

Объемная ячейка-многополюсник и пространственная схема замещения трехмерного электромагнитного поля

ИНКИН А.И., БЛАНК А.В.

В статье излагаются основные положения, позволяющие перейти от решетчатых схем замещения двумерных электромагнитных полей к более сложным объемным ячейкам-многополюсникам и пространственным схемам замещения трехмерных электромагнитных полей. В результате расчет трехмерного электромагнитного поля сводится к решению задачи анализа электрических цепей. Синтез ячеек-многополюсников трехмерных электромагнитных полей осуществляется на базе фундаментальных законов электромагнетизма и теории цепей и по существу является одним из разделов теоретической электротехники. Результаты тестовых расчетов пространственных схем замещения электромагнитных полей свидетельствуют о достаточно высокой точности разрабатываемого расчетного метода, что позволяет использовать пространственные схемы замещения для анализа и расчета сложных трехмерных электромагнитных полей.

Ключевые слова: трехмерное электромагнитное поле, пространственная схема замещения, расчет, электрические цепи, анализ

Одна из наиболее сложных и актуальных задач теоретической электротехники — прикладная задача о расчете электромагнитного поля электроустановок при заданных геометрии, физических свойствах элементов конструкции и распределении источников поля.

В отличие от электрических цепей, расчет которых при заданных конфигурации, источниках ЭДС и тока делается аналитически как решение системы алгебраических уравнений Кирхгофа, общих аналитических методов расчета полей в кусочно-однородных средах не существует. Это накладывает существенные ограничения на возможности использования физико-математических методов теории поля при решении прикладных задач.

С учетом того, что законы Кирхгофа являются частным проявлением общих законов электродинамики, представляется целесообразным использовать физически наглядное схемное описание полей, позволяющее расширить возможности аналитических методов исследования электромагнитных полей и параметров различных электротехнических устройств.

Примером такого сочетания методов теории поля и теории электрических цепей могут служить хорошо зарекомендовавшие себя в научных исследованиях и инженерной практике каскадные схемы замещения различных видов физических полей. Каскадные схемы формируются по слоистым моделям исследуемых объектов и состоят из типовых звеньев-четыреполюсников, параметры которых определены по результатам аналитических решений соответствующих уравнений теории электромагнитного поля.

В настоящей работе представлены общие положения и конкретные примеры формирования в малых объемах (Δx , Δy , Δz) типовых ячеек-многополюсников и синтеза эквивалентных схем замещения трехмерных электромагнитных полей.

люсников и синтеза эквивалентных схем замещения трехмерных электромагнитных полей.

Типовая А-Н-ячейка трехмерного синусоидально-го электромагнитного поля. В основе схемной аппроксимации трехмерных полей лежат векторные уравнения Лапласа–Пуассона–Гельмгольца, которые в декартовой системе координат распадаются на три скалярных уравнения независимых переменных x , y , z .

В частности, уравнение Гельмгольца для векторного магнитного потенциала $\vec{A}(x, y, z)$ распадается на скалярные уравнения:

$$\nabla^2 \dot{A}_x = j\omega\mu\gamma \dot{A}_x; \quad (1)$$

$$\nabla^2 \dot{A}_y = j\omega\mu\gamma \dot{A}_y; \quad (2)$$

$$\nabla^2 \dot{A}_z = j\omega\mu\gamma \dot{A}_z. \quad (3)$$

Если далее учесть, что на элементах поверхности малого объема (Δx , Δy , Δz) сохраняются неизменными составляющие потенциала

$$\dot{A}_x = \text{const}; \quad \dot{A}_y = \text{const}; \quad \dot{A}_z = \text{const},$$

то для внутренней области объема ΔV уравнения (1), (2) и (3) обращаются в двумерные, каждому из которых соответствует типовая ячейка-многополюсник и решетчатая схема замещения двумерного поля.

