Спектральный численно-аналитический метод Ньютона–Канторовича–Михайлова для решения нелинейных дифференциально-алгебраических систем уравнений и его применение для анализа нелинейных режимов радиоэлектронных схем

МИХАЙЛОВ В.Б., РУМЯНЦЕВ В.В.

Изложен спектральный численно-аналитический метод Ньютона–Канторовича–Михайлова для моделирования нелинейных режимов в радиоэлектронных схемах в условиях сверхжесткости их математических моделей.

Ключевые слова: *радиоэлектронные схемы, нелинейные режимы, сверхжесткие математические модели, спектральные численно-аналитические методы*

The Newton-Kontorovich-Mikhailov spectral numerical-analytical method for simulating nonlinear operating modes in radioelectronic circuits under the conditions of their super-rigid mathematical models is described.

Key words: *radioelectronic circuits, nonlinear operating modes, super-rigid mathematical models, spectral numerical-analytic methods*

Общие замечания по организации итерационных процессов решения сверхжестких нелинейных дифференциально-алгебраических систем уравнений. В [1] сформулирован и теоретически обоснован итерационный численно-аналитический метод решения нелинейных дифференциально-алгебраических систем уравнений (ДАСУ) и доказана его квадратичная сходимость.

В общем случае рассмотрим сверхжесткую нелинейную дифференциально-алгебраическую систему уравнений:

$$B\frac{d}{dt}x(t) = A_{лин}x(t) + g[x(t)] + \varphi(t);\ x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

где B и $A_{лин}$ – постоянные вещественные матрицы коэффициентов порядка n (при этом матрица B вырожденная); $x(t)$ – вектор искомого решения порядка n; $g[x(t)]$- нелинейная вектор-функция, зависящая от $x(t)$; $f(t)$- вектор воздействий (сигналов); x_0 – вектор начальных условий в момент времени t_0.

Разложим нелинейную вектор-функцию $g[x(t)]$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 и получим

$$g[x(t)] = g(x_0) + J(x_0)'(x(t) - x_0) + R[x(t)], \quad (2)$$

где $g(x_0)$ – постоянный вещественный вектор значений нелинейной вектор-функции в точке x_0 для времени t_0; $J = J(x_0)$ – постоянная вещественная матрица коэффициентов (матрица Якоби); $R[x(t)]$ – остаток ряда Тейлора для старших производных.

Исходную нелинейную систему перепишем теперь в виде

$$B\frac{d}{dt}x(t) = [A_{лин} + J]x(t) + R[x(t)] + g(x_0) - Jx_0 + \varphi(t). \quad (3)$$

Обозначим $A = A_{лин} + J$ и $\varphi^*(t) = g(x_0) - Jx_0 + \varphi(t)$ и рассмотрим нелинейную ДАСУ:

$$B\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + R[x(t)] + \varphi^*(t);\ x(t_0) = x_0. \quad (4)$$

Если для $R[x(t)]$ нам удастся подобрать такую вектор-функцию $z(t)$, что

$$z(t) = R[x(t)];\ t \in [t_0, t_0 + \tau], \quad (5)$$

то решение для исходной нелинейной системы на этом интервале совпадет с решением линейной дифференциально-алгебраической системы:

$$B\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + \varphi^*(t) + z(t);\ x(t_0) = x_0. \quad (6)$$

Теперь можно предложить некий итерационный процесс [2] последовательного асимптотического приближения к решению нелинейной ДАСУ через серию решений линейных систем, а именно:

$$B\frac{d}{dt}x_k(t) = Ax_k(t) + \varphi^*(t) + z_{k-1}(t);\ x(t_0) = x_0, \quad (7)$$

где индекс k означает номер итерации, а функция $z_{k-1}(t)$ – приближение к остатку ряда Тейлора в (2) для итерационного приближения к решению на предыдущей итерации.

Итерационный процесс для нелинейных ДАСУ сходится к нелинейному решению, если для каждой итерации выполняется условие

$$\left\| z_{k+1} - R(x_{k+1}) \right\|_2 < \left\| z_k - R(x_k) \right\|_2, \qquad (8)$$

тогда $\lim\limits_{k \to \infty} x_k(t) = x(t)$ для системы (6).

