

## Расчет магнитного поля в нелинейных средах комплексным методом граничных элементов

АФАНАСЬЕВ А.А., АХМЕТЗЯНОВ Д.И.

Известный комплексный метод граничных элементов (КМГЭ), предложенный американскими учёными [1] в 80-х годах прошлого века, использовался для решения задач гидравлики, а также теории твёрдого тела. Основой метода является интегральная формула Коши, которая позволяет решать задачу Дирихле при известных граничных значениях только одного компонента комплексной потенциальной функции (КПФ) — скалярного потенциала. В статье показано, что данный метод может использоваться для решения двумерных задач электромеханики при известных граничных значениях этого компонента. Объектом расчёта являются магнитное поле и электромагнитный момент вентильного индукторного двигателя (ВИД) при изменении взаимного положения зубцов статора и ротора. Электромагнитный момент определяется методом натяжений. Расчёты проводятся в предположении ступенчатого распределения неизвестной КПФ на элементарных участках границы. Результаты расчетов сопоставляются с опытными данными, полученными при испытаниях макетного образца ВИД. Теоретические основы КМГЭ позволяют применить его и для решения задач, содержащих фрагменты нелинейных магнитных сред, для чего расчётная область разбивается на элементарные участки (ЭУ), в пределах которых магнитная проницаемость считается постоянной, а её скачки наблюдаются на границах ЭУ. Граничные условия для магнитного поля в счётных точках, являющихся общими для смежных ЭУ, дают возможность получить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), решением которых будут искомого комплексные потенциалы. Аналогичный способ определения СЛАУ для численного решения полевых задач был использован авторами статьи в численном методе сопряжения конформных отображений.

Ключевые слова: магнитное поле, нелинейная среда, расчет, формула Коши, комплексная потенциальная функция

Комплексный метод граничных элементов (КМГЭ), основанный на интегральной формуле Коши, является эффективным инструментом решения задач теории потенциала для линейных изотропных сред [1, 2]. Однако в большинстве технических задач среды с магнитными полями являются неоднородными, имеющими нелинейные и анизотропные элементы. Но и в этом случае при разбиении (дискретизации) расчётной области на элементарные участки с линейными свойствами можно использовать интегральную форму Коши, дополнив её граничными условиями магнитного поля для внутренних и внешних границ элементарных участков.

Авторы рассматриваемого метода решали на его основе задачи гидравлики, связанные с течением несжимаемой невязкой (идеальной) жидкости. Покажем, что концептуальные основы этого метода являются удобным инструментом и для решения задач электромеханики.

**Расчёт магнитного поля в воздушном зазоре вентильного индукторного двигателя.** В качестве объекта расчёта выберем вентильный индукторный двигатель (ВИД). Рассмотрим вначале технологию расчета магнитного поля (МП) средствами КМГЭ в

линейной среде — в воздушном зазоре ВИД (область 1 на рис. 1), предполагая, что магнитная проницаемость стальных участков равна бесконечности.

Границу  $\Gamma$  области воздушного зазора на комплексной плоскости  $z$  (рис. 1) разбиваем на элементы  $\Gamma_i$  ( $i=1,2,\dots,N$ ), которые в общем случае могут быть как прямолинейными, так и криволинейными. Искомую функцию комплексного потенциала  $w(z)$  для точек  $z=\xi$  границы  $\Gamma$

$$w(\xi) = v(\xi) + ju(\xi), \tag{1}$$

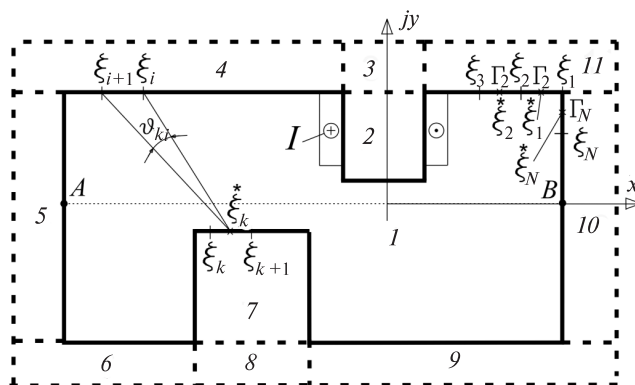


Рис. 1. Расчётная область ВИД



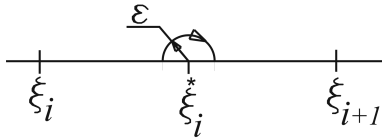


Рис. 2. К обоснованию формулы (10)

Это утверждение обосновывается тем, что несобственный интеграл

$$\int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \frac{d\xi}{(\xi - \xi_i)^2} \quad (11)$$

в (9) сходится в смысле главного значения [4].