Ячейки-многополюсники и решетчатые схемы замещения двумерных полей описаны в [1–4]. В этих публикациях, в частности, показано, что в двумерных полях внутри малых прямоугольных ячеек $\Delta x \times \Delta y$ при линейном изменении определяющих компонент векторов поля уравнения Максвелла вырождаются в алгебраические уравнения,

включающие размеры ячейки ($\Delta x, \Delta y$), физические свойства среды (μ, ϵ, γ) и характеристики сторонних источников поля (J_{CT}, Q). Эти уравнения аналогичны уравнениям Кирхгофа для некоторой электрической цепи, которая по существу представляет собой схемное описание электромагнитного поля в прямоугольной окрестности ($\Delta x, \Delta y$) точки.

Ячейки-многополюсники для всех разновидностей двумерных полей формируются по одному общему алгоритму. Так, для ячейки на рис. 1,а двумерное поле $\dot{B}_x, \dot{B}_y, \dot{A}_z(x,y)$ описывается уравнениями:

$$\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} = \dot{\delta}_z = -j\omega\gamma \dot{A}_z; \quad (4)$$

$$\dot{B}_x = \mu \dot{H}_x = \frac{\partial \dot{A}_z}{\partial y}; \quad \dot{B}_y = \mu \dot{H}_y = \frac{\partial \dot{A}_z}{\partial x}. \quad (5)$$

При линейном изменении компонент векторов \dot{A} и \dot{H} дифференциальное уравнение (4) принимает вид:

$$\frac{\dot{H}_{2y} - \dot{H}_{1y}}{\Delta x} - \frac{\dot{H}_{4x} - \dot{H}_{3x}}{\Delta y} = \dot{\delta}_z = -j\omega\gamma \dot{A}_z \quad (6)$$

или

$$\dot{H}_{2y} \Delta y - \dot{H}_{1y} \Delta y - \dot{H}_{4x} \Delta x + \dot{H}_{3x} \Delta x = \dot{\delta}_z \Delta x \Delta y = \Delta \dot{I}_0; \quad (7)$$

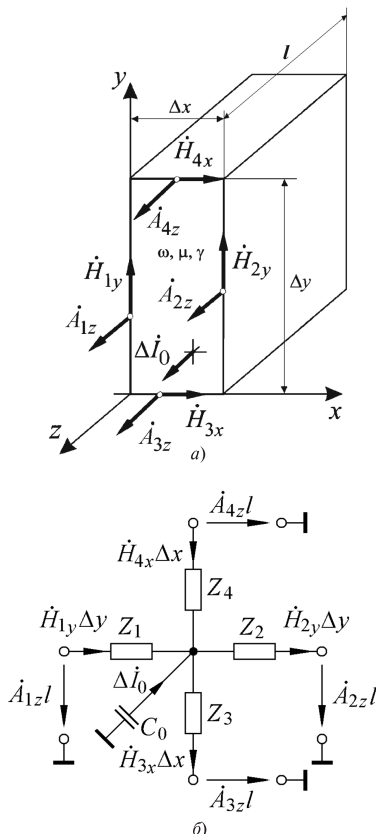


Рис. 1. Ячейка двумерного электромагнитного поля (а) и ее А-Н-схема замещения (б)

$$\dot{A}_{1z}l - \dot{A}_{2z}l = \Delta \dot{\Phi}_y = \mu \frac{\dot{H}_{1y} + \dot{H}_{2y}}{2} \Delta xl; \quad (8)$$

$$\dot{A}_{4z}l - \dot{A}_{3z}l = \Delta \dot{\Phi}_x = \mu \frac{\dot{H}_{3x} + \dot{H}_{4x}}{2} \Delta yl. \quad (9)$$

Уравнениям (7)–(9) соответствует А-Н-схема замещения ячейки (рис. 1,б) со следующими параметрами:

$$Z_1 = Z_2 = \mu l \frac{\Delta x}{2 \Delta y}; \quad (10)$$

$$Z_3 = Z_4 = \mu l \frac{\Delta y}{2 \Delta x}; \quad (11)$$

$$C_0 = \gamma \frac{\Delta x \Delta y}{l}. \quad (12)$$

Из представленной схемы также следует, что потоки $\Delta \dot{\Phi}_x$ и $\Delta \dot{\Phi}_y$, пронизывающие ячейку, определяются как суммарные напряжения на соответствующих сопротивлениях схемы.