Если для нелинейной ДАСУ (1) рассчитывается невязка на k-й итерации

$$B\frac{d}{dt} x_{k\,\text{лин}} - A_k x_k - g(x) - \varphi(t) = \xi_k(t), \qquad (9)$$

где $\xi_k(t)$ – невязка для $x_k(t)$, то процесс сходится к нелинейному решению системы (1), если для каждой итерации выполняется условие

$$\left\| \xi_{k+1}(t) \right\|_2 < \left\| \xi_k(t) \right\|_2,$$

тогда $\lim\limits_{k \to \infty} x_k(t) = x(t)$ для нелинейной системы (1).

Таким образом, вопрос о том, как и каким математическим методом реализовать итерационный процесс (7), является особенно актуальным, так как это связано со скоростью сходимости метода, сложностью его реализации, затратами ресурсов ЭВМ, ограничениями на вид нелинейных зависимостей в нелинейной вектор-функции ДАСУ (1) и т.д.

Численно-аналитический метод Ньютона–Канторовича–Михайлова. Невязку в (9) аналитически вычислить невозможно из-за сложности нелинейных зависимостей.

Однако можно вычислить невязку на дискретном наборе временн*ы*х точек $t_1, t_2, ..., t_s$. Поправку к невязке на $(r+1)$-й итерации будем вычислять по формуле

$$B\frac{d}{dt} x_{r\,\text{лин}} - A_r x_r - g(x) - \varphi(t) = \Delta\xi_{r+1}(t); \qquad (10)$$
$$\xi_{r+1}(t) = \xi_r(t) + \Delta\xi_{r+1}(t).$$

Предположим, что мы аппроксимировали невязку аналитической от времени вектор-функцией $\xi_{r\,\text{ап}}(t)$.

Метод Ньютона–Канторовича–Михайлова имеет предписание [2]:

$$x_{(r+1)\text{ап}}(t) = \sum_{k=1}^{m} u_k v_k^T \left\{ e^{\lambda_k t} B x_0 + L^{-1} \left[\frac{1}{p-\lambda_k} \sum_{j=1}^{s} f_j L(\varphi_j^*(t)) + \frac{1}{p-\lambda_k} L(\xi_r(t)) \right] \right\} +$$
$$+ Q_0[\varphi^*(t) - \xi_{r\,\text{ап}}(t)]. \qquad (11)$$

Здесь r – номер итерации получения аналитического приближения к решению $x_r(t)$, а вектор x_0 является вектором начальных условий в начале интервала.

Доказательство сходимости метода на числовом промежутке выполнено в [1, 2]. Метод имеет квадратичную сходимость (рассчитывается ньютоновская поправка) и является численно-аналитическим обобщением метода Ньютона–Канторовича для одной переменной [3].

Поскольку $x_{r+1}(t)$ является аналитической от времени функцией, то путем дифференцирования можно вычислить и вектор $\frac{d}{dt} x_{r+1}(t)$ и, следовательно, вычислить невязку $\xi_{r+1}(t)$ согласно (9) на временн*о*м наборе точек $t_1, t_2, ..., t_s$. Если невязка на каком-либо интервале расходится, то можно выбрать меньший интервал, т.е. оценить сход с траектории точного решения. После получения достаточно близкого приближения к точному решению на определенном интервале выбираем следующий интервал, принимая конечную точку данного интервала за начало следующего (сшивание решений на интервалах). Этим обеспечивается сходимость численно-аналитического решения на длительных промежутках времени.

Численно-аналитический метод решения линейных ДАСУ. Рассмотрим численно-аналитический метод решения линейных ДАСУ [2, 4] на примере ДАСУ

$$B\frac{d}{dt} x(t) = Ax(t) + \varphi(t); \; x(t_0) = x_0 \qquad (12)$$

с постоянными вещественными матрицами коэффициентов B и A (матрица B вырожденная).

