Обобщённая симметричная формула метода эквивалентного генератора на основе разложения переменной (напряжения, тока) по слагаемым определителя[1]

ХАЛЮТИН С.П., ТИТОВ А.А.

Для произвольной линейной электрической цепи предложена обобщенная формула метода эквивалентного генератора. Полученная формула является общей, так как по одной и той же формуле находятся и напряжение и ток. Она обладает симметрией, которая выражается в сходстве левой и правой частей равенства. Последовательное применение обобщенной формулы метода эквивалентного генератора в пределе приводит к преобразованию исходной схемы в соединения одних источников. Это позволяет записывать составляющие искомой переменной как алгебраическую сумму источников. На основании полученных формул метода предельных состояний сформулированы правила записи числителя и знаменателя искомой переменной в символьной форме. На примерах показано применение предложенных правил для записи решения.

Ключевые слова: *электрическая цепь, контурные и узловые определители, метод эквивалентного генератора, обобщенная формула, общая симметричная формула, слагаемые определителя*

A generalized formula from the method of equivalent generator is proposed for an arbitrary linear electric circuit. The obtained formula is general in nature, because the same expression is used for determining both voltages and currents. The formula has symmetry, which is manifested in that the left- and right-hand sides of the equality have similar forms. Sequential application of the generalized formula used in the equivalent generator method results in that the initial circuit is in the limiting case transformed to connections of only sources. This makes it possible to write the components of the sought variable as the algebraic sum of sources. Rules for writing the numerator and denominator of the sought variable in symbolic form are formulated based on the obtained formulas of the limiting state method. Examples illustrating application of the proposed rules for writing a solution are given.

Key words: *electric circuit, loop and nodal determinants, method of equivalent generator, generalized formula, general symmetric formula, determinant terms*

В области символьного анализа электрических цепей известны работы В. Фойснера, В.В. Филаретова, С.А. Курганова, И.В. Ерохова [1, 2, 3, 4] и других исследователей. Однако первым из них следует назвать Г. Кирхгофа [5]. Доказав свои знаменитые две теоремы (два закона) Г. Кирхгоф предложил правило записи аналитического решения для тока в любой ветви электрической цепи, в которой присутствуют только источники ЭДС.

В настоящей статье предлагается способ записи решения для искомой переменной (тока, напряжения) без составления систем уравнений цепи — путем применения метода предельных состояний. Предлагаемый способ отличается от правила Г. Кирхгофа.

Обобщенная формула метода эквивалентного генератора — симметричная формула разложения переменной (напряжения, тока) по двум слагаемым контурного и узлового определителей. Метод эквивалентного генератора, или теорема об активном двухполюснике, или теорема Гельмгольца—Тевенена — метод х.х. и КЗ [6—10] является одним из основных методов расчета в теории электрических цепей. Согласно этому методу для нахождения тока (напряжения) в какой-либо ветви размыкают или замыкают ту ветвь с сопротивлением R, где определяется ток (напряжение).

В статье рассматриваются ветви, в которых присутствует один пассивный элемент R (Z) или G (Y). Такие ветви будем называть: «элементарная ветвь» или «элементарная ветвь с сопротивлением R (Z)» или «элементарная ветвь с проводимостью G (Y)».

В настоящей статье приводится обобщенная формула метода эквивалентного генератора для нахождения любой переменной X (напряжения при $X = U$ или тока при $X = I$) на любом участке электрической цепи при размыкании и КЗ любой произвольно взятой элементарной ветви (одной и более). В предельном случае размыкаются и замыкаются все элементарные ветви [11—14].

Обобщенная формула метода эквивалентного генератора при размыкании и КЗ любой элементарной ветви с сопротивлением R_i имеет вид [11—14]:

$$X = \frac{\mathrm{D}_i X_i + R_i \mathrm{D}^i X^i}{\mathrm{D}_i + R_i \mathrm{D}^i}. \qquad (1)$$

[1] В порядке обсуждения. *Ред.*

Умножив числитель и знаменатель формулы (1) на проводимость $G_i = 1/R_i$, получим вторую формулу записи симметричной формулы разложения:

$$X = \frac{G_i \Delta_i X_i + \Delta^i X^i}{G_i \Delta_i + \Delta^i}, \qquad (2)$$

где X — искомая переменная (искомое напряжение при $X=U$ или искомый ток при $X=I$); X_i — составляющая (с нижним индексом) искомой переменной X (напряжения, тока) в подсхеме, полученной при КЗ элементарной ветви с сопротивлением R_i; Δ_i — контурный или узловой определитель этой подсхемы; X^i — составляющая (с верхним индексом) искомой переменной X (напряжения, тока) в подсхеме, полученной при размыкании элементарной ветви с сопротивлением R_i; Δ^i — контурный или узловой определитель этой подсхемы.

Отметим, что в формулах (1) и (2) определители Δ_i и Δ^i — либо оба контурные, либо оба узловые.

Симметрия формулы хорошо видна при следующей записи формулы (1):

$$\Delta_i X + R_i \Delta^i X = \Delta_i X_i + R_i \Delta^i X^i.$$

Эта формула представляет собой разложение искомой переменной X по двум слагаемым определителя (узлового или контурного). В левой части равенства каждое слагаемое определителя умножается на переменную X (ток или напряжение) исходной схемы. В правой части равенства те же самые слагаемые определителя умножаются на соответствующие составляющие искомой переменной X_i и X^i в упрощенных подсхемах. Нижний и верхний индексы соответствуют индексам определителей.