При сборке решетчатой схемы замещения исследуемого поля в соответствии с принципом непрерывности электрически соединяются ветви соседних ячеек-многополюсников и обеспечиваются заданные условия на внешней границе расчетной области.

Таким образом, решетчатые схемы удовлетворяют требованиям теоремы единственности в решении задач теории поля и могут быть использованы в качестве составных компонентов пространственной схемы замещения трехмерного электромагнитного поля.

В трехмерном электромагнитном поле составляющие вектора индукции связаны с векторным потенциалом известными соотношениями:

$$\begin{aligned} \dot{B}_x &= \frac{\partial \dot{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{A}_y}{\partial z}; \\ \dot{B}_y &= \frac{\partial \dot{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{A}_z}{\partial x}; \\ \dot{B}_z &= \frac{\partial \dot{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{A}_x}{\partial y}. \end{aligned} \quad (13)$$

Ячейка трехмерного электромагнитного поля представляет собой параллелепипед со сторонами $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ (рис. 2). На гранях параллелепипеда обозначены касательные составляющие векторного потенциала.

При линейном изменении компонент векторов поля выражения (13) для средних значений индукции в трехмерной ячейке принимают вид:

$$\Delta \dot{\Phi}_x = \dot{B}_{xcp} \Delta y \Delta z = (\dot{A}_{4z} - \dot{A}_{3z}) \Delta z + (\dot{A}_{4y} - \dot{A}_{3y}) \Delta y; \quad (14)$$

$$\Delta \dot{\Phi}_y = \dot{B}_{ycp} \Delta x \Delta z = (\dot{A}_{1x} - \dot{A}_{2x}) \Delta x + (\dot{A}_{1z} - \dot{A}_{2z}) \Delta z; \quad (15)$$

$$\Delta \dot{\Phi}_z = \dot{B}_{zcp} \Delta x \Delta y = (\dot{A}_{3x} - \dot{A}_{4x}) \Delta x + (\dot{A}_{2y} - \dot{A}_{1y}) \Delta y. \quad (16)$$

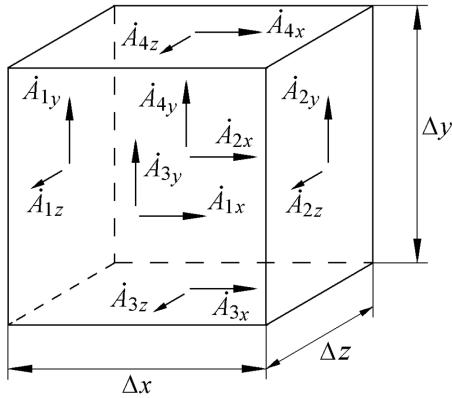


Рис. 2. Ячейка трехмерного электромагнитного поля

В пространственной схеме замещения ячейки трехмерного электромагнитного поля каждой составляющей векторного потенциала соответствует участок цепи, аналогичный схеме замещения ячейки двумерного поля. Поэтому синтез *A-H*-схемы замещения ячейки трехмерного электромагнитного поля проиллюстрируем на примере схемы для *z*-составляющей векторного потенциала.