Используя одноранговое представление резольвенты регулярного пучка матриц $D(p) = pB - A$ [5] для линейных ДАСУ единичного индекса [6], получаем точный аналитический вид решения, полученный В.Б. Михайловым:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{m} e^{\lambda_k t} u_k v_k^T B x_0 +$$
$$+ \sum_{k=1}^{m} u_k v_k^T \int_{t_0}^{t} e^{\lambda_k (t-\tau)} \varphi(\tau) d\tau + Q_0 \varphi(t). \qquad (13)$$

Здесь $m-$ порядок характеристического полинома пучка, равный рангу матрицы B; λ_k $(k = 1, ..., m)$ – различные собственные значения пучка матриц; u_k и v_k – соответственно правый и левый собственные векторы пучка матриц для собственного значения λ_k, связанные уравнением нормировки $v_k^T B u_k = 1$; Q_0 – матрица при алгебраической части решения.

Численно-аналитический метод решения (13) имеет вид

$$x(t) = \sum_{k=1}^{m} e^{\lambda_k t} u_k v_k^T B x_0 +$$

$$+\sum_{k=1}^{m} u_k v_k^T L^{-1}\left\{\frac{1}{p-\lambda_k} L[\varphi(t)]\right\} + Q_0\varphi(t), \qquad (14)$$

где L^{-1} и L — обратное и прямое преобразования Лапласа соответственно; p — оператор Лапласа.

При этом собственные значения и собственные векторы определяются численными методами, а интеграл свертки (интеграл Коши–Дюамеля) в (13) определяется аналитическим от времени t образом с использованием прямых и обратных преобразований Лапласа, причем решение (14) можно оптимизировать по вычислительным затратам.

Предположим, что входной сигнал $\varphi(t)$ является суммой нескольких сигналов, а именно:

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^{s} f_j \varphi_j(t), \qquad (15)$$

где s — число сигналов в сумме; f_j $(j=1,...,s)$ — векторы постоянных коэффициентов; $\varphi_j(t)$ $(j=1,...,s)$ — скалярные аналитические функции времени, имеющие изображение по Лапласу.

Учитывая обратные преобразования Лапласа, можно записать:

$$L^{-1}\left[\frac{1}{p-\lambda_k} L(\varphi_j(t))\right] = b_{\lambda_k} e^{-\lambda_k t} + \sum_{r=1}^{r_{sj}} b_{jr}\psi_{jr}(t), \qquad (16)$$

где b_{λ_k}, b_{jr} — скалярные коэффициенты; $\psi_{jr}(t)$ — аналитические функции времени; r_{sj} — число аналитических функций в интеграле свертки для λ_k и $\varphi_j(t)$.

Численно-аналитическое решение можно сразу оптимизировать с учетом (15) и (16), а именно:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{m} u_k \left[e^{\lambda_k t}\left(\alpha_k + \sum_{j}^{s} \beta_{kj} b_{\lambda_k j}\right) + \sum_{j=1}^{s} \beta_{kj}\left\{\sum_{r=1}^{r_{sj}} b_{jr}\psi_{jr}(t)\right\}\right] + Q_0\varphi(t), \qquad (17)$$

где $\alpha_k = v_k^T B x_0$ $(k=1,...,m)$ — предварительно и однократно вычисленные скалярные произведения; $\beta_{kj} = v_k^T f_j$ $(k=1,...,m;\ j=1,...,s)$ также.

Предположим, что пучок матриц в исходной линейной ДАСУ имеет вид

$$D(p) = pB - A - p\begin{bmatrix} B_{11} & \\ & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix} \qquad (18)$$

где блоки B_{11} и A_{22} не вырождены.

В этом случае [4]:

$$Q_0 = \begin{bmatrix} & \\ & -A_{22}^{-1}\end{bmatrix} \qquad (19)$$

Некоторые замечания по аппроксимации невязок. Хотя метод еще практически не реализован, можно высказать определенные соображения по аппроксимации невязок. Будем выбирать длину интервала сходимости таким образом, чтобы невязка была достаточно гладкой функцией времени (этот интервал все равно будет значительно больше, чем шаг интегрирования в численных методах).

