = \begin{matrix} \dot{e}U_{ds} \\ \dot{e}U_{qs} \end{matrix} \dot{u} \quad U_f = \begin{matrix} \dot{e}U_{df} \\ \dot{e}U_{qf} \end{matrix} \dot{u} \quad U_r = \begin{matrix} \dot{e}U_{dr} \\ \dot{e}U_{qr} \end{matrix} \dot{u}$$

Матрицы  $A_{s2}, A_{s3}, B_{f1}, B_{f2}, B_{f3}$ , а также  $C_{r1}, C_{r2}, C_{r3}$  – это диагональные матрицы, которые представляются в виде:

$$A_{s1} = \begin{matrix} \dot{e} - r_s k_{ds} & -w_r \\ \dot{e} w_r & -r_s k_{qs} \end{matrix} \dot{u} \quad A_{s2} = \begin{matrix} \dot{e} - r_s k_{dsf} & 0 \\ \dot{e} 0 & -r_s k_{qsf} \end{matrix} \dot{u}$$

$$A_{s3} = \begin{matrix} \dot{e} - r_s k_{dsr} & 0 \\ \dot{e} 0 & -r_s k_{qsr} \end{matrix} \dot{u} \quad B_{f1} = \begin{matrix} \dot{e} - r_{df} k_{dsf} & 0 \\ \dot{e} 0 & -r_{qf} k_{qsf} \end{matrix} \dot{u}$$

$$B_{f2} = \begin{matrix} \dot{e} - r_{df} k_{dff} & 0 \\ \dot{e} 0 & -r_{qf} k_{qff} \end{matrix} \dot{u} \quad B_{f3} = \begin{matrix} \dot{e} - r_{df} k_{dfr} & 0 \\ \dot{e} 0 & -r_{qf} k_{qfr} \end{matrix} \dot{u}$$

$$C_{r1} = \begin{matrix} \dot{e} - r_{dr} k_{dsr} & 0 \\ \dot{e} 0 & -r_{qr} k_{qsr} \end{matrix} \dot{u} \quad C_{r2} = \begin{matrix} \dot{e} - r_{dr} k_{dfr} & 0 \\ \dot{e} 0 & -r_{qr} k_{qfr} \end{matrix} \dot{u}$$

$$C_{r3} = \begin{matrix} \dot{e} - r_{dr} k_{dr} & 0 \\ \dot{e} 0 & -r_{qr} k_{qr} \end{matrix} \dot{u}$$

Матрицу  $A_{s1}$  можно представить в виде

$$A_{s1} = A_{s11} + A_{s1w} = \begin{matrix} \dot{e} - r_s k_{ds} & 0 \\ \dot{e} w_r & -r_s k_{qs} \end{matrix} \dot{u} + \begin{matrix} \dot{e} 0 & -w_r \\ \dot{e} w_r & 0 \end{matrix} \dot{u}$$

Так как частота вращения ротора машины переменного тока  $w_r$  – скалярная величина, то

$$A_{s1w} = \begin{matrix} \dot{e} 0 & -1 \\ \dot{e} 1 & 0 \end{matrix} \dot{u} w_r = -J w_r,$$

где  $J$  – матрица, ортогональная к единичной  $E$ , т.е. ( $J^2 = -E$ ), по аналогии с комплексной единицей  $j^2 = -1$ .

Помимо уравнений (1) необходимо иметь в виду уравнения движения с моментом на валу  $m_T$  и электромагнитным моментом  $m_{ЭМ}$ :

$$T_j p w_r = m_T - m_{ЭМ}; \quad \ddot{u} \\ m_{ЭМ} = (k_{qs} - k_{ds}) y_{ds} y_{qs} + k_{dsf} y_{ds} y_{qf} + \dot{y} \\ + k_{qsr} y_{ds} y_{qr} - k_{dsf} y_{qs} y_{df} - k_{dsr} y_{qs} y_{dr} \quad \ddot{b} \quad (2)$$

Таким образом, уравнения (1) и (2) представляют универсальную математическую модель электрических машин переменного тока.

Помимо уравнения для  $m_{ЭМ}$  приведем формулы для определения активной и реактивной мощности:

$$p_{ЭМ} = k_{ds} U_{ds} y_{ds} + k_{dsf} U_{ds} y_{df} + k_{dsr} U_{ds} y_{dr} + \dot{u} \\ + k_{qs} U_{qs} y_{qs} + k_{qsf} U_{qs} y_{qf} + k_{qsr} U_{qs} y_{qr}; \quad \dot{y} \\ q_{ЭМ} = k_{ds} U_{qs} y_{ds} + k_{dsf} U_{qs} y_{df} + k_{dsr} U_{qs} y_{dr} - \dot{u} \\ - k_{qs} U_{ds} y_{qs} - k_{qsf} U_{ds} y_{qf} - k_{qsr} U_{ds} y_{qr}. \quad \dot{b} \quad (3)$$

Необходимо отметить, что уравнения записаны в системе относительных единиц, за базисные приняты те же единицы, что и приведенные, например, в [7].

Значения токов статора  $i_{ds}, i_{qs}$ , обмоток возбуждения  $i_{df}, i_{qf}$  и ротора  $i_{dr}, i_{qr}$  связывают с соответствующими потокосцеплениями коэффициенты. Они определяются из равенства матриц:

$$\begin{matrix} \dot{e} k_{ds} & 0 & k_{dsf} & 0 & k_{dsr} & 0 \\ \dot{e} 0 & k_{qs} & 0 & k_{qsf} & 0 & k_{qsr} \end{matrix} \dot{u} \\ \begin{matrix} \dot{e} k_{dsf} & 0 & k_{dff} & 0 & k_{dff} & 0 \\ \dot{e} 0 & k_{qsf} & 0 & k_{qff} & 0 & k_{qff} \end{matrix} \dot{u} \\ \begin{matrix} \dot{e} k_{dsr} & 0 & k_{dfr} & 0 & k_{dr} & 0 \\ \dot{e} 0 & k_{qsr} & 0 & k_{qfr} & 0 & k_{qr} \end{matrix} \dot{u} \\ \begin{matrix} \dot{e} x_{ds} & 0 & x_{ad} & 0 & x_{ad} & 0 \\ \dot{e} 0 & x_{qs} & 0 & x_{aq} & 0 & x_{aq} \\ \dot{e} x_{ad} & 0 & x_{df} & 0 & x_{ad} & 0 \\ \dot{e} 0 & x_{aq} & 0 & x_{qf} & 0 & x_{aq} \\ \dot{e} x_{ad} & 0 & x_{ad} & 0 & x_{dr} & 0 \\ \dot{e} 0 & x_{aq} & 0 & x_{aq} & 0 & x_{qr} \end{matrix} \ddot{u} \quad (4)$$