Магнитные потоки в направлениях *y* и *x* в схеме \dot{A}_z определяются по средним значениям магнитных напряженностей на гранях трехмерной ячейки:

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\Phi}_y &= \mu \frac{\dot{H}_{1y} + \dot{H}_{2y}}{2} \Delta x \Delta z = \\ &= \dot{H}_{1y} \Delta y \frac{\mu \Delta z \Delta x}{2 \Delta y} + \dot{H}_{2y} \Delta y \frac{\mu \Delta z \Delta x}{2 \Delta y}; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\Phi}_x &= \mu \frac{\dot{H}_{3x} + \dot{H}_{4x}}{2} \Delta y \Delta z = \\ &= \dot{H}_{3x} \Delta x \frac{\mu \Delta z \Delta y}{2 \Delta x} + \dot{H}_{4x} \Delta x \frac{\mu \Delta z \Delta y}{2 \Delta x}. \end{aligned} \quad (18)$$

Сопоставляя (17) и (18) с выражениями (15) и (14), находим:

$$\begin{aligned} \dot{A}_{1z} \Delta z - \dot{A}_{2z} \Delta z + \dot{A}_{1x} \Delta x - \dot{A}_{2x} \Delta x = \\ = \dot{H}_{1y} \Delta y Z_{1z} + \dot{H}_{2y} \Delta y Z_{2z}; \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \dot{A}_{4z} \Delta z - \dot{A}_{3z} \Delta z + \dot{A}_{4y} \Delta y - \dot{A}_{3y} \Delta y = \\ = \dot{H}_{3x} \Delta x Z_{3z} + \dot{H}_{4x} \Delta x Z_{4z}, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$Z_{1z} = Z_{2z} = \mu \Delta z \frac{\Delta x}{2 \Delta y}; \quad (21)$$

$$Z_{3z} = Z_{4z} = \mu \Delta z \frac{\Delta y}{2 \Delta x}. \quad (22)$$

Выражения для сопротивлений (21) и (22) аналогичны (10) и (11) в *A-H*-схеме замещения ячейки

двумерного поля (см. рис. 1,б). Емкость конденсатора в схеме определяется по аналогии с (12):

$$C_{0z} = \gamma \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta z}. \quad (23)$$

Введем в схему \dot{A}_z источники ЭДС, управляемые напряжением:

$$E_{1z} = \frac{1}{2} (\dot{A}_{1x} \Delta x - \dot{A}_{2x} \Delta x); \quad (24)$$

$$E_{4z} = \frac{1}{2} (\dot{A}_{4y} \Delta y - \dot{A}_{3y} \Delta y). \quad (25)$$

Тогда уравнения (19) и (20) становятся аналогом уравнений по второму закону Кирхгофа для схемы \dot{A}_z , изображенной на рис. 3.

Аналогично определяются параметры схем \dot{A}_x и \dot{A}_y :

$$Z_{1x} = Z_{2x} = \mu \Delta x \frac{\Delta z}{2 \Delta y}; \quad (26)$$

$$Z_{3x} = Z_{4x} = \mu \Delta z \frac{\Delta y}{2 \Delta z}; \quad (27)$$

$$C_{0x} = \gamma \frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x}; \quad (28)$$

$$E_{1x} = \frac{1}{2} (\dot{A}_{1z} \Delta z - \dot{A}_{2z} \Delta z); \quad (29)$$

$$E_{4x} = \frac{1}{2} (\dot{A}_{1y} \Delta y - \dot{A}_{2y} \Delta y); \quad (30)$$

