Электричество, 2015, № 7, с. 56–61.

Синтез системы управления многоканальным объектом

СИМАКОВ Г. М., ФИЛЮШОВ Ю. П.

На основе принципа максимума представлен метод синтеза управления выходными величинами многоканального взаимосвязанного объекта. Показано, что оптимальное по быстродействию управление должно обеспечивать регулирование задаваемых переменных с одинаковым темпом, что достигается путем синтеза управляющего воздействия. Это ключевое положение справедливо для многоканальных объектов, в которых можно осуществить развязку внутренних обратных связей. Задаваемое соотношение между регулируемыми переменными сохраняется во всем временном интервале, не нарушая оптимальности переходных процессов. Критерием оптимальности является время.

Ключевые слова: *многоканальный объект, оптимальное управление, принцип максимума*

Существует множество решений для одноканальных систем, обеспечивающих в условиях тех или иных ограничений наилучшее по быстродействию управление. Одно из возможных решений — форсирование управления до естественных ограничений. По этой причине темп изменения регулируемой величины не может выйти за определенные границы. Вместе с тем существует большой класс объектов, относящихся к многоканальным системам. Многоканальной или многосвязной считается система, в которой по раздельным каналам формируется несколько величин, связанных друг с другом через объект управления или регулятор. Свойства системы зависят от соотношений регулируемых переменных. Взаимосвязь между каналами при изменении одной из регулируемых величин приводит к изменению всех переменных. В такой системе при возникающих ограничениях довольно сложно обеспечить желаемые свойства объекта. Поэтому задача поиска наилучшего по быстродействию управления в рамках многокритериальных задач является актуальной.

В статье представлен метод синтеза управляющих воздействий многоканального объекта. Если для одноканальной системы выбор метода синтеза является относительно простой задачей, то для многоканального объекта формирование управления всегда является проблемой.

Сложность объясняется тем, что приведение многоканального объекта к одноканальной системе не всегда возможно из-за необходимости регулировать несколько выходных величин. В большинстве случаев регулируемые переменные связаны как между собой, так и посредством умножения или деления с выходными величинами, поэтому синтез управляющих воздействий вызывает значительные трудности даже в статических режимах. В динамических процессах многообразие траекторий регулируемых переменных делает задачу выбора наилучшей траектории еще более сложной.

Типичными представителями многоканальных объектов являются электрические машины переменного тока, у которых в качестве выходной величины рассматривается электромагнитный момент или частота вращения ротора. Поэтому управление машиной переменного тока формируется как и для одноканальных систем; улучшаются динамические показатели качества и не уделяется должного внимания энергетическим свойствам, показатели которых наряду с электромагнитным моментом можно считать выходными величинами.

Выбор траектории регулируемых переменных по тому или иному критерию качества является задачей поиска наилучшего управления. Аналитические решения оптимальной задачи из-за сложности математического описания объекта и неоднозначности требований к управлению не нашли широкого применения. Противоречивые требования, предъявляемые к управлению, существенно усложняют решение многокритериальных задач. Численные методы, основанные на решении экстремальных задач, не дают однозначного решения и не позволяют выявить зависимости для формирования наилучшего управления посредством применения простых алгоритмов. Поэтому оптимальное управление в явном виде следует искать при наиболее полном использовании физических свойств объекта, применяя простые функционалы качества.

Постановка задачи. Рассматриваются процессы формирования основной выходной величины, являющейся произведением всех регулируемых переменных, и выходных величин, характеризующих соотношения между регулируемыми переменными многоканального объекта управления. Математическое описание представлено уравнениями, описывающими состояние каждого из n каналов управления N канального объекта:

$$\frac{\mathbf{dX}^n}{\mathbf{dt}} = \mathbf{A}_{nn}\mathbf{X}^n + \mathbf{G}_{nn}\mathbf{U}^n,\ n = 1, 2, ..., N. \qquad (1)$$

В ряде случаев свойства многоканального объекта зависят от соотношений между регулируемыми переменными. Поэтому в качестве выходных величин рассматривается вектор **Y**, компоненты которого определяют положение регулируемых переменных в рассматриваемой системе координат. В силу этих причин вектор выходных величин посредством звена деления нелинейно связан с регулируемыми переменными:

$$\mathbf{Y}^n = \mathbf{X}^n (x)^{-1},\ \mathbf{Y}^{n^{\mathrm{T}}}\mathbf{Y}^n = 1; \qquad (2)$$

$$x = (\mathbf{X}^{n^{\mathrm{T}}}\mathbf{X}^n)^{1/12}, \qquad (3)$$

где x — модуль вектора регулируемых переменных.