Частные случаи обобщенной формулы метода эквивалентного генератора. Покажем, что формулы теоремы Гельмгольца–Тевенена (в методе эквивалентного генератора) являются частными случаями обобщенной симметричной формулы (1):

1. Пусть требуется найти напряжение именно на том сопротивлении $R=R_i$, элементарную ветвь которого будем замыкать и размыкать. Тогда $X_i = U_i = 0$ (при КЗ элементарной ветви с R_i) и $X^i = U^i = U_{\text{х.х}}$ (при размыкании элементарной ветви с сопротивлением R_i). Формула (1) для напряжения ($X=U$) имеет вид:

$$U = \frac{0 + R_i \Delta^i U_{\text{х.х}}}{\Delta_i + R_i \Delta^i}. \qquad (1а)$$

Учитывая, что входное сопротивление $R_{\text{вх}}$ подсхемы относительно разомкнутой ветви с сопротивлением R_i равно $R_{\text{вх}} = \Delta_i / \Delta^i$, формула (1а) принимает вид расчетной формулы Тевенена [10] при размыкании ветви с сопротивлением R_i:

$$U = \frac{R_i U_{\text{х.х}}}{R_{\text{вх}} + R_i}.$$

2. Пусть требуется найти ток именно в ветви с сопротивлением $R=R_i$, которую будем замыкать и размыкать. Тогда $X_i = I_i = I_{\text{КЗ}}$ (при КЗ ветви с R_i) и $X^i = I^i = 0$ (при размыкании ветви с R_i). Формула (1) для тока ($X=I$) имеет вид:

$$I = \frac{\Delta_i I_{\text{КЗ}} + 0}{\Delta_i + R_i \Delta^i}. \qquad (1б)$$

Учитывая, что $R_{\text{вх}} = \Delta_i / \Delta^i$, формула принимает вид расчетной формулы Нортона [10] при замыкании ветви с R_i:

$$I = \frac{R_{\text{вх}} I_{\text{КЗ}}}{R_{\text{вх}} + R_i}.$$

Таким образом, формула (1) является обобщенной формулой метода эквивалентного генератора и является общей, так как по одной этой формуле находятся и токи, и напряжения.

Метод предельных состояний. Формулу (1) можно применять последовательно для двух и более элементарных ветвей с сопротивлением Z (в общем случае для m сопротивлений из всего числа n сопротивлений схемы) [11–14]. Приведем две формы записи общей симметричной формулы разложения переменной по слагаемым определителя.

Первая форма записи с сопротивлениями Z и определителями упрощенных подсхем, которые либо все контурные, либо все узловые, имеет вид:

$$\left(\Delta_{12\ldots m} + \sum_{i}^{m} Z_i \Delta^i + \sum_{i,j}^{m} Z_i Z_j \Delta^{ij} + \ldots + Z_1 Z_2 \ldots Z_m \Delta^{12\ldots m}\right) X =$$

$$= \Delta_{12\ldots m} X_{12\ldots m} + \sum_{i}^{m} Z_i \Delta^i X^i + \sum_{i,j}^{m} Z_i Z_j \Delta^{ij} X^{ij} + \ldots$$

$$+ Z_1 Z_2 \ldots Z_m \Delta^{12\ldots m} X^{12\ldots m}. \qquad (3)$$

В этой формуле для простоты записи у всех составляющих X^i, X^{ij}, ..., $X^{12\ldots m}$, а также у определителей Δ^i, Δ^{ij},..., $\Delta^{12\ldots m}$ оставлены только верхние индексы.

Вторая форма записи с проводимостями Y и определителями подсхем, которые либо все узловые, либо все контурные, имеет вид:

$$\left(\Delta^{12\ldots m} + \sum_{i}^{m} Y_i \Delta_i + \sum_{i,j}^{m} Y_i Y_j \Delta_{ij} + \ldots + Y_1 Y_2 \ldots Y_m \Delta_{12\ldots m}\right) X =$$

$$= \Delta^{12\ldots m} X^{12\ldots m} + \sum_{i}^{m} Y_i \Delta_i X_i + \sum_{i,j}^{m} Y_i Y_j \Delta_{ij} X_{ij} + \ldots$$

$$+ Y_1 Y_2 \ldots Y_m \Delta_{12\ldots m} X_{12\ldots m}. \qquad (4)$$

В этой формуле для простоты записи у всех составляющих X_i, X_{ij},..., $X_{12\ldots m}$, а также у определителей Δ_i, Δ_{ij},..., $\Delta_{12\ldots m}$ оставлены только нижние индексы.

В предельном случае ($m = n$) размыкаются и замыкаются все элементарные ветви с сопротивлениями Z (проводимостями Y) электрической цепи.

Формулы метода предельных состояний с контурными определителями. Если число контуров равно единице ($k = 1$), то в формуле (3) остаются только те слагаемые, определители которых Δ^i равны единице ($\Delta^i = 1$):

$$\left(\sum_{i}^{n} Z_i\right) X = \sum_{i}^{n} Z_i X^i. \qquad (5)$$

Остальные слагаемые в формуле (3) равны нулю из-за отсутствия (равенства нулю) остальных, кроме Δ^i, определителей. Здесь контурный определитель $\sum_{i}^{n} Z_i = \Delta^{(k)}$ – сумма сопротивлений, индексы которых образуют сочетания из числа элементов n по одному ($k = 1$) за исключением тех сопротивлений, при размыкании элементарных ветвей которых образуются изолированные узлы: в определителе остается сумма сопротивлений контура.