$$Z_{1y} = Z_{2y} = \mu \Delta y \frac{\Delta x}{2 \Delta z}; \quad (31)$$

$$Z_{3y} = Z_{4y} = \mu \Delta y \frac{\Delta z}{2 \Delta x}; \quad (32)$$

$$C_{0y} = \gamma \frac{\Delta x \Delta z}{\Delta y}; \quad (33)$$

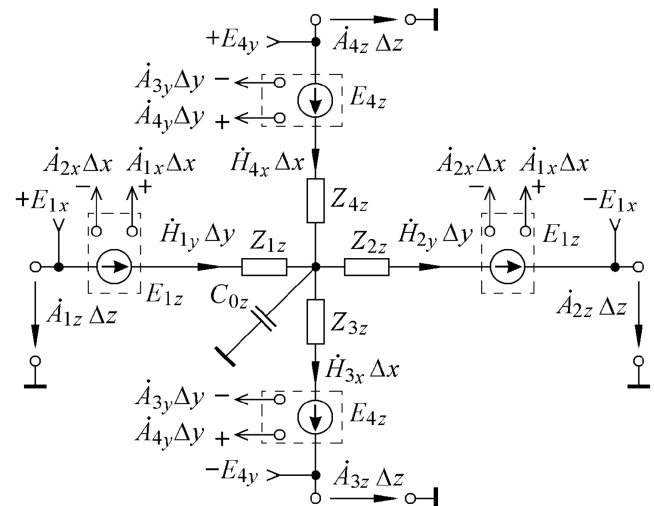


Рис. 3. Схема \dot{A}_z с управляемыми источниками ЭДС

$$E_{1y} = \frac{1}{2}(\dot{A}_{4x} \Delta x - \dot{A}_{3x} \Delta x); \quad (34)$$

$$E_{4y} = \frac{1}{2}(\dot{A}_{4z} \Delta z - \dot{A}_{3z} \Delta z). \quad (35)$$

Электромагнитные связи между схемами \dot{A}_x , \dot{A}_y и \dot{A}_z обеспечиваются управляемыми источниками ЭДС. Аналогом напряжений в $A-H$ -схеме замещения являются составляющие векторного потенциала, умноженные на длину ячейки вдоль составляющей потенциала. Аналог токов — касательные составляющие вектора магнитной напряженности, умноженные на длину ячейки вдоль составляющей магнитной напряженности.

Пространственная $A-H$ -схема замещения ячейки трехмерного электромагнитного поля в окончательном виде изображена на рис. 4 (цепи управле-

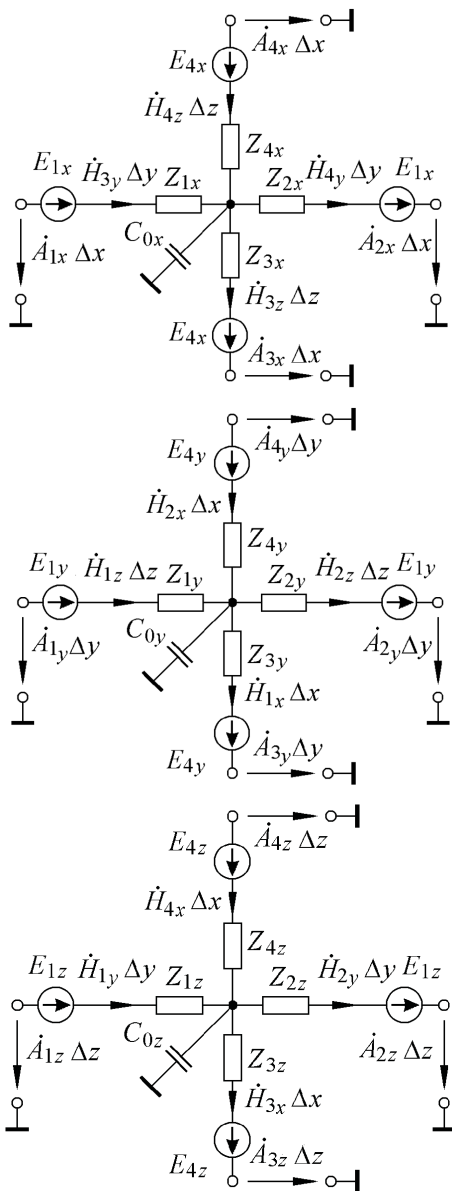


Рис. 4. $A-H$ -схема замещения ячейки трехмерного электромагнитного поля

ния источников ЭДС для упрощения схемы не показаны).

Тестовый расчет электромагнитного поля с использованием пространственной схемы. Для проверки разрабатываемого расчетного метода была проведена серия тестовых расчетов трехмерных электромагнитных полей — численно (в программе COMSOL Multiphysics 4.3) и с помощью $A-H$ -схем замещения (с использованием пакета Micro-Cap 7). Ниже представлены результаты решения одной из тестовых задач.