При необходимости аналитического определения этих коэффициентов они вычисляются по формулам:

$$k_{ds} = \frac{D_{1d}}{D_d}; \quad k_{dsf} = -\frac{D_{2d}}{D_d}; \quad k_{dsr} = -\frac{D_{3d}}{D_d}; \\ k_{df} = \frac{D_{4d}}{D_d}; \quad k_{dfr} = -\frac{D_{5d}}{D_d}; \quad k_{dr} = \frac{D_{6d}}{D_d}; \\ D_{1d} = x_{dr} x_{df} - x_{ad}^2; \quad D_{2d} = x_{dr} x_{ad} - x_{ad}^2; \\ D_{3d} = x_{df} x_{ad} - x_{ad}^2; \quad D_{4d} = x_{ds} x_{dr} - x_{ad}^2; \\ D_{5d} = x_{ds} x_{ad} - x_{ad}^2; \quad D_{6d} = x_{ds} x_{df} - x_{ad}^2; \\ D_d = x_{ds} D_{1d} - x_{ad} (D_{2d} + D_{3d}); \\ k_{qs} = \frac{D_{1q}}{D_q}; \quad k_{qsf} = -\frac{D_{2q}}{D_q}; \quad k_{qsr} = -\frac{D_{3q}}{D_q}; \\ k_{qf} = \frac{D_{4q}}{D_q}; \quad k_{qfr} = -\frac{D_{5q}}{D_q}; \quad k_{qr} = \frac{D_{6q}}{D_q}; \\ D_{1q} = x_{qr} x_{qf} - x_{aq}^2; \quad D_{2q} = x_{qr} x_{aq} - x_{aq}^2; \\ D_{3q} = x_{qf} x_{aq} - x_{aq}^2; \quad D_{4q} = x_{qs} x_{qr} - x_{aq}^2; \\ D_{5q} = x_{qs} x_{aq} - x_{aq}^2; \quad D_{6q} = x_{qs} x_{qf} - x_{aq}^2;$$

$D_q = x_{qs} D_{1q} - x_{aq} (D_{2q} + D_{3q})$ ;  $r_s, r_{dr}, r_{qr}, r_{df}, r_{qf}$  – соответственно активные сопротивления статора, ротора и обмоток возбуждения по осям  $d, q$ ;  $T_j$  – инерционная постоянная вращающихся частей электрических машин и турбин, рад.

**Структура математической модели синхронной машины с продольно-поперечным возбуждением.** В этом случае матричная форма остается без измене-

ния, кроме управляющей матрицы  $\begin{pmatrix} \dot{e}U_s \\ \dot{e}U_f \\ \dot{e}U_r \end{pmatrix}$  которая

превращается в матрицу  $\begin{pmatrix} \dot{e}U_s \\ \dot{e}U_f \\ \dot{e}0 \end{pmatrix}$  так как для таких

машин на роторе короткозамкнутые демпферные обмотки.

**Структура математической модели «классической» синхронной машины (с одной обмоткой возбуждения по оси  $d$ ).** Помимо  $U_r = 0$  изменятся матрицы-столбцы:

$$pY_f = \begin{pmatrix} \dot{e}pY_{df} \\ \dot{e}0 \end{pmatrix}, Y_f = \begin{pmatrix} \dot{e}Y_{df} \\ \dot{e}0 \end{pmatrix}, U_f = \begin{pmatrix} \dot{e}U_{df} \\ \dot{e}0 \end{pmatrix}$$

Кроме того, изменятся также диагональные матрицы:

$$B_{f1} = \begin{pmatrix} \dot{e}r_{df}k_{dsf} & 0 \\ \dot{e}0 & 0 \end{pmatrix}, B_{f2} = \begin{pmatrix} \dot{e}r_{df}k_{df} & 0 \\ \dot{e}0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_{f3} = \begin{pmatrix} \dot{e}r_{df}k_{drf} & 0 \\ \dot{e}0 & 0 \end{pmatrix}$$

Вследствие равенства нулю  $k_{qsf}$  и  $k_{qfr}$  также будут преобразованы матрицы:

$$A_{s2} = \begin{pmatrix} \dot{e}r_s k_{dsf} & 0 \\ \dot{e}0 & 0 \end{pmatrix}, A_{r2} = \begin{pmatrix} \dot{e}r_{ds} k_{drf} & 0 \\ \dot{e}0 & 0 \end{pmatrix}$$

Если синхронная машина выполнена с постоянными магнитами, т.е. в качестве возбудителя выступают постоянные магниты, то матрица производных потокоцеплений в (1) приобретает вид

$$\begin{pmatrix} \dot{e}pY_s \\ \dot{e}0 \end{pmatrix} \text{ а напряжение } U_{df}, \text{ от которого зависит по-} \\ \begin{pmatrix} \dot{e}pY_r \end{pmatrix}$$

токоцепление  $y_{df}$ , следует трактовать как величину, определяющую коэрцитивную силу постоянных магнитов, а точнее, величину магнитной энергии постоянных магнитов, отнесенную к единице их объема [8].