В этом случае можно аппроксимировать невязку следующими наборами временных функций:

полиномами от времени;

набором ряда экспонент с положительным вещественным показателем;

гиперболическими функциями;

рядами Фурье;

многочленами Чебышева.

Рассмотрим метод аппроксимации смещенными многочленами Чебышева.

Пусть для функции $f(t)$ требуется построить функцию вида

$$F(t) = a_0\varphi_0(t) + a_1\varphi_1(t) + ... + a_n\varphi_n(t) \qquad (20)$$

так, чтобы минимизировать взвешенную среднеквадратическую ошибку на интервале (a,b)

$$\sigma^2 = \int_a^b \gamma(t)[F(t) - f(t)]^2\,dt, \qquad (21)$$

где $\gamma(t)$ — заданная неотрицательная весовая функция.

Если функции $\varphi_k(t)$ действительны и попарно ортогональны с весом $\gamma(t)$ на интервале (a,b), т.е. если

$$\int_a^b \gamma(t)\varphi_i(t)\varphi_j(t)\,dt = 0,\ i \neq j,$$

то искомые коэффициенты a_i вычисляются по формулам:

$$a_i = \frac{\int_a^b \gamma(t) f(t)\varphi_i(t)\,dt}{\int_a^b \gamma(t)\varphi_i^2(t)\,dt},\ i = 0,1,2,... \qquad (22)$$

Аппроксимация ортогональными многочленами Чебышева характеризуется тем замечательным преимуществом, что улучшение аппроксимации добавлением нового члена $a_{n+1}\varphi_{n+1}(t)$ не изменяет ранее вычисленных коэффициентов $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$.

Подстановка $t = \alpha x + \beta$, $dt = \alpha dx$ в данных формулах позволяет изменить масштаб или сдвинуть интервал. Отметим, что вычисление коэффициентов по формуле (22) требует знания функции $f(t)$ на всем интервале.

Совершенно очевидно, что поскольку невязка $\xi(t)$ в формуле (20) рассчитывается не в виде аналитической зависимости, а по множеству точек на интервале (a,b), то и в формуле (22) будем заменять интегралы на соответствующие суммы, а именно:

$$a_i = \frac{\sum\limits_{k=1}^{r} \gamma(t_k)\xi_j(t_k)\varphi_i(t_k)(t_k - t_{k-1})}{\sum\limits_{k=1}^{r} \gamma(t_k)\varphi_i^2(t_k)(t_k - t_{k-1})},$$

$$t_k \in (a,b);\; k = 1,2,..., \qquad (23)$$

где j — номер компоненты в векторе невязок $\xi(t)$ соответствующего порядка.

Формула (23) приведена в самом примитивном виде, так как для более точного вычисления сумм в (23) опять можно применить аппроксимацию по нескольким точкам (или, например, методом «золотого сечения»).

Вообще говоря, при реализации метода Ньютона–Канторовича–Михайлова удобнее помещать начало каждого интервала интегрирования в нулевую точку, вводя смещение по времени. Тогда более удобно применить смещенные многочлены Чебышева $T_n^*(t)$, определяемые на отрезке $[0,1]$ (вводя еще при этом и масштабирование отрезка) формулами:

$$T_n^*(t) = T_n(2t-1) = \cos n\vartheta, \qquad (24)$$
$$\cos n\vartheta = 2t - 1;\; n = 0,1,2,...$$

Ниже приводятся многочлены Чебышева:

Для $T_n(t)$

$T_0 = 1,\; T_1 = t,\; T_2 = t^2 - 1,\; T_3 = 4t^3;\; T_4 = 8t^4 - 8t^2 + 1$ и т.д.

Для $T_n^*(t)$

$T_0^* = 1;\; T_1^* = 2t - 1;\; T_2^* = 8t^2 - 8t;$

$T_3^* = 32t^3 - 48t^2 + 18t - 1;$

$T_4^* = 128t^4 - 256t^3 + 160t^2 - 32t + 1$ и т.д.