Если число контуров равно двум ($k = 2$), то в формуле (3) остаются только слагаемые, определители которых Δ^{ij} равны единице ($\Delta^{ij} = 1$):

$$\left(\sum_{i,j}^{n} Z_i Z_j\right) X = \sum_{i,j}^{n} Z_i Z_j X^{ij}. \qquad (6)$$

Остальные слагаемые в формуле (3) равны нулю из-за отсутствия остальных, кроме Δ^{ij}, определителей. Здесь контурный определитель $\sum_{i,j}^{n} Z_i Z_j = \Delta^{(k)}$ – сумма произведений сопротивлений, индексы которых образуют сочетания из числа элементов n по два ($k = 2$) за исключением произведений тех сопротивлений, при размыкании элементарных ветвей которых образуются изолированные узлы или подсхемы.

Если число контуров равно трем ($k = 3$), то в формуле (3) остаются только слагаемые, определители которых Δ^{ijk} равны единице ($\Delta^{ijk} = 1$):

$$\left(\sum_{i,j,k}^{n} Z_i Z_j Z_k\right) X = \sum_{i,j,k}^{n} Z_i Z_j Z_k X^{ijk} \qquad (7)$$

и т.д.

При размыкании одних элементарных ветвей с сопротивлениями все остальные элементарные ветви с сопротивлениями замыкаются. Если при этом образуются изолированные узлы или подсхемы (при размыкании одних ветвей), то образуются и короткозамкнутые контуры (при КЗ остальных ветвей). В левых частях формул (5)–(7) каждое слагаемое контурного определителя умножается на искомую переменную X (ток, напряжение). В правых частях формул каждое слагаемое контурного определителя умножается на составляющую искомой переменной в соединениях одних источников.

Формулы метода предельных состояний с узловыми определителями. Если число размеченных узлов равно двум ($y - 1 = 1$), то в формуле (4) остаются только те слагаемые, определители которых Δ_i равны единице:

$$\left(\sum_{i}^{n} Y_i\right) X = \sum_{i}^{n} Y_i X_i. \qquad (8)$$

Остальные слагаемые в формуле (4) равны нулю из-за отсутствия остальных, кроме Δ_i, определителей. Здесь узловой определитель $\sum_{i}^{n} Y_i = \Delta^{(y)}$ – сумма проводимостей, индексы которых образуют сочетания из числа элементов n по одному ($y - 1 = 1$) за исключением тех проводимостей, при КЗ элементарных ветвей которых образуются короткозамкнутые контуры: в определителе остается сумма проводимостей между двумя размеченными узлами.

Если число размеченных узлов равно трем ($y - 1 = 2$), то в формуле (4) остаются только те слагаемые, определители которых Δ_{ij} равны единице:

$$\left(\sum_{i,j}^{n} Y_i Y_j\right) X = \sum_{i,j}^{n} Y_i Y_j X_{ij}. \qquad (9)$$

Остальные слагаемые в формуле (4) равны нулю из-за отсутствия остальных, кроме Δ_{ij}, определителей. Здесь узловой определитель $\sum_{i,j}^{n} Y_i Y_j = \Delta^{(y)}$ – сумма произведений проводимостей, индексы которых образуют сочетания из числа элементов n по два ($y - 1 = 2$) за исключением произведений тех проводимостей, при КЗ элементарных ветвей которых образуются короткозамкнутые контуры и т.д.

При КЗ одних элементарных ветвей с проводимостями все остальные элементарные ветви с проводимостями размыкаются. Если при этом образуются короткозамкнутые контуры (при КЗ одних ветвей), то образуются и изолированные узлы или подсхемы (при размыкании остальных ветвей).

В левых частях формул (8) и (9) каждое слагаемое узлового определителя умножается на искомую переменную X. В правых частях формул каждое слагаемое узлового определителя умножается на составляющую искомой переменной в соединениях одних источников.

Таким образом, последовательное применение обобщенной формулы метода эквивалентного генератора в пределе (при размыкании и КЗ всех элементарных ветвей) преобразует исходную схему в соединения одних источников: получение решения для искомой переменной по соединениям одних источников названо методом предельных состояний [11–14].

Для применения этого метода необходимо сформулировать правила записи знаменателя и числителя искомой переменной.

В методе предельных состояний введено понятие размеченные узлы:

размеченные узлы y — это полюсы (выводы) сопротивлений; каждый полюс отмечается на схеме узлом при всех источниках, равных нулю;

контуры k связаны с числом сопротивлений (проводимостей) n и числом размеченных узлов равенством: $k = n - y + 1$.

Сформулируем правила, с помощью которых будем записывать знаменатель (контурный или узловой определитель) искомой переменной X (напряжения, тока) в символьной форме без составления систем уравнений.

Правила записи знаменателя в методе предельных состояний. *Правило 1.* Для нахождения напряжения в исходной схеме все источники тока J преобразуются в эквивалентные источники напряжения E по правилу преобразования источников; для нахождения тока в исходной схеме все источники напряжения E преобразуются в эквивалентные источники тока J по правилу преобразования источников.

Правило 2. Если число контуров $k \le y - 1$, то все элементы на схеме обозначаются как сопротивления и записывается контурный определитель; если число контуров $k \ge y - 1$, то все элементы на схеме обозначаются как проводимости и записывается узловой определитель.

Правило 3. Для записи контурного определителя в схеме с размеченными узлами записывается сумма произведений сопротивлений (сумма сопротивлений), индексы которых образуют сочетания из числа элементов по числу контуров. Из этой суммы исключаются те произведения сопротивлений (сопротивления), при размыкании элементарных ветвей которых образуются изолированные узлы или изолированные подсхемы (при КЗ остальных элементарных ветвей схемы появляются короткозамкнутые контуры).