Выражение для момента классической синхронной машины:

$$m_{ЭМ} = (k_{qs} - k_{ds})y_{ds}y_{qs} + k_{qsr}y_{ds}y_{qr} - k_{dsf}y_{qs}y_{df} - k_{dsr}y_{qs}y_{dr}, \quad (5)$$

матрица сопротивлений примет вид:

$$\begin{pmatrix} \dot{e}k_{ds} & 0 & k_{dsf} & k_{dsr} & 0 \\ \dot{e}0 & k_{qs} & 0 & 0 & k_{qsr} \\ \dot{e}k_{dsf} & 0 & k_{df} & k_{dfr} & 0 \\ \dot{e}k_{dsr} & 0 & k_{dfr} & k_{dr} & 0 \\ \dot{e}0 & k_{qsr} & 0 & 0 & k_{qr} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{e}x_{ds} & 0 & x_{ad} & x_{ad} & 0 \\ \dot{e}0 & x_{qs} & 0 & 0 & x_{aq} \\ \dot{e}x_{ad} & 0 & x_{df} & x_{ad} & 0 \\ \dot{e}x_{ad} & 0 & x_{ad} & x_{dr} & 0 \\ \dot{e}0 & x_{aq} & 0 & 0 & x_{qr} \end{pmatrix}^{-1}$$

**Структура модели асинхронной машины.** В этом случае в матрице (1) исчезает 3-я строка, в диагональной матрице 2-й столбец, и уравнение (1) преобразуется к виду:

$$\begin{pmatrix} \dot{e}pY_s \\ \dot{e}pY_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{e}A_{s1} & A_{s3} \\ \dot{e}C_{r1} & C_{r3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{e}Y_s \\ \dot{e}Y_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{e}U_s \\ \dot{e}U_r \end{pmatrix} \quad (6)$$

Так как асинхронная машина симметрична в магнитном и электрическом отношении, то  $k_{ds} = k_{qs}$ ;  $k_{dsr} = k_{qsr}$ ;  $k_{dr} = k_{qr}$  и  $r_{dr} = r_{qr}$ . С учетом этого подматрицы трансформируются в выражения:

$$\begin{aligned} A_{s1} &= \begin{pmatrix} \dot{e}r_s k_{ds} & -w_r \\ \dot{e}w_r & -r_s k_{ds} \end{pmatrix} = -r_s k_{ds} E - Jw_r; \\ A_{s3} &= \begin{pmatrix} \dot{e}r_s k_{dsr} & 0 \\ \dot{e}0 & -r_s k_{dsr} \end{pmatrix} = -r_s k_{dsr} E; \\ C_{r1} &= \begin{pmatrix} \dot{e}r_{dr} k_{dsr} & 0 \\ \dot{e}0 & -r_{dr} k_{dsr} \end{pmatrix} = -r_{dr} k_{dsr} E; \\ C_{r2} &= \begin{pmatrix} \dot{e}r_{dr} k_{dr} & 0 \\ \dot{e}0 & -r_{dr} k_{dr} \end{pmatrix} = -r_{dr} k_{dr} E. \end{aligned} \quad (7)$$

Подставляя (7) в (6) можно получить в развернутой векторной форме выражения для производных потокоцеплений статорных и роторных контуров  $Y_s$  и  $Y_r$ :

$$\begin{aligned} pY_s &= A_{s1}Y_s + A_{s3}Y_r + U_s = \\ &= -r_s k_{ds}Y_s - Jw_rY_s - r_s k_{dsr}Y_r + U_s; \\ pY_r &= C_{r1}Y_s + C_{r3}Y_r + U_r = \\ &= r_r k_{dsr}Y_s - r_r k_{dr}Y_r + U_r. \end{aligned} \quad (8)$$

Коэффициенты  $k_{ds}$ ,  $k_{dr}$ ,  $k_{dsr}$  могут быть определены из равенства:

$$\begin{pmatrix} \dot{e}k_{ds} & 0 & k_{dsr} & 0 \\ \dot{e}0 & k_{ds} & 0 & k_{dsr} \\ \dot{e}k_{dsr} & 0 & k_{dr} & 0 \\ \dot{e}0 & k_{dsr} & 0 & k_{dr} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{e} \\ \dot{e} \\ \dot{e} \\ \dot{e} \\ \dot{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_s & 0 & x_m & 0 & \ddot{u}^{-1} \\ 0 & x_s & 0 & x_m \dot{u} & \dot{u} \\ x_m & 0 & x_r & 0 & \dot{u} \\ 0 & x_m & 0 & x_r \dot{u} & \dot{u} \\ 0 & x_m & 0 & x_r \dot{u} & \dot{u} \end{pmatrix} \cdot \quad (9)$$

Необходимо отметить, что выражения (8) по форме совпадают с уравнениями асинхронной машины, приведенными в [2].

Выражение для электромагнитного момента асинхронной машины

$$m_{\text{ЭМ}} = k_{dsr}(y_{ds}y_{qr} - y_{qs}y_{dr}). \quad (10)$$

**Управление.** Как было отмечено, в качестве управляющих параметров в структуре модели машин переменного тока могут быть использованы  $U_s, f_s$  – вектор и частота напряжения статорной обмотки,  $U_f, f_r$  – вектор напряжения обмоток возбуждения и  $U_r, f_r$  – вектор и частота напряжения роторной обмотки. Так как структура математической модели машин переменного тока базируется на записи в осях  $d, q$ , вращающихся со скоростью ротора  $w_r$ , то проблема моделирования напряжения обмоток возбуждения и роторной снимается, так как они прямо подаются с регулирующих устройств (например, либо с выхода автоматического регулятора возбуждения при синхронной машине, либо с выхода преобразователя частоты, питающего роторную обмотку асинхронной машины).

Для статорной обмотки эта проблема существует. Необходимо вектор напряжения питания статорной обмотки машины переменного тока, составляющие которого  $U_{ds}$  и  $U_{qs}$  записаны в осях  $d, q$ , вращающихся со скоростью ротора  $w_r$ , представить в таком виде, чтобы иметь возможность сочлени с электрической машиной переменного тока систему управления (например, преобразователь частоты). Необходимо, чтобы они отражали изменение (регулирование) амплитуды и частоты напряжения, питающего статорную обмотку. Для этого следует провести следующие преобразования [8].