Таким образом, невязку по каждой j-й компоненте (заданной точками) можно представить в виде

$$\xi_j(t) \approx \sum_{k=0}^{m} a_{k(j)} T_k^*(t),\; k = 0,1,2,...,m. \qquad (25)$$

Тогда вектор-невязка $\xi(t)$, заданный точками на интервале $[0,\Delta]$, аппроксимируется в виде

$$\xi(t) \approx \sum_{k=0}^{m} a_k T_k^*(t),\; k = 0,1,2,...,m. \qquad (26)$$

где a_k $(k = 0,1,2,...,m)$ — векторы порядка n; m — число смещенных многочленов Чебышева в аппроксимации вектора невязки.

Для реализации численно-аналитического вида решения теперь надо вычислить интегралы свертки вида (для вещественного λ_k):

$$\beta_{kj}\int_0^t e^{\lambda_k(t-\tau)} T_j^*(\tau)d\tau = \beta_{kj} L^{-1}\left\{\frac{1}{p-\lambda_k} L[T_j^*(t)]\right\},$$

$$t \in [0,\Delta],\; j = 0,1,2,...,m, \qquad (27)$$

где $\beta_{kj} = v_k^T a_j$.

Для комплексно-сопряженных пар будем рассматривать аналитическое вычисление еще двух интегралов:

$$L^{-1}\left\{\frac{p-\sigma_k}{(p-\sigma_k)^1 + \omega_k^2} L[T_j^*(t)]\right\}$$

и

$$L^{-1}\left\{\frac{\omega_k}{(p-\sigma_k)^1 + \omega_k^2} L[T_j^*(t)]\right\}. \qquad (28)$$

Поскольку сами смещенные многочлены Чебышева являются полиномами от времени, то для аналитического интегрирования по формулам (27) и (28) будем использовать формулы для временных полиномов.

Следует отметить, что на выбираемых интервалах сходимости предложенного метода невязка представляет собой достаточно гладкую вектор-функцию. Число функций-членов аппроксимации может быть достаточно большим, чтобы обеспечить необходимую степень точности.

Из рассмотрения метода Ньютона–Канторовича–Михайлова следует, что он является очень перспективным для получения численно-аналитического решения нелинейных ДАСУ, так как в нем нет ограничений на виды нелинейных функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Михайлов В.Б., Миронов А.М.** Оценки сходимости процессов Ньютона–Канторовича для нелинейных систем алгебро-дифференциальных уравнений на числовом промежутке. – Интеллектуальные интегрированные САПР РЭА и БИС. – М.: Наука, 1990 (Ин-т автоматизации проектирования РАН).

2. **Михайлов В.Б.** Численно-аналитические методы решения сверхжестких дифференциально-алгебраических систем уравнений. – СПб: Наука, 2005.

3. **Канторович Л.В., Акилов Г.П.** Функциональный анализ. – М.: Наука, 1984.

4. **Гридин В.Н., Михайлов В.Б.** Развитие численно-аналитического подхода в моделировании аналоговых схем. – Респ. межвед. сб. научн. трудов «Автоматизация проектирования в электронике». – Киев: Техника, 1988, вып. 38.

5. **Михайлов В.Б.** Новые спектральные разложения для пучков матриц и их связь с решением алгебро-дифференциальных систем. – Электронное моделирование, 1994, № 4.

6. **Бояринцев Ю.Е.** Методы решения вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. – Новосибирск: Наука, 1988. 157.

7. **Гридин В.Н., Михайлов В.Б., Куприянов Г.А., Михайлов К.В.** Устойчивые численно-аналитические решения сверхжестких дифференциально-алгебраических систем уравнений. – Математическое моделирование, 2003, т.15, № 10.

[28.04.11]

Авторы: ***Михайлов Вадим Борисович*** *окончил факультет автоматики и вычислительной техники Ленинградского электротехнического института в 1973 г. В 1992 г. в Санкт-Петербургском институте информатики и автоматизации РАН защитил докторскую диссертацию по тематике, связанной с применением численно-аналитических методов в моделировании радиоэлектронных схем СВЧ диапазона. Ученый секретарь Центра информационных технологий в проектировании РАН.*

Румянев В.В.