Значение интеграла (11) при интегрировании на интервалах  $[\xi_i, (\xi_i - \varepsilon)]$  и  $[(\xi_i + \varepsilon), \xi_{i+1}]$  (рис. 2) равно

$$-\left( \frac{1}{\xi_{i+1} - \xi_i} - \frac{1}{\xi_i - \xi_i} - \frac{2}{\varepsilon} \right),$$

где  $\varepsilon > 0$ . При интегрировании по верхней полуокружности  $\xi - \xi_i$  радиусом  $\varepsilon$  с центром в точке  $\xi_i$  (рис. 2) получим

$$\int_0^\pi \frac{j d\theta}{\pi \varepsilon e^{j\theta}} = -\frac{2}{\varepsilon}.$$

Следовательно, интеграл (11), несмотря на разрыв подынтегральной функции, равен

$$\int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \frac{d\xi}{(\xi - \xi_i)^2} = -\left( \frac{1}{\xi_{i+1} - \xi_i} - \frac{1}{\xi_i - \xi_i} \right).$$

При известных значениях комплексной напряженности на границе  $\Gamma$  расчётной области можно легко рассчитать по (10) нормальную и тангенциальную составляющие напряженности магнитного поля ( $H_n, H_\tau$ ) на линии  $AB$  (рис. 1) этой области, проходящей через середину воздушного зазора:

$$H_n(z) = \text{Im}(H(z)); \quad H_\tau(z) = \text{Re}(H(z)). \quad (12)$$

Для магнитной индукции на этой расчётной линии справедливы выражения:

$$B_n(z) = \mu_0 H_n(z); \quad B_\tau(z) = \mu_0 H_\tau(z). \quad (13)$$

Зная индукцию и напряженность магнитного поля, а также размеры ВИД, можно определить электромагнитный момент по универсальной формуле, основанной на методе натяжений [5]:

$$M = \frac{\pi}{2} l D^2 (B_n H_\tau)_{\text{ср}}, \quad (14)$$

где  $l$  – расчетная длина ВИД;  $D$  – диаметр окружности, соответствующий расчётной линии  $AB$ .

**Результаты расчёта макетного образца ВИД.** Предлагаемым методом были рассчитаны магнитное поле и электромагнитный момент трехфазного ВИД обращённого исполнения ( $Z_1=6, Z_2=8$ ), имеющего следующие размеры активной зоны: вы-

сота и ширина зубцов статора 14 и 14 мм; зубцов ротора 9 и 16 мм; длина 16 мм; воздушный зазор 0,3 мм.

Вначале при заданном полном токе зубцовой катушки  $I = iw_k = 15 \cdot 5 = 75$  А и известных значениях скалярного магнитного потенциала в точках наблюдения границы  $\Gamma$  по (8) рассчитывались функции магнитного потока  $\bar{v}_i$  в этих точках.

Было выбрано число элементарных участков (ЭУ) и равное им число расчётных точек  $N = 210$ . Время расчета коэффициентов  $\alpha_{ki}, \beta_{ki}$  и неизвестных в (8) составило около 2 ч.

Затем использовались формулы (10), (12) и (13) для вычисления значений напряженности и индукции магнитного поля на расчётной линии  $AB$ . График нормальной составляющей магнитной индукции, полученный при численном расчёте, показан на рис. 3.

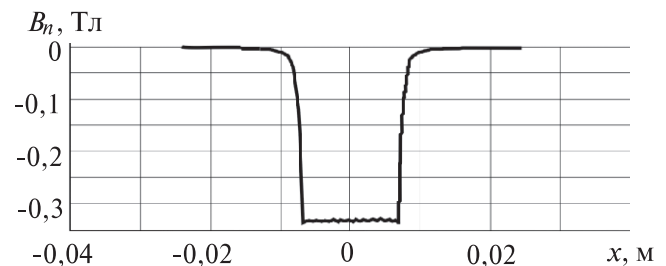
Все расчеты проводились с использованием пакета SciLab на персональном компьютере с конфигурацией Intel Core 2 Duo 2.8 GHz, RAM 2Gb. Для подтверждения правильности полевых расчетов необходимо сравнить полученное значение нормальной составляющей магнитной индукции на оси зубца статора в согласованном положении с очевидной аналитической её оценкой:

$$B_n \approx \frac{\mu_0 F}{\delta} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 75}{0,0003} = 0,31 \text{ Тл}, \quad (15)$$

где  $F = iw_k w_k = 15 \cdot 5 = 75$  А – МДС катушки;  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м – магнитная проницаемость воздуха;  $\delta = 0,0003$  м – длина воздушного зазора.