Основная выходная величина m связана произведением со всеми регулируемыми переменными:

$$m = \mathsf{P}\mathbf{X}^n,$$

где $\mathsf{P}\mathbf{X}^n$ — произведение проекций вектора регулируемых переменных.

Для более простого изложения материала рассматривается трехканальный объект управления в ортогональной системе координат. Структурная схема представлена на рис. 1. Приняты следующие обозначения:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};\ \mathbf{X} = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix};\ \mathbf{G} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};\ \mathbf{U} = \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix};$$

A — квадратная матрица, характеризующая свойства объекта; **X** — вектор регулируемых переменных; **U** — вектор управляющих воздействий; **G** — матрица действительных коэффициентов; u_1, u_2, u_3 — задающие воздействия. Основная выходная величина представлена следующим образом:

$$m = \mathsf{P}\mathbf{X}^n = x_1 x_2 x_3. \qquad (4)$$

Ставится задача формирования вектора управляющих воздействий **U**, принадлежащего замкнутой области пространства допустимых управлений, обеспечивающего перевод системы (1) из начального состояния в состояние, определенное заданным значением основной выходной (4) величины m за минимальное время при одновременном регулировании всех составляющих вектора выходных величин (2). Векторы выходных величин $\mathbf{Y}^n$ должны отражать задание $\mathbf{Y}_{\mathrm{ref}}$, определяющее желаемые свойства объекта в области потенциально реализуемых значений. Под допустимым управлением понимается все множество управлений, позволяющее сформировать предписанное значение выходных величин.

Решение. Рассмотрим разрешимость задачи по критерию управляемости. Для этой цели составим матрицу управляемости:

$$\mathbf{Z} = \left|\mathbf{G}, \mathbf{AG}, \mathbf{A}^2\mathbf{G}\right|.$$

Объект (1) будет управляем, если матрица управляемости имеет полный ранг:

$$r\{\mathbf{Z}\} = r\{\mathbf{G}, \mathbf{AG}, \mathbf{A}^2\mathbf{G}\} = n.$$

Выполненная проверка по соотношению

$$\det\{\mathbf{ZZ}^{\mathrm{T}}\} \neq 0$$

позволяет утверждать, что рассматриваемый объект полностью управляем. Управляемость объекта, представленного уравнением связи (1), говорит о теоретической возможности разрешения задачи управления в виде

$$f(\dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}_{\mathrm{ref}}, U_{\mathrm{ref}}) = 0, \qquad (5)$$

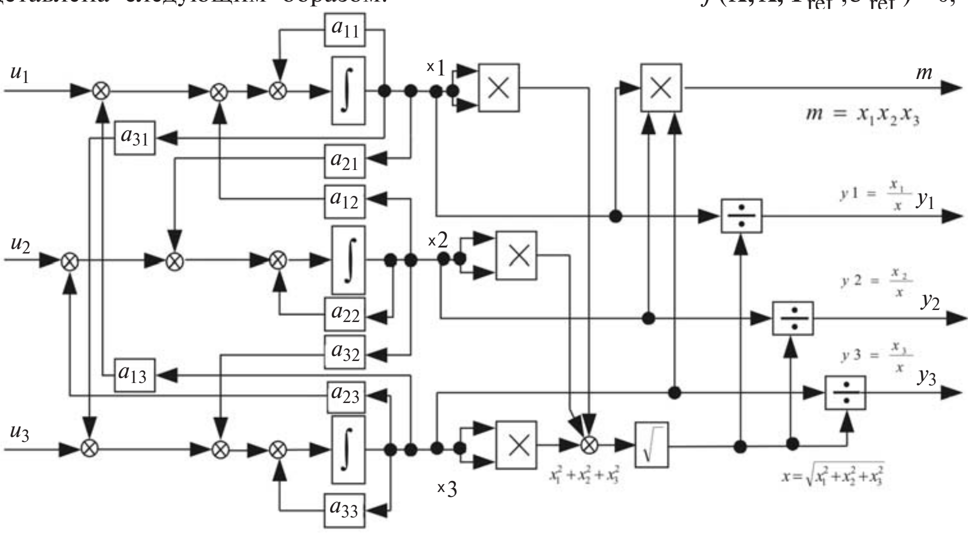

Рис. 1. Структурная схема объекта

где f — нелинейная функция; U_{ref} — задание основной выходной величины (4); $\mathbf{Y}_{\mathrm{ref}}$ — задание вектора выходных ведличин (2).