На диаграмме рис. 1 показано расположение координатных осей машин переменного тока, где  $a_0, b_0$  – неподвижные в пространстве оси координат;  $a_s, b_s$  – синхронно, с частотой электрической сети вращающиеся оси координат;  $d, q$  – координатные оси, вращающиеся со скоростью ротора  $w_r$ . Угол между осями  $a_s, b_s$  и  $a_0, b_0$  обозначим через  $a_s = w_s t$ , где  $t = 314t$  – время, рад;  $t$  – время, с. Угол между осями  $d, q$  и неподвижными осями  $a_0, b_0$  обозначим через  $a = w_r t$  и, наконец, угол между осями  $d, q$  и  $a_s, b_s$ , который получил название угла мощности, обозначим через  $q = a + a_s$ .

Если расположить вектор напряжения статора в исходном состоянии под углом  $\pi/4$  рад к осям  $a_s$ ,

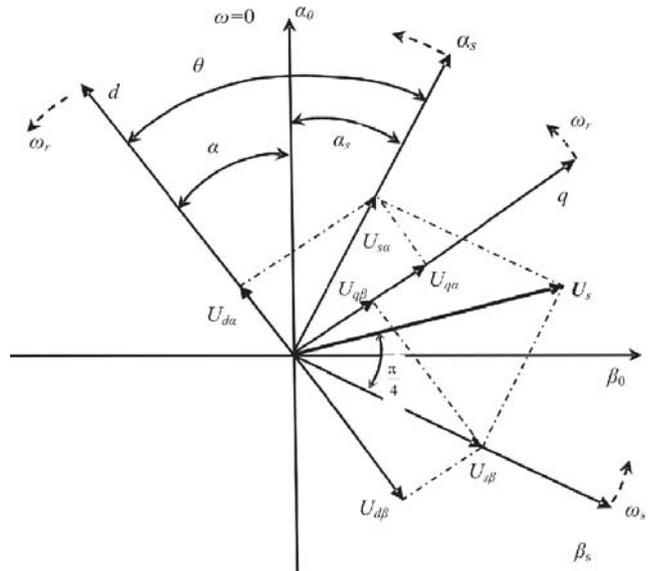


Рис. 1

$b_s$ , то его проекции на эти оси, естественно, будут одинаковыми и равными  $U_{sa0} = U_{sb0} = 0,707U_s$  (отн. ед.). Проекции векторов  $U_{sa}$  и  $U_{sb}$  на оси  $d, q$  в соответствии с рис. 1 можно представить в виде:

$$\begin{aligned} U_{da} &= U_{sa} \cos q = U_{sa} \cos(a + w_s t); \\ U_{qa} &= U_{sa} \sin q = U_{sa} \sin(a + w_s t); \\ U_{db} &= U_{sb} \sin q = U_{sb} \sin(a + w_s t); \\ U_{qb} &= U_{sb} \cos q = U_{sb} \cos(a + w_s t). \end{aligned} \quad (11)$$

Общие проекции этих составляющих на оси  $d, q$  согласно рис. 1:

$$\begin{aligned} U_{ds} &= U_{da} - U_{db}; \\ U_{qs} &= U_{qa} - U_{qb}. \end{aligned} \quad (12)$$

Подставляя в (12) выражения из (11) и имея в виду, что вектор  $U_s$ , как и оси  $a_s, b_s$ , вращается со скоростью  $w_s$ , имеем  $U_{sa} = U_{sb} = U_{sa0} = U_{sb0} = 0,707U_s$ . Кроме того, обозначая  $k_{us} = \frac{U_s}{U_{s0}}$  и  $k_{fs} = \frac{w_s}{w_{s0}} = \frac{f_s}{f_{s0}}$ , где  $U_{s0} = 1$  и  $w_{s0} = f_{s0} = 1$  [отн. ед.], получаем:

$$\begin{aligned} U_{ds} &= 0,707k_{us} [\cos(a + k_{fs} t) - \sin(a + k_{fs} t)]; \\ U_{qs} &= 0,707k_{us} [\sin(a + k_{fs} t) + \cos(a + k_{fs} t)]. \end{aligned} \quad (13)$$

Путем несложных преобразований выражения (13) можно представить в более удобном для применения виде:

$$\begin{aligned} U_{ds} &= 0,707k_{us} [\cos(k_{fs} t)(\cos a - \sin a) - \\ &- \sin(k_{fs} t)(\cos a + \sin a)]; \\ U_{qs} &= 0,707k_{us} [\cos(k_{fs} t)(\cos a + \sin a) + \\ &+ \sin(k_{fs} t)(\cos a - \sin a)]. \end{aligned} \quad (14)$$

В (14) отображено управление электрической машиной переменного тока со стороны статора. И



ветроэлектрической установке). Знак минус указывает на генераторный режим.

На рис. 2,а–е приведены осциллограммы изменения электромагнитного момента  $m_{эм}$ , скорости  $\omega_r$ , токов возбуждения  $i_{fd}$  и  $i_{fq}$ , а также активной  $p_{эм}$  и реактивной  $q$  мощности. Машина запускается в асинхронном режиме (т.е. при этом  $U_{df} = U_{qf} = 0$ ).

Электромагнитный момент  $m_{эм}$  (рис. 2,а) после пуска меняет знак на отрицательный (генераторный режим), до 5000 рад продолжается асинхронный режим (наблюдаются флуктуации момента). При  $5 \cdot 10^3$  рад подается возбуждение  $U_{df} = 1,62$ , которому соответствует установившееся значение тока возбуждения  $i_{fd} = 1,7$  (рис. 2,б) – машина входит в синхронизм. При  $1 \cdot 10^4$  рад движущий момент турбины увеличивается до  $m_T = -0,8$ , вместе с этим принудительно снижается напряжение возбуждения  $U_{df}$  с 1,62 до 1,2 ( $i_{df} = 1,3$ ). Реактивная мощность (рис. 2,е), равная  $q = -0,42$ , после снижения  $U_{df}$  переходит в режим потребления и становится равной  $q = 0,23$ . При  $1,7 \cdot 10^4$  рад подается напряжение на поперечную обмотку возбуждения  $U_{df} = 0,65$ , ток возбуждения в этой обмотке достигает значения  $i_{fd} = 1,14$  (рис. 2,в). Реактивная мощ-

ность (рис. 2,е) переходит из режима потребления в режим выдачи ( $q = -0,137$ ).