Из рис. 3 следует, что расчёт индукции рассматриваемым численным методом достаточно точен (для согласованного положения зубцов получили  $|B_n| = 0,33$  Тл) и трапецевидная форма кривой индукции на этом рисунке соответствует физике формирования магнитного поля для согласованного положения зубцов статора и ротора.

Для определения зависимости электромагнитного момента  $M$  от расстояния  $x$  (смещения геометрических осей зубцов статора и ротора) участок

Рис. 3. Распределение нормальной составляющей магнитной индукции на расчётной линии  $AB$  для согласованного положения зубцов

между согласованным и рассогласованным положением ВИД разделяется на 10 дискретных участков и для каждого дискретного положения ротора рассчитывается магнитное поле. Зависимость  $M = M(x)$ , полученная в результате расчёта, показана на рис. 4.

Момент, показанный на рис. 4, рассчитывался

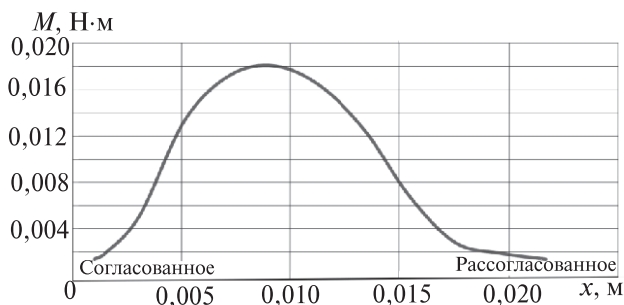


Рис. 4. Зависимость электромагнитного момента ВИД от значения сдвига ротора из согласованного положения

для одной пары зубцов ВИД, однако необходимо учитывать еще и момент, развиваемый диаметрально противоположной парой зубцов. Исходя из этого полный момент ВИД будет в 2 раза больше полученного расчётного значения. Отсюда максимальный электромагнитный момент ВИД по результатам моделирования составит

$$M_{\max} = 0,036 \text{ Н·м.}$$

Для подтверждения численных расчётов сравним полученное значение электромагнитного момента с максимальным моментом, развиваемым реальным ВИД.

**Результаты экспериментального измерения момента ВИД.** Для определения максимального момента ВИД на одну из его фаз подавался постоянный ток 15 А. На наружную поверхность обращённого ротора с известным диаметром ( $D = 0,118$  м) наматывалась нить, к которой подвешивался груз. Плавно увеличивая фиксируемую массу груза, отмечалось её значение, при котором произойдет опрокидывание ротора. Предельная масса груза  $m$  составила 0,075 кг. Максимальный момент ВИД

$$M_{\max} = gm \frac{D}{2} = 9,81 \cdot 0,075 \cdot \frac{0,118}{2} = 0,043 \text{ Н·м.}$$

Разница между расчётным и опытным значениями максимального электромагнитного момента составила 16,3%.

**Возможный круг задач электромеханики, решаемых КМГЭ.** Теоретическая база КМГЭ позволяет ему стать универсальным численным методом для решения двумерных нелинейных задач электромеханики. В рассмотренном выше расчёте магнитного поля ВИД среда внутренней области была ли-

нейной, так как не содержала ферромагнитных участков. В большинстве электромеханических задач в расчётной области присутствуют стальные (шихтованные или массивные) магнитопроводы. Корректный учёт нелинейных магнитных свойств (включая анизотропию) сердечников требует разбиения (дискретизации) их поперечных сечений на элементарные участки (ЭУ) с линейными свойствами (при наличии анизотропии участки подлежат соответствующей деформации [5]).

При дискретизированной расчётной области границы ЭУ в соответствии с КМГЭ разбиваются на совокупность отрезков, одинаковых для смежных границ соответствующих ЭУ. Счётным точкам (точкам наблюдения) на середине названных отрезков границ ЭУ будут соответствовать неизвестные значения комплексного потенциала  $w(\xi_j) = v(\xi_j) + ju(\xi_j)$ . Граничные условия для магнитного поля в счётных точках, являющихся общими для смежных ЭУ, позволяют получить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), решением которых будут искомые комплексные потенциалы.

Аналогичный способ нахождения СЛАУ для численного решения полевых задач был использован в [5].

**Выводы.** 1. Численный комплексный метод граничных элементов позволяет применительно к задачам электромеханики решать задачу Дирихле: при известной функции скалярного магнитного потенциала на границе расчётной области определить магнитное поле внутри этой области, включая и её границу.

2. Результаты численного расчёта этим методом макетного образца вентильного индукторного двигателя соответствуют с достаточно высокой точностью экспериментальным данным.