Так как основная выходная величина зависит от произведения регулируемых переменных, для организации линейной зависимости выходных величин от задания системы (1) в качестве регулируемых переменных удобно рассматривать их кубические значения. С этой целью сделаны эквивалентные преобразования. Левая и правая части уравнения (1) умножены слева на квадрат диагональной матрицы регулируемых переменных:

$$3\mathrm{diag}(\mathbf{X})^2\frac{d\mathbf{X}}{dt}=\mathbf{f};$$

$$\mathbf{f}=3\mathrm{diag}(\mathbf{X})^2\mathbf{AX}+3\mathrm{diag}(\mathbf{X})^2\mathbf{U}. \qquad (6)$$

Для перехода к новым переменным $\mathbf{X}^3$ уравнение (6) с учетом (2) представлено в зависимости от вектора $\mathbf{Y}$ выходных величин:

$$\mathbf{f}=3\mathrm{diag}(\mathbf{Y})^2\mathbf{AY}x^3+3\mathrm{diag}(\mathbf{Y})^2x^2\mathbf{U}.$$

Изменением последнего сомножителя первого слагаемого этого уравнения

$$\mathbf{Y}x^3=[\mathrm{diag}(\mathbf{Y})]^{-2}\mathrm{diag}(\mathbf{X})^2\mathbf{X}$$

уравнение (6) преобразуется:

$$\mathbf{f}=3\mathbf{LX}^3+3\mathrm{diag}(\mathbf{Y})^2x^2\mathbf{U}, \qquad (7)$$

где $\mathbf{X}^3$ — вектор новых регулируемых переменных:

$$\mathbf{X}^3=3\mathrm{diag}(\mathbf{X})^2\mathbf{X}=\left|x_1^3\ x_2^3\ x_3^3\right|^{\mathrm{T}};$$

$$\mathbf{L}=\mathrm{diag}(\mathbf{Y})^2\mathbf{A}\,\mathrm{diag}(\mathbf{Y})^{-2}.$$

Полагая, что вектор $\mathbf{X}$ полностью наблюдаем, вектор управления $\mathbf{U}$ системы (1) сформирован таким образом, чтобы в совокупности с обратными связями по регулируемым переменным отражал задание U_{ref} (5) основной выходной величины и задание для вектора $\mathbf{Y}_{\mathrm{ref}}$ выходных величин:

$$\mathbf{Y}_{\mathrm{ref}}=\left|y_{1\mathrm{ref}}\ y_{2\mathrm{ref}}\ y_{3\mathrm{ref}}\right|^{\mathrm{T}};$$

$$\mathbf{U}=-\mathbf{KX}+\mathbf{Y}_{\mathrm{ref}}\frac{U_{\mathrm{ref}}}{\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}}(T_z\mathrm{P}\mathbf{Y}_{\mathrm{ref}})^{-1}, \qquad (8)$$

где $\mathbf{K}$ — матрица коэффициентов обратной связи размерностью, соответствующей матрице $\mathbf{A}$; $\mathbf{Y}_{\mathrm{ref}}$ — задающий вектор выходных величин; T_z — параметр времени, характеризующий желаемое быстродействие контуров регулирования основной выходной величины.

Выбор T_z определяет полосу пропускания системы управления исходя из условий ограничения ресурсов управляющих воздействий. При организации управления (8), учитывая (2) и (6), состояние системы (1) представлено в зависимости от задания вектора выходных величин $\mathbf{Y}_{\mathrm{ref}}$, параметров обратных связей, сформированных матрицей $\mathbf{K}$, и сигнала задания выходной величины U_{ref}:

$$\mathbf{f}=3(\mathbf{L}-\mathbf{K}_R)\mathbf{X}^3+3\mathrm{diag}(\mathbf{Y})^2\mathbf{Y}_{\mathrm{ref}}(T_z\mathrm{P}\mathbf{Y}_{\mathrm{ref}})^{-1}U_{\mathrm{ref}}, \qquad (9)$$