Правило 4. Для записи узлового определителя в схеме с размеченными узлами записывается сумма произведений проводимостей (сумма проводимостей), индексы которых образуют сочетания из числа элементов по числу узлов минус единица. Из этой суммы исключаются те произведения проводимостей (проводимости), при КЗ элементарных ветвей которых образуются короткозамкнутые контуры (при размыкании остальных элементарных ветвей схемы появляются изолированные узлы или изолированные подсхемы).

Пример 1. Требуется записать контурный и узловой определители для электрической цепи (рис. 1).

Решение. Электрическая цепь имеет два контура и пять сопротивлений. Размечаем узлы — полюсы элементов. Число узлов $y = 4$, число элементов $n = 5$, число контуров $k = n - y + 1 = 2$. Так как $k < y - 1$ – 1, то по правилу 2 все элементы на схеме обозначаем как сопротивления и записываем контурный определитель. По правилу 3 записываем сумму произведений сопротивлений, индексы которых образуют сочетания из числа элементов ($n = 5$) по числу контуров ($k = 2$):

$$R_1R_2 + R_1R_3 + R_1R_4 + R_1R_5 + R_2R_3 + R_2R_4 + R_2R_5 + {} + R_3R_4 + R_3R_5 + R_4R_5.$$

Из этой суммы исключаем те произведения сопротивлений, при размыкании элементарных ветвей которых образуются изолированные узлы, и при КЗ остальных элементарных ветвей схемы появляются короткозамкнутые контуры. Этими произведениями сопротивлений являются R_1R_4 и R_2R_5. Обозначим нулевые слагаемые: $R_1R_4 = 0_{14}$ и $R_2R_5 = 0_{25}$. При размыкании элементарных ветвей с сопротивлениями R_1 и R_4 и КЗ остальных элементарных ветвей с сопротивлениями R_2, R_3 и R_5 образуется изолированный левый верхний узел и короткозамкнутый правый контур. При размыкании элементарных ветвей с сопротивлениями R_2 и R_5 и КЗ остальных элементарных ветвей с сопротивлениями R_1, R_3 и R_4 образуется изолированный

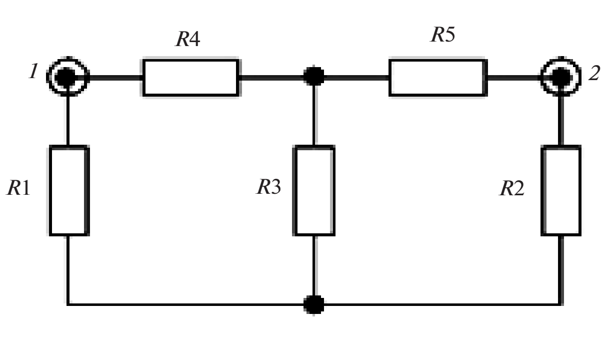

Рис. 1

правый верхний узел и короткозамкнутый левый контур.

Контурный определитель с этими нулевыми слагаемыми:

$$\Delta^{(\text{к})} = R_1R_2 + R_1R_3 + 0_{14} + R_1R_5 + R_2R_3 + R_2R_4 + 0_{25} + R_3R_4 + R_3R_5 + R_4R_5.$$

Для сравнения запишем по правилу 4 узловой определитель как сумму произведений проводимостей, индексы которых образуют сочетания из числа элементов ($n=5$) по числу узлов минус единица ($y-1=3$):

$$G_1G_2G_3 + G_1G_2G_4 + G_1G_2G_5 + G_1G_3G_4 + G_1G_3G_5 + G_1G_4G_5 + G_2G_3G_4 + G_2G_3G_5 + G_2G_4G_5 + G_3G_4G_5.$$

Из этой суммы исключаем те произведения проводимостей, при КЗ элементарных ветвей которых образуются короткозамкнутые контуры, и при размыкании остальных элементарных ветвей схемы появляются изолированные узлы. Этими произведениями являются: $G_1G_3G_4 = 0_{134}$ и $G_2G_3G_5 = 0_{235}$. При КЗ элементарных ветвей с проводимостями G_1, G_3 и G_4 и при размыкании остальных элементарных ветвей с проводимостями G_2 и G_5 образуется короткозамкнутый левый контур и появляется верхний правый изолированный узел. При КЗ элементарных ветвей с проводимостями G_2, G_3 и G_5 и при размыкании остальных элементарных ветвей с проводимостями G_1 и G_4 образуется короткозамкнутый правый контур и появляется верхний левый изолированный узел. Узловой определитель без нулевых слагаемых:

$$\Delta^{(\text{у})} = G_1G_2G_3 + G_1G_2G_4 + G_1G_2G_5 + G_1G_3G_5 + G_1G_4G_5 + G_2G_3G_4 + G_2G_4G_5 + G_3G_4G_5.$$

Из рассмотренного примера видно, что контурный определитель содержит произведения сопротивлений по два сомножителя, а узловой определитель содержит произведения проводимостей по три сомножителя. Применение второго правила (сравнивая k и $y-1$) позволяет еще до записи определителя минимизировать число элементов, входящих в произведения.

На основании полученных формул сформулируем правила, с помощью которых будем записывать числитель искомой переменной X (напряжения, тока) в символьной форме без составления систем уравнений.