Внутри объема, ограниченного ферромагнитной поверхностью, расположен проводник, опоясанный настилом тока. В силу симметрии расчетная область представляет собой 1/8 часть всего объема (рис. 5).

Пространственная схема замещения формируется из ячеек 5 мм×5 мм×5 мм двух разновидностей: медный проводник (удельная проводимость $58 \cdot 10^6 \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$) и воздух (удельная проводимость равна нулю).

Объем расчетной области 30 мм×35 мм×35 мм (6×7×7 ячеек); объем проводника 20 мм×25 мм×25 мм

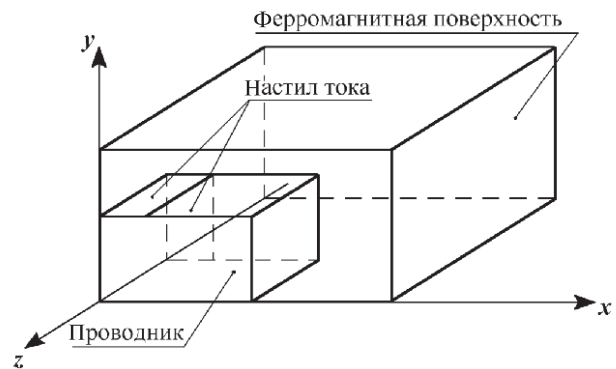


Рис. 5. Геометрия расчетной области в тестовой задаче

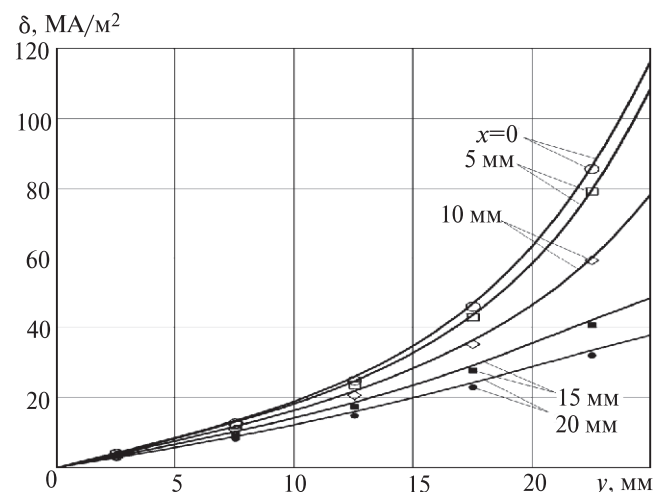


Рис. 6. Модуль плотности тока в сечении проводника при $z = 0$; сплошная линия — численный расчет; различными значками отмечены точки зависимостей, рассчитанных по пространственной схеме замещения

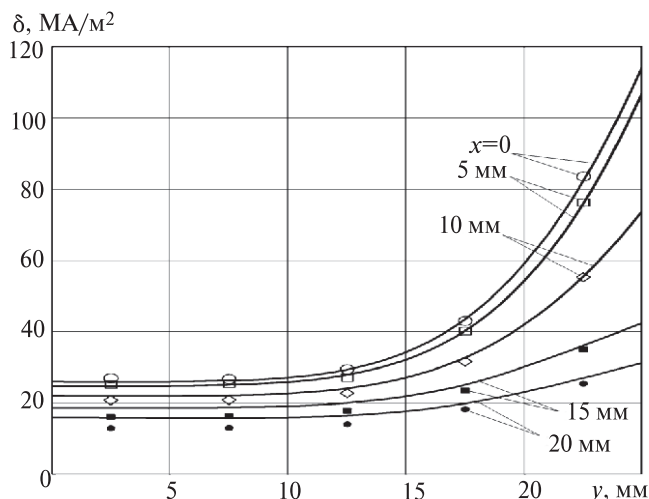


Рис. 7. Модуль плотности тока в сечении проводника при $z = -12,5$ мм; сплошная линия — численный расчет, различными значками отмечены точки зависимостей, рассчитанных по пространственной схеме замещения

($4 \times 5 \times 5$ ячеек); настил тока шириной 10 мм (2 ячейки), 10^6 А/м, частота тока 50 Гц.