где $\mathbf{K}_R$ — преобразованная матрица обратных связей:

$$\mathbf{K}_R=\mathrm{diag}(\mathbf{Y})^2\mathbf{K}\mathrm{diag}(\mathbf{Y})^{-2}.$$

Для определения элементов матрицы $\mathbf{K}_R$, выбор которых позволит назвать уравнение (8) оптимальным в условиях задания вектора $\mathbf{Y}_{\mathrm{ref}}$, используется принцип максимума [1]. Взаимосвязь между оптимальным управлением, регулируемыми переменными и координатами сопряженной системы определена с помощью функции Гамильтона. Гамильтониан быстродействия H динамической системы (1) при организации управления (8) имеет вид:

$$H=\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{f};$$

$$H=\mathbf{S}^{\mathrm{T}}3(\mathbf{L}-\mathbf{K}_R)\mathbf{X}^3+$$

$$+\mathbf{S}^{\mathrm{T}}3\mathrm{diag}(\mathbf{Y})^2\mathbf{Y}_{\mathrm{ref}}(T_z\mathrm{P}\mathbf{Y}_{\mathrm{ref}})^{-1}U_{\mathrm{ref}}; \qquad (10)$$

$$\mathbf{S}=\left|s_1\ s_2\ s_3\right|^{\mathrm{T}}, \qquad (11)$$

где координаты вектора $\mathbf{S}$ сопряженной системы

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt}=\frac{\partial H}{\partial[\mathrm{diag}(\mathbf{X})^2\mathbf{X}]^{\mathrm{T}}}=-3(\mathbf{L}-\mathbf{K}_R)^{\mathrm{T}}\mathbf{S} \qquad (12)$$

имеют довольно сложную зависимость во времени:

$$\mathbf{S}(t)=e^{-3(\mathbf{L}-\mathbf{K}_R)^{\mathrm{T}}}\mathbf{S}(0),$$

где $\mathbf{S}(0)$ — начальное значение координат вектора сопряженной системы.

Поскольку главной задачей управления является формирование основной выходной величины, задаваемой сигналом U_{ref}, условия максимума функции Гамильтона записаны следующим образом:

$$\frac{\partial H}{\partial U_{\mathrm{ref}}}=0;$$

$$\frac{\partial H}{\partial U_{\mathrm{ref}}}=\mathbf{S}^{\mathrm{T}}3\mathrm{diag}(\mathbf{Y})^2\mathbf{Y}_{\mathrm{ref}}(T_z\mathrm{P}\mathbf{Y}_{\mathrm{ref}})^{-1}. \qquad (13)$$

Из (13) следует, что одним из обязательных требований достижения максимума гамильтониана быстродействия независимо от значения модуля вектора регулируемых переменных x является одинаковое изменение во времени координат вектора $\mathbf{S}(t)$ сопряженной системы (12):

$$3\left(\frac{s_1 y_1^2}{y_{2\text{ref}}\, y_{3\text{ref}}}+\frac{s_2 y_2^2}{y_{1\text{ref}}\, y_{3\text{ref}}}+\frac{s_3 y_3^2}{y_{1\text{ref}}\, y_{2\text{ref}}}\right)\frac{1}{T_z}=0.$$

При выполнении условий (13) максимальное значение гамильтониана равняется нулю. Принципу максимума могут удовлетворять несколько, в том числе бесконечно много, различных форм управления. Наилучшим является то, которому соответствует максимальное значение функции Гамильтона. Гамильтониан быстродействия не может быть больше единицы. Так как критерием оптимальности является время, то оптимальное управление должно обеспечивать и наибольшую область устойчивости основной системы. Наибольшей областью устойчивости, а следовательно и качеством управления, обладают системы, описываемые апериодическим звеном первого порядка [2]. Для удовлетворения этих требований зависимость от времени координат вектора сопряженной системы представлена следующим образом:

$$\mathbf{S}(t)=e^{\frac{3t}{T_z}}\mathbf{S}(0). \qquad (14)$$

Решение (14) при одинаковых начальных условиях соответствует следующей системе уравнений:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt}=\frac{3}{T_z}\mathbf{S}.$$