На рис. 3 представлена осциллограмма изменения режимных параметров этой же машины при частоте на выходе преобразователя частоты в цепи статора, равной  $k_{us} = k_{fs} = 0,6$ . Значение  $m_T$ , равное сначала  $-0,4$  ( $U_{df} = 1,4$ ,  $i_{df} = 1,49$ ), затем изменяется до  $m_T = -0,7$ , напряжение возбуждения до  $U_{df} = 0,8$  ( $i_{df} = 0,85$ ). Затем при  $1,7 \cdot 10^4$  рад подается напряжение на поперечную обмотку возбуждения.

По изменениям кривых на рис. 3,д и е видно, что реактивная мощность при снижении  $U_{df}$  с 1,4 до 0,8 переходит из режима выдачи ( $q = -0,18$ ) в режим потребления со значением  $q = 0,33$ , а после подачи  $U_{qf} = 0,9$  снова переходит в режим выдачи со значением  $q = -0,14$ .

*Управляемая асинхронная машина.* Структура уравнений в векторной форме представлена выражением (6), составляющие статорного напряжения моделируются выражением (14) со значением  $q = 0,33$ , а роторного – выражением (15).

Параметры машины (отн. ед.):

$$x_d = 4,878; r_s = 0,01; k_{ds} = 5,69;$$

$$x_m = 4,8; r_r = 0,31; k_{dr} = 5,66;$$

$$x_r = 4,9; 1/T_j = 0,005; k_{dsr} = 5,56.$$

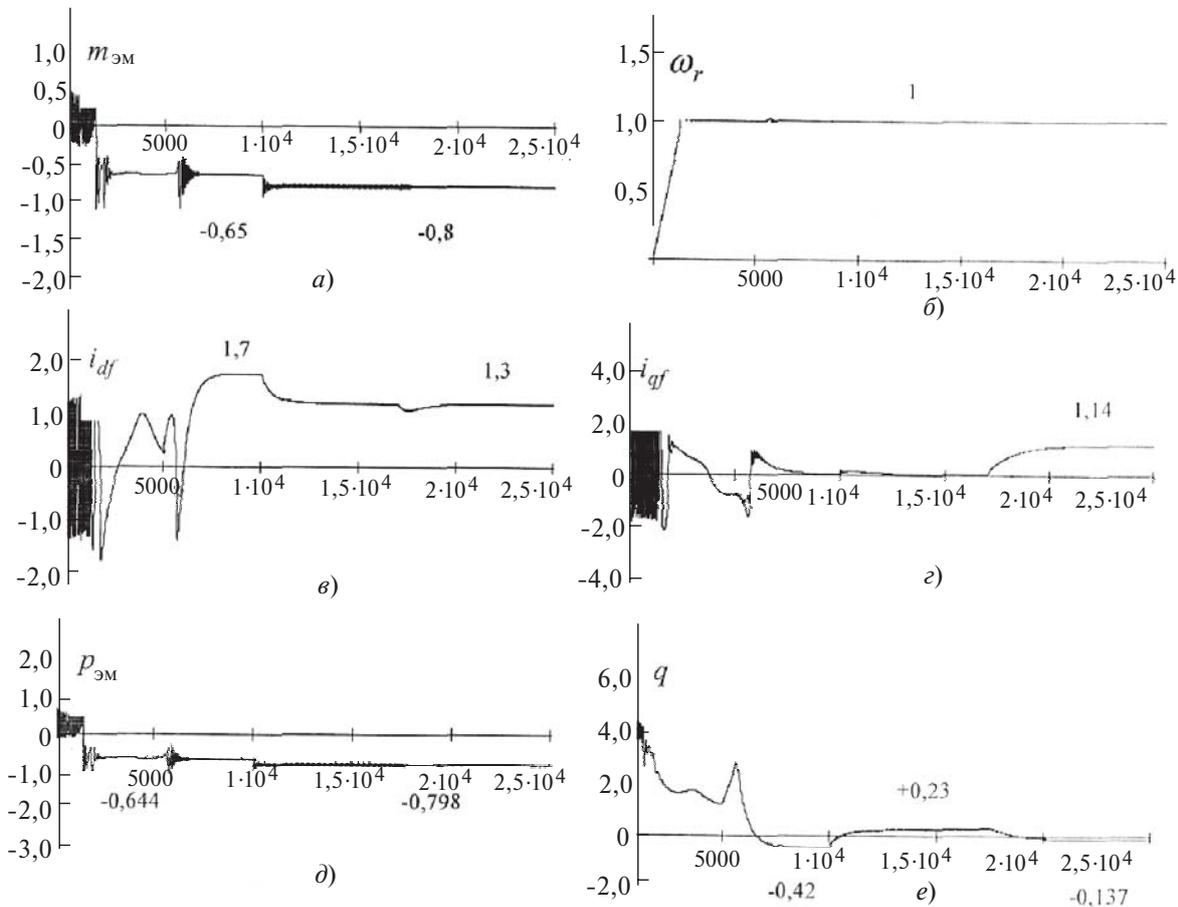


Рис. 2

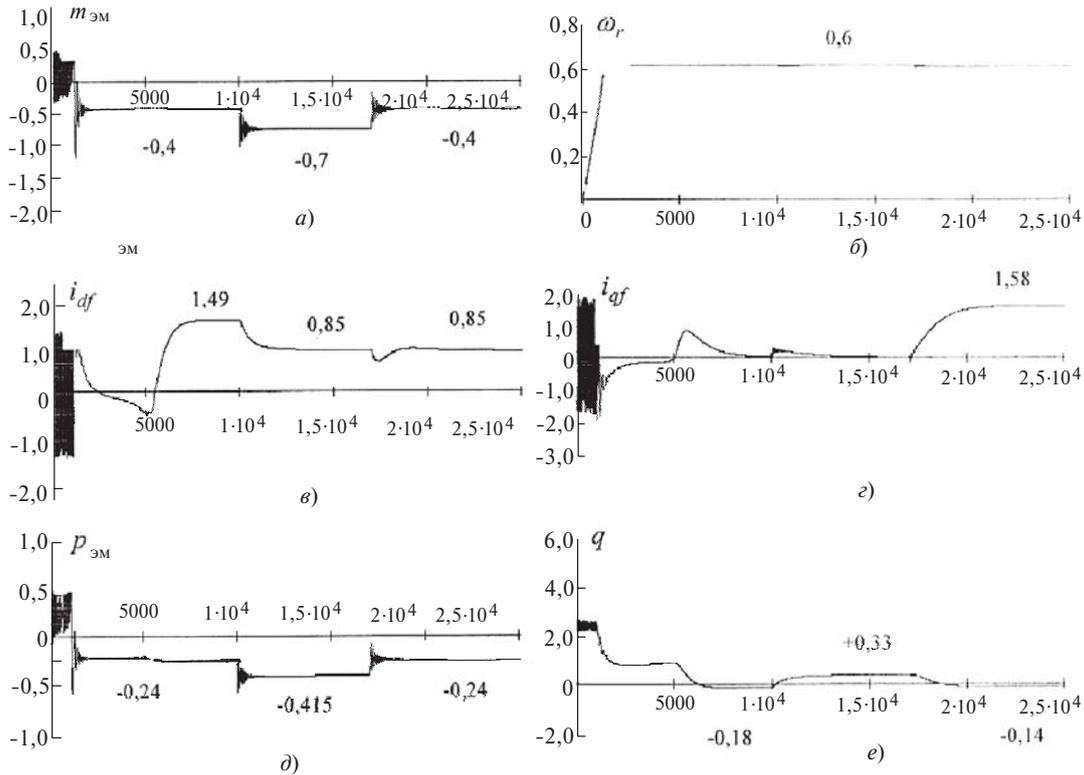


Рис. 3

Алгоритм решения уравнений асинхронной машины в общем виде представлен внизу страницы.

На рис. 4,а-г при  $k_{us} = k_{fs} = 1$  (т.е. номинальных значениях амплитуды и частоты статорного напряжения) на первом этапе при закороченном роторе  $U_r = 0$  в диапазоне от 0 до  $10^3$  рад запускается генератор со значением  $m_T = -0,3$ , устанавливается значение  $\omega_r = 1,01$  (рис. 4,а). При  $10^3$  рад подается напряжение на обмотку ротора с установившимся значением  $k_{ur} = k_{fr} = -0,15$  (асинхронная машина с короткозамкнутым ротором трансформируется в асинхронную машину двойного питания). В диапазоне  $10^3, 2 \cdot 10^3$  рад частота вращения становится равной  $\omega_r = 1,15$  (рис. 4,а). Электромагнитный момент определяется