Правила записи числителя в методе предельных состояний. *Правило 5* при контурном определителе в знаменателе. В числителе записываются все слагаемые знаменателя; размыкаются элементарные ветви с сопротивлениями слагаемого числителя, остальные элементарные ветви схемы замыкаются; в оставшемся E-соединении (J-соединении) находится составляющая искомого напряжения (тока), которая записывается множителем при этом слагаемом определителя. Аналогично находятся множители каждого слагаемого числителя.

Правило 6 при узловом определителе в знаменателе. В числителе записываются все слагаемые знаменателя; замыкаются элементарные ветви с проводимостями слагаемого числителя, остальные элементарные ветви схемы размыкаются; в оставшемся E-соединении (J-соединении) находится составляющая искомого напряжения (тока), которая записывается множителем при этом слагаемом определителя. Аналогично находятся множители для каждого слагаемого числителя.

Пример 2. Исходная схема содержит четыре сопротивления (проводимости) и два источника E_5 и E_6 (рис. 2,*а*). Требуется определить в символьной форме напряжение U двумя методами: методом предельных состояний и методом узловых напряжений (потенциалов).

Решение по методу предельных состояний. Размечаем узлы — полюсы проводимостей при источниках, равных нулю (рис. 2,*б*). Число узлов $y=2$, число проводимостей $n=4$, число контуров $k=3$. Проверяем равенство $y-1+k=n$. Так как $k>y-1$, то по правилу 2 все элементы на схеме обозначаем проводимостями и записываем узловой определитель по правилу 4 при $y-1=1$:

$$\Delta^{(\text{у})} = G_1 + G_2 + G_3 + G_4.$$

По правилу 6 записываем числитель искомого напряжения по четырем E-соединениям:

$$G_1U_1 + G_2U_2 + G_3U_3 + G_4U_4 = G_1(-E_5) + G_2 0 + G_3E_6 + G_4(-E_5 + E_6).$$

На рис. 3 в качестве примера приведены два E-соединения для записи последних двух слагаемых числителя: на рис. 3,*а* — при КЗ элементарной ветви с проводимостью G_3 и размыкании остальных элементарных ветвей, на рис. 3,*б* — при КЗ элементарной ветви с проводимостью G_4 и размыкании остальных элементарных ветвей. Искомое напряжение:

$$U = \frac{G_1(-E_5) + G_3E_6 + G_4(-E_5 + E_6)}{G_1 + G_2 + G_3 + G_4}.$$

Любое другое напряжение находится по тем же четырем E-соединениям. Запишем, например, выражение для напряжения на проводимости G_3:

$$U_{G3} = \frac{G_1(E_5 + E_6) + G_2E_6 + G_3 0 + G_4E_5}{G_1 + G_2 + G_3 + G_4}.$$

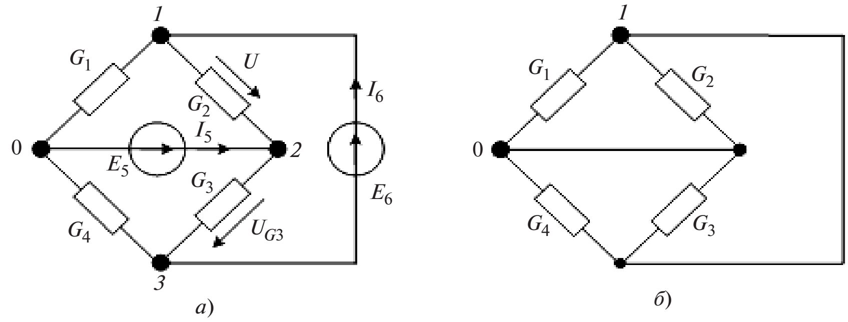

Рис. 2

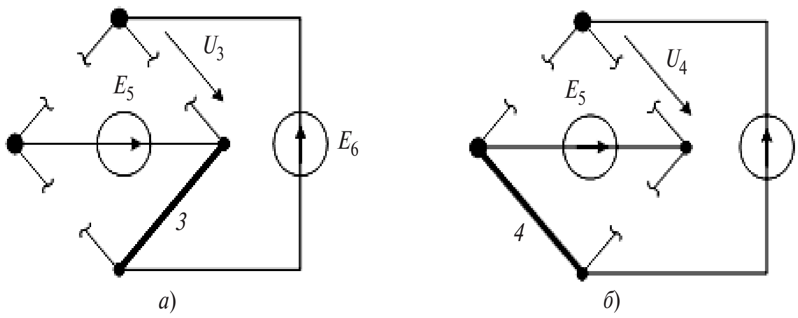

Рис. 3

Полученные ответы легко проверяются: сумма найденных напряжений U и U_{G3} должна быть равна источнику E_6. Суммируя, получим: $U+U_{G3}=E_6$.

Одним из основных методов в теоретической электротехнике считается метод узловых напряжений (потенциалов). Поэтому для сравнения с методом предельных состояний выбран именно этот метод.