Желаемое выражение для сопряженной системы (12) может быть получено при выполнении равенства

$$-(\mathbf{L}-\mathbf{K}_R)=\mathbf{E}T_z^{-1},$$

которое достигается посредством определенного выбора элементов матрицы обратных связей

$$\mathbf{K}=\operatorname{diag}(\mathbf{Y})^{-2}\mathbf{K}_R\operatorname{diag}(\mathbf{Y})^2.$$

Здесь $\mathbf{E}$ — единичная матрица размерностью матрицы $\mathbf{A}$. Значение матрицы $\mathbf{K}_R$ должно отвечать условиям

$$\mathbf{K}_R=(\mathbf{E}T_z^{-1}+\mathbf{L}).$$

На основании последнего требования определяется матрица

$$\mathbf{K}=(\mathbf{E}T_z^{-1}+\mathbf{A}). \qquad (15)$$

Выполнение условий (15) позволяет основную систему (1) при организации управления (8) записать в виде системы уравнений:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{X}^3=3(\mathbf{A}-\mathbf{K})\mathbf{X}^3+3\operatorname{diag}(\mathbf{Y})^2\mathbf{Y}_{\text{ref}}(T_z\Pi\mathbf{Y}_{\text{ref}})^{-1}U_{\text{ref}}. \qquad (16)$$

Решение (16)

$$\mathbf{X}^3(t)=3e^{-3t/T_z}\mathbf{X}^3(0)+$$

$$+\int_0^t 3e^{3(\mathbf{A}-\mathbf{K})(t-\tau)}\operatorname{diag}(\mathbf{Y})^2\mathbf{Y}_{\text{ref}}(T_z\Pi\mathbf{Y}_{\text{ref}})^{-1}U_{\text{ref}}d\tau$$

при нулевых начальных условиях $\mathbf{X}^3(0)$ представлено в виде

$$\mathbf{X}^3(t)=\operatorname{diag}(\mathbf{Y})^2\mathbf{Y}_{\text{ref}}(\Pi\mathbf{Y}_{\text{ref}})^{-1}U_{\text{ref}}[1-e^{-3t/T_z}]. \qquad (17)$$

Так как $\mathbf{X}^3(t)=\operatorname{diag}(\mathbf{X}(t))^2\mathbf{X}(t)$, уравнение (17) преобразовано в три эквивалентных уравнения:

$$\operatorname{diag}(\mathbf{Y}_{\text{ref}})^{-1}(\Pi\mathbf{Y}_{\text{ref}})\operatorname{diag}(\mathbf{Y})^{-2}\operatorname{diag}(\mathbf{X}(t))^2\mathbf{X}(t)=$$

$$=U_{\text{ref}}[1-e^{-3t/T_z}];$$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_{2\text{ref}} & y_{3\text{ref}}\\ y_2 & y_{1\text{ref}} & y_{3\text{ref}}\\ y_3 & y_{1\text{ref}} & y_{2\text{ref}}\end{vmatrix} x^3(t)=U_{\text{ref}}[1-e^{-3t/T_z}]. \qquad (18)$$

В соответствии с заданными условиями (2)

$$1=y_1^2+y_2^2+y_3^2;\quad y_1=\sqrt{1-y_2^2-y_3^2}$$

следует: если две проекции вектора $\mathbf{Y}$ известны, то и третья проекция может быть определена. Следовательно, при нулевых начальных условиях вектор выходных величин во всем временн*о*м диапазоне отвечает заданному значению, обеспечивая требуемые свойства системы управления при регулировании:

$$\mathbf{Y}_{\text{ref}}=\mathbf{Y}(t). \qquad (19)$$

На основании (18) кубическое значение модуля регулируемых переменных будет изменяться пропорционально $m(t)$ основной выходной величине:

$$x^3(t)=\frac{U_{\text{ref}}}{y_{1\text{ref}}\,y_{2\text{ref}}\,y_{3\text{ref}}}[1-e^{-3t/T_z}];$$

$$m(t)=U_{\text{ref}}[1-e^{-3t/T_z}]. \qquad (20)$$

Определенный выбор коэффициентов матрицы обратных связей (15) обеспечивает равное быстродействие контуров регулируемых переменных основной системы управления. При нулевых начальных условиях регулируемые переменные изменяются пропорционально с одинаковым темпом. В этих условиях положение векторов как в статических, так и в динамических режимах не изменяется и соответствует заданию вектора выходных величин $\mathbf{Y}_{\text{ref}}$. Регулятор управления (8) системы (1) можно назвать оптимальным, если существуют начальные условия решений сопряженной системы