значением  $m_T$  и остается неизменным  $m_{эм} = -0,3$  (рис. 4,б). Кривая общей активной мощности, равной суммарному ее значению в статорных и роторных контурах, изображена на рис. 4,в. Установившееся ее значение изменяется от  $p_{об} = -0,3$  при короткозамкнутом контуре в диапазоне от 0 до 1000 рад до  $p_{об} = -0,34$  при  $t > 1000$

$t > 1000$  рад, когда частота вращения ротора увеличивается до  $\omega_r = 1,15$  путем регулирования частоты тока в роторной обмотке машины двойного питания. Реактивная мощность (рис. 4,г) изменяется от  $q_{об} = 0,24$  (потребляет из сети) до  $q_{об} = -0,218$  (выдает в сеть). После возвращения в исходный режим ( $2 \cdot 10^3, 3 \cdot 10^3$  рад, т.е. когда  $k_{ur} = 0$ ) подается управляющее напряжение ( $k_{ur} = k_{fr} = 0,15$ ). При этом частота вращения ротора асинхронной машины снижается до  $\omega_r = 0,85$  (рис. 4,а), соответственно уменьшается активная мощность  $p_{об}$  с  $-0,3$  до  $-0,25$ , а реактивная мощность, оставаясь в режиме потребления, увеличивается с  $0,24$  до  $0,49$ , момент  $m_{эм}$  не изменяется и равняется  $-0,3$ .

На рис. 5,а-г изображены осциллограммы изменения режимных параметров асинхронной машины двойного питания при регулировании напряжения и частоты как со стороны статора, так и со стороны ротора. Здесь  $k_{us} = k_{fs} = 0,7, k_{ur} = k_{fr} = -0,15$  на первом этапе и  $m_T = -0,3$ . После пуска установившееся значение  $\omega_r = 0,7$ , затем при

$$D(t, Y) = \begin{pmatrix} 0,707k_{us} [\cos(k_{fs}t)(\cos Y_6 - \sin Y_6) - 0,707k_{us} \sin(k_{fs}t)(\cos Y_6 + \sin Y_6) - Y_5 Y_2 - 0,01(5,59Y_1 - 5,56Y_3)] \\ 0,707k_{us} [\cos(k_{fs}t)(\cos Y_6 + \sin Y_6) + 0,707k_{us} \sin(k_{fs}t)(\cos Y_6 - \sin Y_6) + Y_5 Y_1 - 0,01(5,69Y_2 - 5,56Y_4)] \\ - k_{ur} \sin(k_{fr}t) - 0,031(5,66Y_3 - 5,56Y_1) \\ k_{ur} \cos(k_{fr}t) - 0,031(5,66Y_4 - 5,56Y_2) \\ 0,005(m_T) - 0,005[Y_1(5,69Y_2 - 5,56Y_4) - Y_2(5,59Y_1 - 5,56Y_3)] \\ Y_5 \end{pmatrix}$$