Решение по методу узловых напряжений (потенциалов). Приведенная на рис. 2,*а* схема содержит две ветви без сопротивлений с источниками ЭДС E_5 и E_6. При таких ветвях узловые уравнения расширяют введением дополнительных переменных — токов этих вырожденных ветвей [7, 9]. В нашем примере дополнительными переменными являются токи I_5 и I_6. Направления этих токов выбирают по направлению источников E_5 и E_6 (рис. 2,*а*). Число узлов $У$ по методу узловых напряжений $У=4$ (как и при составлении уравнений Кирхгофа) отличается от числа размеченных узлов ($y=2$) в методе предельных состояний. Запишем расширенные узловые уравнения:

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} \;\;1 & \qquad\quad 2 & \qquad\quad 3 & \qquad I_5 & \;\; I_6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} G_1+G_2 & -G_2 & 0 & 0 & -1 \\ -G_2 & G_2+G_3 & -G_3 & -1 & 0 \\ 0 & -G_3 & G_3+G_4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ E_5 \\ E_6 \end{pmatrix} \end{array}$$

Первые три уравнения представляют собой первый закон Кирхгофа для трех узлов. Запишем только первое уравнение: $(G_1+G_2)\varphi_1-G_2\varphi_2-I_6=0$. Раскрывая скобки и группируя слагаемые, получаем уравнение первого закона Кирхгофа для узла *1*:

$$G_1\varphi_1+G_2(\varphi_1-\varphi_2)-I_6=0.$$

Второе и третье уравнения есть первый закон Кирхгофа для узлов *2* и *3* соответственно. Четвертое и пятое уравнения есть разности потенциалов на источниках: $\varphi_2-\varphi_0=E_5$ $(\varphi_0=0)$ и $\varphi_1-\varphi_3=E_6$. Искомые напряжения могут быть получены как разности потенциалов: $U=\varphi_1-\varphi_2$, $U_{G3}=\varphi_2-\varphi_3$.

Пример 3. На рис. 4,*а* приведена электрическая цепь с источниками ЭДС и тока. Требуется получить в символьной форме напряжения на двух источниках тока U_{J1} и U_{J2} двумя методами: методом предельных состояний и методом узловых напряжений (потенциалов).

Решение по методу предельных состояний. Размечаем узлы — полюсы проводимостей при источниках, равных нулю. Число узлов $y=4$, число проводимостей $n=6$, число контуров $k=3$. Проверяем равенство $y-1+k=n$. Для нахождения напряжения по правилу 1 преобразуем источники тока в эквивалентные источники напряжения по правилу преобразования источников. Эта схема представлена на рис. 4,*б*. Так как $k=y-1$, то есть выбор: записать решение с контурным определителем или с узловым определителем. Выбираем узловой определитель, так как вторым способом будем составлять узловые уравнения.

По правилу 2 все элементы на схеме обозначаем как проводимости и записываем узловой определитель по правилу 4 при $y-1=3$:

$$\Delta^{(у)}=G_1G_2G_3+G_1G_2G_4+G_1G_2G_5+0_{126}+0_{134}+$$
$$+G_1G_3G_5+0_{136}+G_1G_4G_5+0_{146}+0_{156}+0_{234}+$$
$$+G_2G_3G_5+G_2G_3G_6+G_2G_4G_5+G_2G_4G_6+$$
$$+G_2G_5G_6+0_{345}+0_{346}+G_3G_5G_6+G_4G_5G_6.$$

Из суммы произведений проводимостей исключены нулевые слагаемые, содержащие произведения проводимостей G_1G_6 и G_3G_4. Короткое замыкание этих элементарных ветвей образует короткозамкнутые контуры. По правилу 6 получим числители напряжений. Составляющие искомых напряжений находятся по E-соединениям.

На рис. 5 приведены два E-соединения:

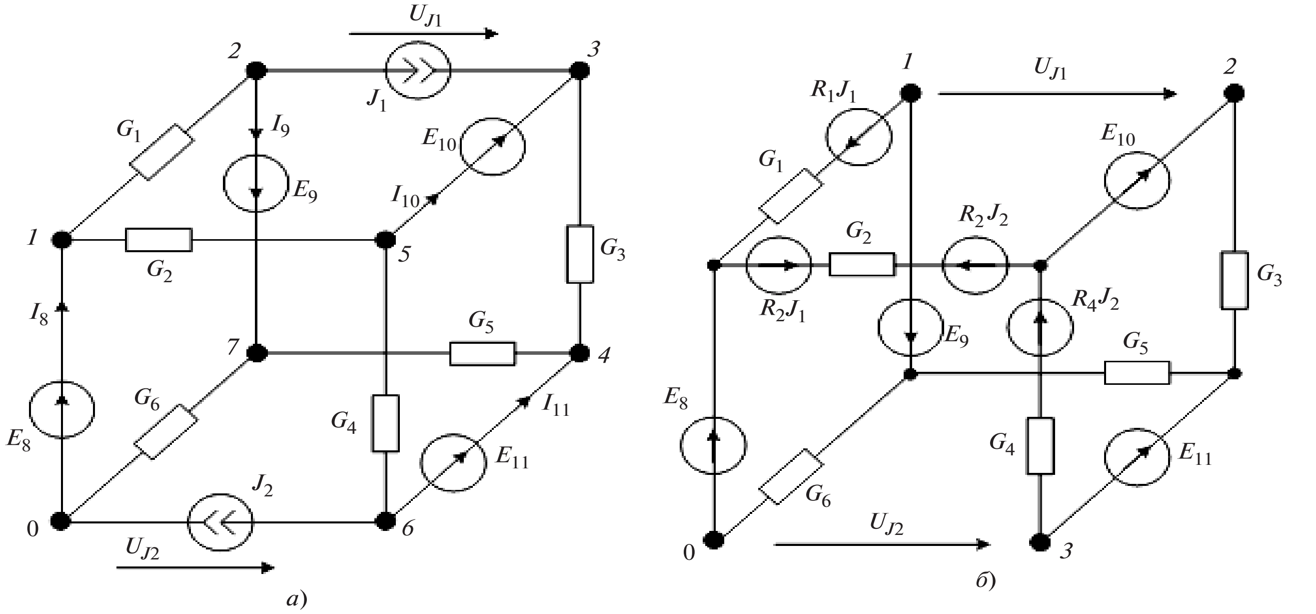

Рис. 4

при КЗ элементарных ветвей с проводимостями G_1, G_4, G_5 и размыкании остальных элементарных ветвей (рис. 5,*а*);

при КЗ элементарных ветвей с проводимостями G_2, G_3, G_6 и размыкании остальных элементарных ветвей (рис. 5,*б*).