3. Концептуальные основы метода позволяют расширить круг решаемых задач: расчётная область может иметь нелинейную среду, представляемую в виде дискретной совокупности элементарных участков с линейными свойствами.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Громадка Т., Лей Ч. Комплексный метод граничных элементов в инженерных задачах. — М.: Мир, 1990, 304 с.
2. Bailey R.T., Hsieh C.K., Li H. Grid generation in two dimensions using the complex variable boundary element method. — Appl. Math. Modelling, 1995, vol. 19, June, pp. 322—332.
3. Иванов-Смоленский А.В., Абрамкин Ю.В. Применение конформного преобразования в электромагнитных расчётах электрических машин. Аналитические методы. — М.: Изд-во Московского энергетического института, 1980, 85 с.
4. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. — М.: Наука. 1980, 976 с.
5. Афанасьев А.А. Метод сопряжения конформных отображений в задачах электромеханики. — Чебоксары: Изд-во Чувашского университета, 2011, 390 с.

*Авторы: Афанасьев Александр Александрович окончил электромеханический факультет Московского энергетического института (МЭИ) в 1962 г. Докторскую диссертацию «Совместная работа синхронной машины со статическим преобразователем частоты (теория и приложения)» защитил в МЭИ в 1991 г. Профессор кафедры автоматики и управле-*

*ния в технических системах Чувашского государственного университета (Чебоксары).*

*Ахметзянов Динар Илнурович окончил Чувашский государственный университет в 2013 г. Аспирант по специальности «Электротехнические комплексы и системы» на кафедре «Электроснабжение промышленных предприятий».*

*Elektrichestvo (Electricity), 2016, No. 9, pp. 48–52.*

## Magnetic Field Calculation in Nonlinear Media Using the Complex Boundary Element Method

**AFANAS'YEV Aleksandr Aleksandrovich** (*Chuvash State University, Cheboksary, Russia*) – *Professor, Dr. Sci. (Eng.)*

**AKHMETZYANOV Dinar Ilnurovich** (*Chuvash State University, Cheboksary, Russia*) – *Ph. D. Student*

*The well-known complex boundary element method (CBEM) [1] proposed by US scientists in the 1980s was used for solving problems in the fields of hydraulics and the solid-state theory. The method is based on the Cauchy integral formula, using which the Dirichlet problem can be solved provided that the boundary values of only one component of a complex potential function (CPF), namely, a scalar potential, are known. It is shown in the article that this method can be used for solving 2D electromechanical problems provided that the boundary values of this component are known. It is of interest to calculate the magnetic field and electromagnetic torque of a converter-fed inductor motor (CFIM) in changing the mutual position of stator and rotor teeth. The electromagnetic torque is determined using the tension method. The calculations are carried out assuming that the unknown CPF has a step-wise distribution at the elementary parts of the boundary. The calculation results are compared with the experimental data obtained from the tests of a mockup CFIM sample. The theoretical principles of the CBEM make it possible to use this method also for solving problems relating to systems involving fragments of nonlinear magnetic media. To do so, the calculated area is decomposed into elementary parts (EPs) within which the magnetic permeability is considered constant, and its steplike changes are observed at the EP boundaries. The boundary conditions for the magnetic field at calculated points that are common for adjacent EPs make it possible to obtain a system of linear algebraic equations (LAES) the solution of which will be the sought complex potentials. A similar method for defining an LAES for numerically solving field problems was used by the authors of this article in a numerical conformal image conjugation method.*

*Key words: magnetic field, nonlinear medium, calculation, Cauchy formula, complex potential function*

### REFERENCES

1. **Gromadka T., Lei Ch.** *Kompleksnyi metod granichnykh elementov v inzhenernykh zadachakh* (The complex boundary element method in engineering problems). Moscow, Publ. «Mir», 1990, 304 p.
2. **Bailey R.T., Hsieh C.K. and Li H.** Grid generation in two dimensions using the complex variable boundary element method. — *Appl. Math. Modelling*, 1995, vol. 19, June, pp. 322–332.
3. **Ivanov-Smolenskii A.V., Abramkin Yu.V.** *Primeneniye konformnogo preobrazovaniya v elektromagnitnykh raschetakh elektricheskikh mashin. Analiticheskiye metody* (Application of conformal transformations in electromagnetic calculations of the electric machines. Analytical methods). Moscow, Publ. of the Moscow Power Engineering Institute, 1980, 85 p.
4. **Bronshhtein I.N., Semendiyayev K.A.** *Spravochnik po matematike* (Handbook of Mathematics). Moscow, Publ. «Nauka», 1980, 976 p.
5. **Afanas'yev A.A.** *Metod sopryazheniya konformnykh otobrazhenii v zadachakh elektromekhaniki* (The method of conformal mapping interface in electrical engineering problems). Cheboksary, Publ. of Chuvash University, 2011, 390 p.