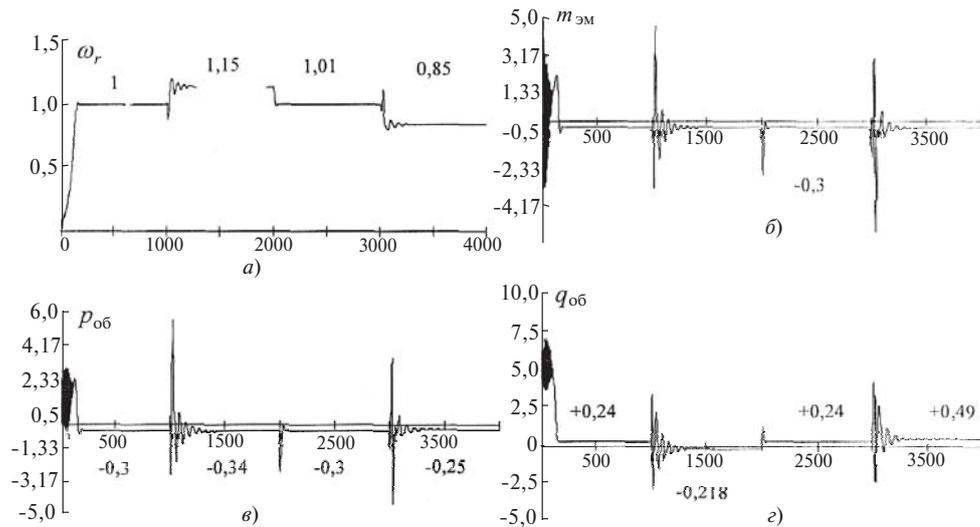


Рис. 4

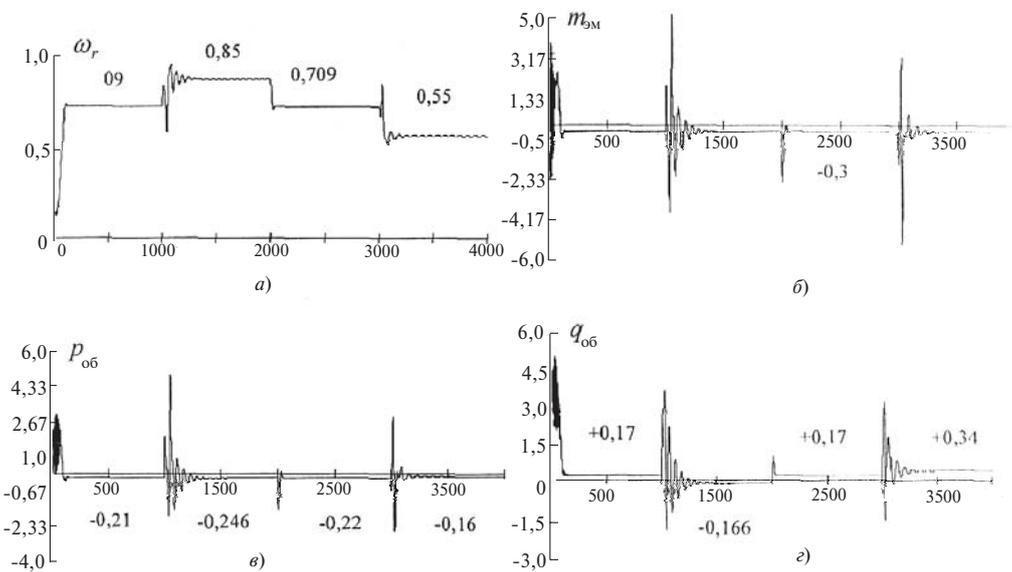


Рис. 5

$k_{ur} = k_{fr} = -0,15$  (после 1000 рад) становится равным  $w_r = 0,85$  (рис. 5,а), момент остается без изменения  $m_{эм} = -0,3$  (рис. 5,б). Активная и реактивная мощности изменяются с  $p_{об} = -0,21$  до  $p_{об} = -0,246$  и  $q_{об} = 0,17$  (потребляет из сети) до  $q_{об} = -0,166$  (выдает в сеть) (рис. 5,в и г).

Там же после исходного режима (3000 рад) при неизменных  $k_{us} = k_{fs} = 0,7$  регулируется значение  $k_{us} = k_{fs}$ , которое было установлено равным 0,15. При этом частота вращения ротора снижается до  $w_r = 0,55$ . Активная мощность принимает значение  $p_{эм} = -0,16$ , а реактивная мощность в режиме потребления увеличивается почти в 2 раза (по сравнению с исходным значением) и становится равной  $q = 0,34$ .

Вышеприведенные примеры расчета подтверждают работоспособность универсальной структуры математической модели управляемых электрических машин переменного тока. Известно, что основными силовыми средствами управления электромеханических преобразователей переменного

тока являются преобразователи частоты, которые в настоящее время выполняются на полностью управляемых IGBT-транзисторах или GTO-тиристорах с широтно-импульсным управлением. Представленная структура позволяет учесть в модели регулирование как амплитуды, так и частоты напряжения, питающего статорные и роторные контуры машины переменного тока.

Учесть насыщение можно известными методами: либо оперируя «насыщенными» значениями параметров, либо используя их функциональные зависимости [7]. Гармонический состав напряжения на выходах преобразователей частоты может быть учтен, применив разложение в ряд Фурье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Копылов И.П. Математическое моделирование электрических машин. – М.: Высшая школа, 1987, 248 с.
2. Ковач К.П., Рац И. Переходные процессы в машинах переменного тока/Пер. с нем. – М.; Л.: Госэнергоиздат, 1963, 744 с.

3. **Казовский Е.Я.** Переходные процессы в электрических машинах переменного тока. — М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1962, 624 с.

4. **Ботвинник М.М., Шакарян Ю.Г.** Управляемая машина переменного тока. — М.: Наука, 1969, 140 с.