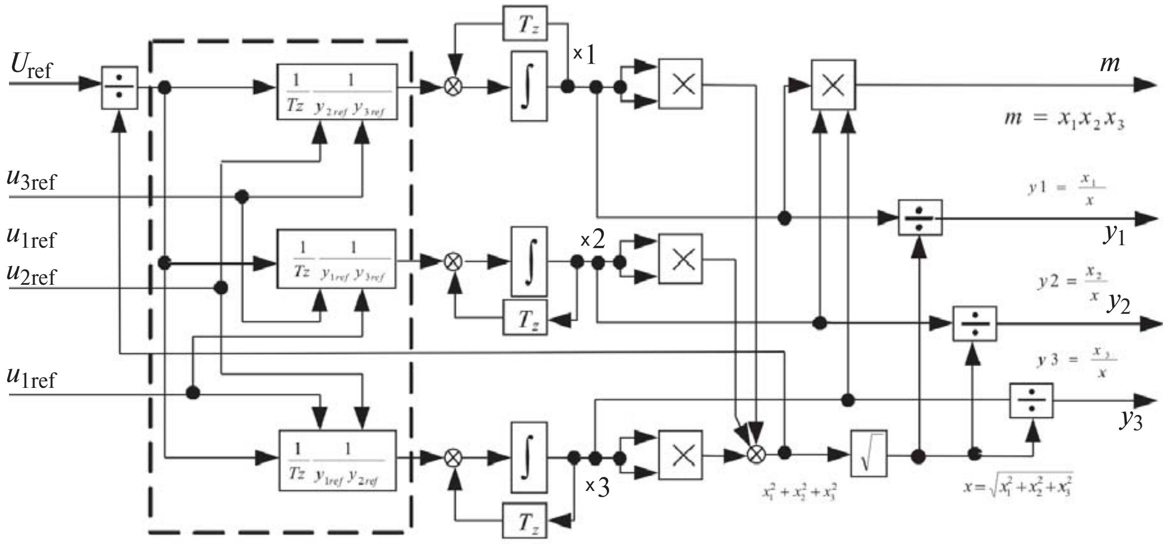

Рис. 2. Структурная схема оптимальной системы управления многоканальным объектом

$\mathbf{S}(0)$, при которых гамильтониан быстродействия (10) равен единице [3]:

$$\mathbf{S}(0) = \left| 3^{-1} \operatorname{diag}(\mathbf{Y}_{\rm ref})^{-2} \mathbf{Y}_{\rm ref} U_{\rm ref}^{-1} T_z (\mathrm{P}\mathbf{Y}_{\rm ref}) \right|;$$

$$\mathbf{S}(t) = e^{\frac{3t}{T_z}} \mathbf{S}(0).$$

Подставив решения (14) и (17) в (10), можно убедиться, что на всем временн*о*м интервале гамильтониан быстродействия равен единице:

$$H = \left(1 - e^{\frac{3t}{T_z}} + e^{\frac{3t}{T_z}}\right)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) = 1.$$

Поэтому перевод состояния многоканального объекта управления из положения, соответствующего нулевым начальным условиям, в положение, определенное управляющими воздействиями (8), при соблюдении условий (15) является оптимальным. Критерием оптимальности является время. На основании (17) представим регулируемые переменные системы (1):

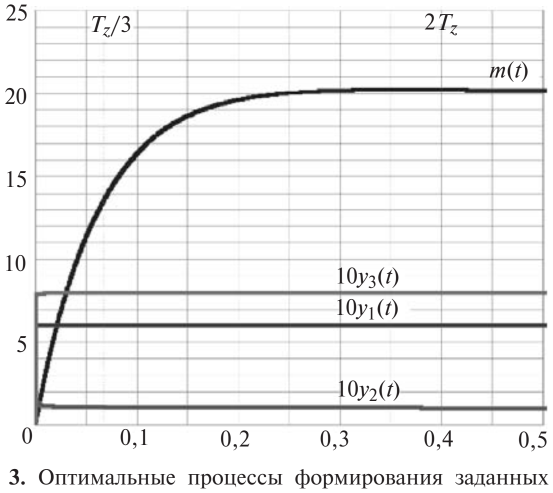

Рис. 3. Оптимальные процессы формирования заданных выходных величин

$$\mathbf{X}(t) = \sqrt[3]{\operatorname{diag}(\mathbf{Y})^2 \mathbf{Y}_{\rm ref} (\mathrm{P}\mathbf{Y}_{\rm ref})^{-1} U_{\rm ref} [1 - e^{-3t/T_z}]}. \quad (21)$$

Структурная схема системы (1) при организации управления (8) и выполнении условий (15) показаны на рис. 2.