Для простоты записи слагаемые сгруппированы по проводимостям G_1 и G_2, G_3 и G_5, G_4 и G_5, G_2 и G_6, т.е., именно по тем проводимостям через КЗ элементарных ветвей которых обеспечивается путь для алгебраического суммирования источников в *E*-соединениях (пунктирные линии на рис. 5). Искомое напряжение U_{J1} на первом источнике тока J_1 равно:

$$U_{J1}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} G_1G_2(G_3+G_4+G_5)(-R_1J_1-R_2J_1+ \\ +R_2J_2-E_{10})+G_3G_5(G_1+G_2+G_6)\times \\ \times(-E_9)+G_4G_5(G_1+G_2+G_6)(-E_{10}- \\ -R_4J_2+E_{11}-E_9)+G_2G_6(G_3+G_4+ \\ +G_5)(-E_{10}+R_2J_2-R_2J_1-E_8-E_9) \end{bmatrix} \quad (10)$$

Составляющие искомого напряжения U_{J1} (в (10) – алгебраические суммы источников в круглых скобках) найдены по *E*-соединениям.

По тем же *E*-соединениям находится ответ для любого напряжения. Искомое напряжение на втором источнике тока J_2 равно:

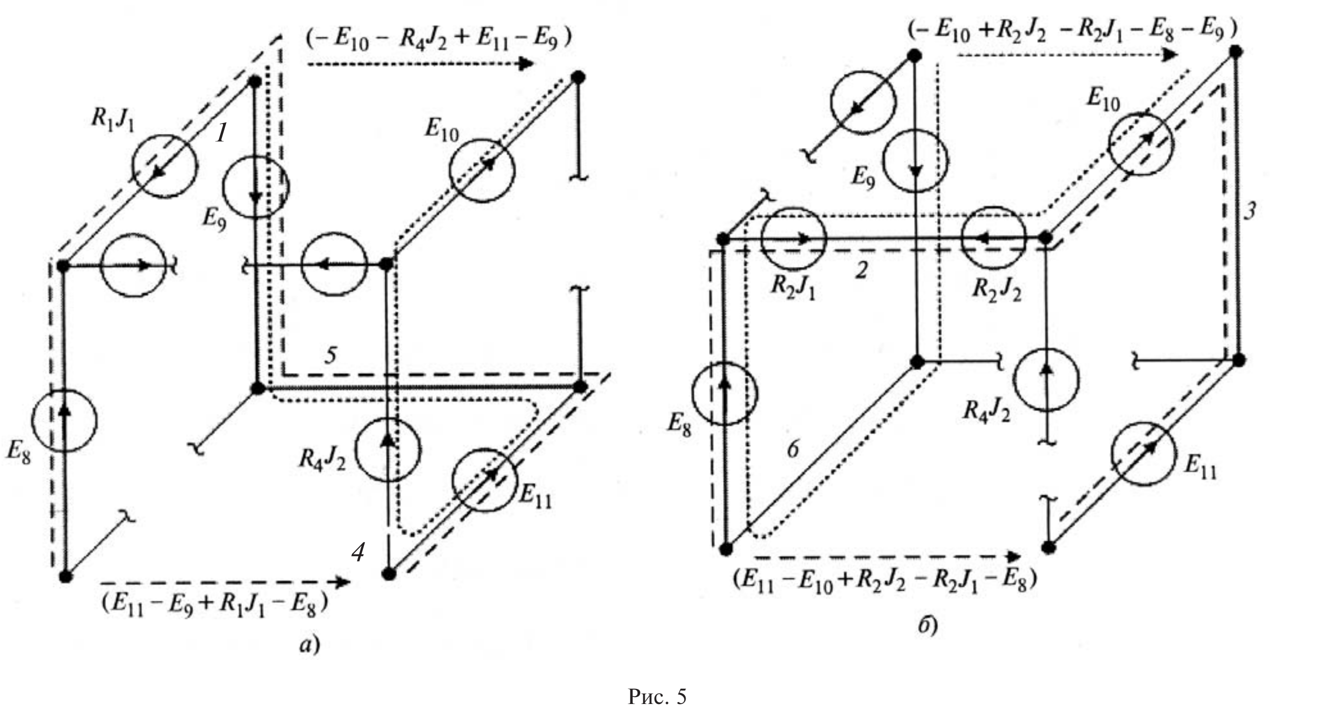

Рис. 5

$$U_{J2}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} G_2G_3(G_1+G_5+G_6)(E_{11}-E_{10}+R_2J_2- \\ -R_2J_1-E_8)+G_2G_4(G_1+G_5+G_6)(R_4J_2+ \\ +R_2J_2-R_2J_1-E_8)+G_1G_5(G_2+G_3+ \\ +G_4)(E_{11}-E_9+R_1J_1-E_8)+G_5G_6(G_2+ \\ +G_3+G_4)E_{11} \end{bmatrix}$$