5. **Беспалов В.Я.** Перспективы создания отечественных электродвигателей нового поколения для частотно-регулируемого электропривода. — Труды IV Международ. конф. «Автоматизированный электропривод в XXI в.». Магнитогорск, 2004.

6. **Данилевич Я.Б., Волков Е.А., Блоцкий Н.Н., Пиковский А.В., Плотникова Т.В., Титова М.В.** Ветроэнергетическая установка мощностью 1000 кВт. — Тезисы доклада Всесоюзного совещания «Вопросы проектирования, исследования и производства мощных турбо-, гидрогенераторов и крупных электрических машин», Ленинград, 1988.

7. **Применение** аналоговых вычислительных машин в энергетических системах/Под ред. Н.И. Соколова. — М.;Л.: Энергия, 1964, 408 с.

8. **Мустафав Р.И., Гасанова Л.Г.** Моделирование и исследование режимов работы синхронных генераторов ВЭУ при частотном управлении. — Электричество, 2010, № 7, с. 34–40.

9. **Мустафав Р.И., Гасанова Л.Г.** Моделирование и исследование квазистационарных режимов работы ВЭУ с асинхронными генераторами при частотном управлении. — Электричество, 2009, № 6, с. 36–41.

[04.06.14]

*Авторы: Мустафав Рауф Исмаил оглы окончил в 1964 г. Московский агротехнический университет. В 1990 г. защитил в Московском энергетическом институте докторскую диссертацию. Главный научный сотрудник отдела «Перспективное развитие электроэнергетики» АзНИПИИЭнергетики (Баку, Азербайджан).*

*Гасанова Ляман Гасан гызы окончила в 2001 г. магистратуру Азербайджанской государственной нефтяной академии. Кандидат технических наук, старший научный сотрудник отдела «Перспективное развитие электроэнергетики» АзНИПИИЭнергетики (Баку, Азербайджан).*

*Elektrichestvo (Electricity), 2015, No. 2, pp. 40–48.*

## The Universal Structure of a Mathematical Model of Controlled AC Electrical Machines

R.I. MUSTAFAEV and L.G. GASANOVA

*The universal structure of a mathematical model of AC electrical machines is developed, which is based on equations written in the coordinate axes rotating with the rotor speed with respect to flux linkages represented in vector-matrix form. The model structure makes it possible to take into account all possible kinds of AC machine control, including frequency control both on the rotor and stator sides, as well as control of excitation circuits in the direct and quadrature axes for synchronous machines. The model enables one to investigate the absolute majority of AC machines used in practice: a synchronous machine with excitation in direct and quadrature axes, a “classic” synchronous machine with excitation in the direct axis, an adjustable-frequency synchronous machine with excitation from permanent magnets, an adjustable-frequency induction machine with a squirrel-cage rotor, a double-fed induction machine, and an adjustable-frequency induction machine controlled both on the stator and rotor sides.*

**Key words:** wind power engineering, hydraulic power engineering, AC machines, control system, mathematical model

### REFERENCES

1. **Kopylov I.P.** *Matematicheskoye modelirovaniye elektricheskikh mashin* (Mathematical modeling of electric machines.) Moscow, Publ. Vysshaya shkola, 1987, 248 p.

2. **Kovach K.P., Rats I.** *Perekhodnye protsessy v mashinakh peremennogo toka/Per. s nemets.* (Transients in AC machines. Trans. from German.) Moscow, Leningrad. Publ. Gosenergoizdat, 1963, 744 p.

3. **Kazovskii E.Ya.** *Perekhodnye protsessy v elektricheskikh mashinakh peremennogo toka* (Transients in AC electric machines). Moscow, Publ. Academy of Sciences SSSR, 1962, 624 p.

4. **Botvinnik M.M., Shakaryan Yu.G.** *Upravlyayemaya mashina peremennogo toka* (Ac controlling machine). Moscow, Publ. Nauka, 1969, 140 p.

5. **Bespalov V.Ya.** *Perspektivy sozdaniya otechestvennykh elektrodvigateli novogo pokoleniya dlya chastotno-reguliruyemogo elektroprivoda. Trudy IV Mezhdunarod. konf. «Avtomatizirovannyi elektroprivod v XXI veke»* (Prospects for Development of Domestically Produced New-Generation Electric Motors for Adjustable-Frequency Electric Drives, in Proceedings of the 4th

International Conference «Automated Electric Drive in the 21st Century.»). Magnitogorsk, 2004.

6. **Danilevich Ya.B., Volkov E.A., Blotskii N.N., Pikovskii A.V., Plotnikova T.V., Titova M.V.** *Vetroyenergeticheskaya ustanovka moshchnost'yu 1000 kVt. — Tezisy doklada Vsesoyuznogo soveshchaniya «Voprosy proektirovaniya, issledovaniya i proizvodstva moshchnykh turbo-, gidrogeneratorov i krupnykh elektricheskikh mashin»* (A 100 kW Wind Power Plant, in Proceedings of the All-Union Meeting «Matters Concerned with Designing, Investigation, and Manufacture of High-Capacity Turbine Generators, Hydraulic Generators, and Large Electrical Machines.»). Leningrad, 1989.

7. **Primeneniye analogovykh vychislitel'nykh mashin v energeticheskikh sistemakh/Под ред. N.I. Sokolova** (Use of analogue computers in energy systems. Edit. by N.I. Sokolov). Moscow, Leningrad. Publ. Energiya, 1964, 408 p.

8. **Mustafayev R.I., Gasanova L.G.** *Elektrichestvo (Electricity)*, 2010, No. 7, pp. 34–40.

9. **Mustafayev R.I., Gasanova L.G.** *Elektrichestvo (Electricity)*, 2009, No. 6, pp. 36–41.

*Authors: Mustafayev Rauf Ismail ogly (Baku, Azerbaijan) — Doctor Techn. Sci., Professor, Chief scientific researcher in Azerbaijan Scientific — Research Design Institute of Power Engineering (ASRDIPE).*

*Gasanova Lyaman Gasan gyzy (Baku, Azerbaijan) — Cand. Techn. Sci., Senior scientific researcher in ASRDIPE.*