На рис. 3 приведены результаты моделирования процессов формирования выходных величин в системе MatchCad15. Результаты моделирования показывают, что изменение во времени основной выходной величины соответствует полученному аналитическому выражению (20). Вектор выходных величин при нулевых начальных условиях в любой момент времени достаточно точно отвечает заданному значению (19). Физически это объясняется тем, что в статических и динамических режимах соотношение между регулируемыми переменными остается неизменным [4]. Задаваясь желаемым быстродействием контуров регулируемых переменных, которое характеризуется параметром времени T_z и достигается посредством определенного выбора регулятора, зависимость основной выходной величины от задания описывается апериодическим звеном первого порядка [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1983, 392 с.

2. **Петров Ю.П.** Вариационные методы теории оптимального управления. — М.; Л.: Энергия, 1965, 220 с.

3. **Филюшов Ю.П.** Оптимальное по быстродействию управление машиной переменного тока. – Электричество, 2011, № 2, с. 46—51.

4. **Филюшов Ю.П.** Управления синхронной машиной при минимизации тепловых потерь в условиях минимума реактивной мощности. – Электротехника, 2013, № 12, с. 57—63.

5. **Филюшов Ю.П.** Управление асинхронной машиной в условиях минимума реактивной мощности. – Электротехника, 2014, № 2, с. 15—20.

[23.06.14]

Авторы: ***Симаков Геннадий Михайлович*** *окончил Новосибирский электротехнический институт в 1964 г. В 2005 г. защитил докторскую диссертацию «Развитие теории и основы построения быстродействующего позиционного микроэлектропривода постоянного тока с разрывным управлением». Профессор кафедры «Электропривод и автоматизация промышленных установок» Новосибирского государственного технического университета (НГТУ).*

Филюшов Юрий Петрович *окончил НГТУ в 1985 г. В 2007 г. защитил кандидатскую диссертацию «Многокритериальная оптимизация работы машины переменного тока» Инженер Производственного объединения «Север».*

Elektrichestvo (Electricity), 2015, No. 7, pp. 56–61.

Synthesizing the Control System for a Multichannel Plant

G.M. SIMAKOV and Yu.P. FILYUSHOV

A method for synthesizing a system for controlling the output variables of a multichannel interlinked plant based on the maximum principle is presented. It is shown that the control optimal in terms of response speed should ensure control of the specified variables with the same rate, which is achieved by synthesizing the appropriate control output. This key statement is valid for multichannel plants in which their inner feedbacks can be decoupled. The specified correlation between the controlled variables is retained in the entire time interval without upsetting the optimality of transients. Time serves as the optimality criterion.

Key words: *multichannel plant, optimal control, maximum principle*

REFERENCES

1. **Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F.** *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov* (Mathematical theory of optimum processes). Moscow, Publ. «Nauka», 1983, 392 p.

2. **Petrov Yu.P.** *Variatsionnye metody teorii optimal'nogo upravleniya* (Variational methods optimal control theory). Moscow; Leningrad, Publ. «Energiya», 1965, 220 p.

3. **Filyushov Yu.P.** *Elektrichestvo – in Russ. (Electricity),* 2011, No. 2, pp. 46—51.

4. **Filyushov Yu.P.** *Elektrotekhnika – in Russ. (Power Engineering),* 2013, No. 12, pp. 57—63.

5. **Filyushov Yu.P.** *Elektrotekhnika – in Russ. (Power Engineering),* 2014, No. 2, pp. 15—20.

Authors: ***Simakov Gennadii Mikhailovich*** *(Novosibirsk, Russia) – Dr. Sci. (Eng.), Professor, Novosibirsk State Technical University (NSTU).*

Filyushov Yurii Petrovich *(Novosibirsk, Russia) – Cand. Sci. (Eng.), Engineer, Production Association «Sever».*