Решение методом узловых напряжений (потенциалов). Приведенная на рис. 4,*а* схема содержит четыре ветви без сопротивлений с источниками ЭДС E_8, E_9, E_{10} и E_{11}. Дополнительные переменные – токи I_8, I_9, I_{10} и I_{11}. Направления этих токов выбраны по направлению источников. Число узлов *У* по методу узловых напряжений *У* = 8 отличается от числа размеченных узлов (*у* = 4), определенного методом предельных состояний. Расширенные узловые уравнения в матричной форме записи:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & I_8 & I_9 & I_{10} & I_{11} \end{array} \\ \begin{pmatrix} G_1+G_2 & -G_1 & 0 & 0 & -G_2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -G_1 & G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & -G_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -G_3 & G_3+G_5 & 0 & 0 & -G_5 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -G_2 & 0 & 0 & 0 & G_2+G_4 & -G_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -G_4 & G_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -G_5 & 0 & 0 & G_5+G_6 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \\ \varphi_7 \\ I_8 \\ I_9 \\ I_{10} \\ I_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -J_1 \\ J_1 \\ 0 \\ 0 \\ -J_2 \\ 0 \\ E_8 \\ E_9 \\ E_{10} \\ E_{11} \end{pmatrix}$$

Для нахождения искомых напряжений U_{J1} и U_{J2} необходимо разрешить эту систему уравнений относительно потенциалов φ_2, φ_3 и φ_6, после чего найти искомые напряжения:

$$U_{J1}=\varphi_2-\varphi_3 \text{ и } U_{J2}=\varphi_0-\varphi_6=-\varphi_6.$$

Выводы. 1. Для расчета линейной электрической цепи с любым числом узлов и контуров предложена обобщенная формула метода эквивалентного генератора, которая:

обобщает метод эквивалентного генератора; обобщение состоит в том, что для нахождения тока (напряжения) на каком-либо участке электрической цепи можно размыкать и замыкать элементарные ветви с любыми сопротивлениями (проводимостями) электрической цепи;

является общей как для нахождения напряжения, так и для нахождения тока на любом участке электрической цепи;

обладает симметрией; ее симметрия проявляется как в равенстве числа слагаемых в числителе и знаменателе формулы, так и в сходстве этих слагаемых.

2. Размыкание и КЗ элементарных ветвей с сопротивлениями (проводимостями) в пределе (одни разомкнуты, остальные короткозамкнуты) приводит к преобразованию исходной схемы либо к соединениям только источников ЭДС (*E*-соединения), либо к соединениям только источников тока (*J*-соединения). Получение решения для искомой переменной по соединениям одних источников названо методом предельных состояний.

3. На основании формул метода предельных состояний сформулированы правила записи числителя и знаменателя искомой переменной (напряжения и тока).

4. Приведены примеры решения одних и тех же задач методом предельных состояний и методом расширенных узловых напряжений (потенциалов).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Feussner W.** Ueber Stromverzweigung in netzformigen Leitern. – Annalen der Physik, 1902, Bd 9, №13.

2. **Feussner W.** Zur Berechnung der Stromstarke in netzformigen Leitern. – Annalen der Physik, 1904, Bd 15, №12.

3. **Курганов С.А., Филаретов В.В.** Символьный анализ линейных электронных цепей на основе схемно-алгебраических формул выделения параметров многополюсников. – Электричество, 2003, № 6.

4. **Ерохов И.В.** О приближенном моделировании сложных электрических схем. – Тр. Международ. конф. КЛИН–2008. – Ульяновск: Изд-во УлГТУ, 2008.

5. **Кирхгоф Г.Р.** Избранные труды. – М.: Наука, 1988.

6. **Круг К.А.** Основы электротехники, т. 1. Физические основы электротехники. – М.; Л.: ГЭИ, 1946.

7. **Теоретические** основы электротехники, т. 1: Учебник для электротехнических вузов/Под ред. П.А. Ионкина. Изд. 2-е. – М.: Высшая школа, 1976.

8. **Авиационная** электротехника/Под ред. Ю.П. Доброленского. – М.: Изд-во ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 1987.

9. **Зевеке Г.В., Ионкин П.А., Нетушил А.В., Страхов С.В.** Основы теории цепей. – М.: Энергоиздат, 1989.

10. **Демирчян К.С., Нейман Л.Р., Коровкин Н.В., Чечурин В.Л.** Теоретические основы электротехники, т. 1. – М.; С-Петербург, 2006.

11. **Халютин С.П., Титов А.А.** Метод предельных состояний для нахождения напряжения и тока в линейной электрической цепи. – Тр. ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 2008, №3, т. 80.

12. **Халютин С.П., Титов А.А.** Метод предельных состояний для нахождения напряжения и тока в линейной электрической цепи. – Информационно-измерительные и управляющие системы, 2008, №11.

13. **Халютин С.П., Титов А.А.** Метод предельных состояний. Символьный анализ электрических цепей: Учебное пособие/Под ред. С.П. Халютина. – Изд-во ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского, 2009.

14. **Халютин С.П., Титов А.А.** О некоторых разделах теоретической электротехники: Монография. – М.: Изд. ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», 2010.

[09.02.10]

*Авторы: **Халютин Сергей Петрович** окончил факультет авиационного оборудования Рижского ВВАИУ им. Я. Алксниса в 1990 г. и механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова в 1993 г. В 2007 г. защитил докторскую диссертацию в ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского. Начальник кафедры электрооборудования и метрологии, профессор Военно-воздушной академии (ВВА) им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина.*

***Титов Александр Анатольевич** окончил факультет автоматики и вычислительной техники Московского энергетического института (МЭИ) в 1969 г. В 1978 г. защитил кандидатскую диссертацию «Исследование режимов работы параметрического генератора в качестве вторичного источника с учетом активного сопротивления в цепях питания» в МЭИ. Доцент ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина и доцент МЭИ.*

* * *