На рис. 6 и 7 представлено распределение модуля плотности тока по сечению проводника при двух значениях независимой координаты z .

Результаты расчетов свидетельствуют о достаточно высокой точности разрабатываемого расчетного метода.

Elektrichestvo (Electricity), 2016, No. 10, pp. 53–57.

A Volumetric Multiport Cell and the Spatial Equivalent Circuit of a 3D Electromagnetic Field

INKIN Aleksei Ivanovich (Novosibirsk State Technical University (NSTU), Novosibirsk, Russia) — Dr. Sci. (Eng.). He died in 2016

BLANK Aleksei Valer'yevich (NSTU, Novosibirsk, Russia) — Associate Professor, Cand. Sci. (Eng.)

The article outlines the main statements based on which a shift can be made from lattice-type equivalent circuits of 2D electromagnetic fields to more complex volumetric multiport cells and spatial equivalent circuits of 3D electromagnetic fields. As a result, the calculation of a 3D electromagnetic field boils down to solving an electric circuit analysis problem. The multiport cells for 3D electromagnetic fields are synthesized proceeding from the fundamental laws of electromagnetism and the theory of circuits; this synthesis is in fact a part of theoretical electrical engineering. The results from test calculations of spatial equivalent circuits of electromagnetic fields testify that the developed calculation method has sufficiently high accuracy, due to which the spatial equivalent circuits can be used to analyze and calculate complex 3D electromagnetic fields.

Key words: 3D electromagnetic field, spatial equivalent circuit, calculation, electric circuits, analysis

REFERENCES

1. Inkin A.I., Aliferov A.I., Blank A.V. *Elektrichestvo — in Russ. (Electricity)*, 2014, No. 1, pp. 56–60.
2. Inkin A.I., Aliferov A.I., Blank A.V. *Elektrichestvo — in Russ. (Electricity)*, 2014, No. 11, pp. 53–57.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Инкин А.И., Алиферов А.И., Бланк А.В. Типовые базовые ячейки-многополюсники решетчатых схем замещения плоскопараллельных электромагнитных полей. — *Электричество*, 2014, № 1, с. 56–60.
2. Инкин А.И., Алиферов А.И., Бланк А.В. Типовые ячейки-многополюсники решетчатых схем замещения плоскомеридианных электромагнитных и температурных полей в задачах электротехники. — *Электричество*, 2014, № 11, с. 53–57.
3. Инкин А.И., Алиферов А.И., Бланк А.В. Аналитический расчет индуцированного электромагнитного поля в слое прямоугольного поперечного сечения на базе решетчатых схем. — *Электротехника*, 2014, № 12, с. 59–62.
4. Инкин А.И., Алиферов А.И., Бланк А.В. Типовые звенья и решетчатые схемы замещения индукционных магнитоэлектрических систем с движущимся проводящим элементом. — *Электричество*, 2015, № 12, с. 38–44.

[15.02.2016]

Авторы: **Инкин Алексей Иванович** окончил электромеханический факультет Новосибирского электротехнического института в 1959 г. В 1987 г. защитил докторскую диссертацию в Московском энергетическом институте. Профессор кафедры теоретических основ электротехники Новосибирского государственного технического университета (НГТУ). Скончался в 2016 г.

Бланк Алексей Валерьевич окончил электромеханический факультет НГТУ в 1999 г. В 2005 г. защитил кандидатскую диссертацию в НГТУ. Доцент кафедры теоретических основ электротехники НГТУ.

3. Inkin A.I., Aliferov A.I., Blank A.V. *Elektrotehnika — in Russ. (Power Engineering)*, 2014, No. 12, pp. 59–62.

4. Inkin A.I., Aliferov A.I., Blank A.V. *Elektrichestvo — in Russ. (Electricity)*, 2015, No. 12, pp. 38–44.