

## Расчёт электромагнитного поля в слоистой среде

КОННИКОВ И.А.

*Проводится сравнительный анализ методов решения волнового уравнения для плоскостойких сред. Изложена суть метода эквивалентной постоянной распространения, обладающего сравнительно широким частотным диапазоном и небольшой вычислительной ёмкостью. Показано, что метод эквивалентной постоянной распространения позволяет свести решение волнового уравнения к решению уравнений Лапласа для электрического и магнитного потенциалов поля. Описана техника расчёта поля во временной области, которая базируется на его расчёте в частотной области, использовании интеграла Дюамеля и моментов импульсной характеристики канала распространения электромагнитной энергии. Дается обобщённое изложение метода расчёта параметров эквивалентных схем, который обеспечивает точное воспроизведение интегральных характеристик переходного процесса. Приводятся аналитические выражения для математических моделей плоскостойких сред, адекватных наиболее употребительным конструкциям. Описан вычислительный эксперимент, проведённый для количественной оценки возможности применения упрощённых математических моделей слоистых сред вместо точных.*

**Ключевые слова:** электромагнитное поле, слоистая среда, расчет, волновое уравнение, уравнение Лапласа, эквивалентная постоянная распространения

Расчёт электромагнитного поля в слоистой среде необходим в радиоэлектронике, геологоразведке, при проектировании молниезащиты, причём не только в частотной области, но и во временной [1–9 и др.]. Методам расчёта поля в плоскостойкой среде посвящено немало число специальных работ. Наиболее известным и широко используемым, по-видимому, является метод FDTD<sup>1</sup> (метод конечной разности во временной области), предложенный в [10]. Однако, как справедливо отмечается в [5], метод FDTD требует значительных вычислительных ресурсов. Так, при решении конкретной задачи [7] с использованием метода ILCM<sup>2</sup> удалось добиться быстродействия, на три десятичных порядка большего, чем при использовании методов FDTD и MOM<sup>3</sup> [11].

Реализация метода ILCM [6, 7] требует решения интегрального уравнения, что сопряжено с немалыми вычислительными ресурсами. Даже специальная адаптация метода ILCM под конкретные задачи, требующие многократного вычисления поля (например, расчёт помехонесущего поля и оценка внутренней электромагнитной совместимости в микросхемах и на печатных платах), не приводит к необходимому и достаточному снижению времени счёта и, как правило, является лишь паллиативом.

Заслуживает особого внимания модифицированный метод эквивалентной схемы частичного

элемента (PEEC method)<sup>4</sup> [8, 9], ориентированный на задачи электроники для частоты  $\omega > 0$  и для расчётов во временной области. Однако, как отмечается в [12], метод PEEC не учитывает излучения и времени распространения электромагнитной волны; необходимость анализа структур, размеры которых сравнимы с длиной волны, потребовала серьёзно усложнить метод. Гибридный FDTD/PEEC метод, предложенный в [12], также не обладает достаточным быстродействием, приемлемым при решении ряда проектных задач электроники. Дальнейшее снижение вычислительной ёмкости методов расчёта поля остаётся по-прежнему актуальным. Необходим новый метод расчёта поля в слоистой среде, особенно для временной области. Такой метод предлагается в статье. Он не требует формирования и анализа эквивалентной схемы источника поля, что необходимо, например, при реализации подхода, описанного в [2], и основан на использовании метода прямого расчёта поля в частотной области – метода эквивалентной постоянной распространения (ЭПР). Метод ЭПР в надлежащей модификации был предложен в [13] и развит в [14] для частотной области применительно к задаче расчёта перекрёстных помех в коммутационных проводниках электронного модуля. Суть метода в следующем.

**Метод ЭПР.** В соответствии с этим методом функция Грина  $G$ , которая является решением волнового уравнения относительно потенциала элек-

<sup>1</sup> FDTD – Finite Difference Time Domain.

<sup>2</sup> ILCM – Intermediate Level Circuit Model.

<sup>3</sup> MOM – Method of Moments.

<sup>4</sup> PEEC – Partial Element Equivalent Circuit.

трического поля, для слоистой среды должна описываться выражением того же вида, что и для однородной среды:

$$G(R) = M_1 \exp(-ik_{epc}R)/R + M_2 \exp(-ik_{epc}R)/R, \quad (1)$$

где амплитудные множители  $M_1 = A_1 \eta / (4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_e)$ ,  $M_2 = A_2 \eta / (4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_e)$ ;  $\eta(x_0, y_0, z_0, \omega)$  – известная по условиям задачи плотность распределения заряда по объёму источника поля<sup>5</sup>;  $A_1(x, y, z, \omega)$  и  $A_2(x, y, z, \omega)$  – зависящие от координат и частоты амплитудные сомножители, позволяющие учесть граничные условия в начале и в конце канала распространения электромагнитной волны (т.е. на поверхности источника поля и в точке, где поле вычисляется);  $x, y, z$  – абсцисса, ордината и аппликата точки, где вычисляется поле;  $x_0, y_0, z_0$  – абсцисса, ордината и аппликата точки, где расположен элементарный источник поля;  $R = \sqrt{r^2 + (z - z_0)^2}$  – расстояние от элементарного источника поля до точки, где вычисляется поле;  $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$  – расстояние в азимутальной плоскости между элементарным источником поля и точкой, в которой поле вычисляется (азимутальное расстояние);  $k_{epc}(r) = \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_e \mu_0 \mu_e \omega^2 + i \mu_0 \mu_e \sigma_e \omega}$  – ЭПР; слои считаются гомогенными и имеющими плоскопараллельные границы раздела;  $\sigma_e$  – «кажущаяся» активная проводимость слоистой среды с учётом влияния всех слоёв;  $\varepsilon_e$  и  $\mu_e$  – эквивалентные относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости слоистой среды соответственно; константа Кулона  $\varepsilon_0 = 10^{-9} / (36\pi)$ ; константа Био–Савара  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ ;  $\omega$  – угловая частота;  $i$  – мнимая единица (мнимое число, удовлетворяющее соотношению  $i^2 = -1$ ).

Методы расчёта «кажущейся» активной проводимости хорошо известны в геологии. Известны как прямые методы расчёта «кажущейся» активной проводимости для изотропных и анизотропных [15, 16 и др.] слоистых сред, так и косвенные, основанные на идее использования теории подобия, как предлагается в [17, с. 142–143]. Значения эквивалентных проницаемостей  $\varepsilon_e$  и  $\mu_e$  рассчитываются как отношение функций Грина в слоистой среде и свободном пространстве по единым для каждого слоя среды формулам:

$$\begin{aligned} \varepsilon_e(r) &= \frac{1}{R} \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) \Phi_\varepsilon(\lambda) d\lambda; \\ \mu_e(r) &= R \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) \Phi_\mu(\lambda) d\lambda, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\Phi_\varepsilon(\lambda)$  – полученная при решении уравнения Лапласа для электрического потенциала математическая модель слоистой среды, которая соответствует конструкции электронного модуля [18];  $\Phi_\mu(\lambda)$  – полученная при решении магнитоэлектростатической задачи математическая модель той же среды;  $J_0$  – функция Бесселя 1-го рода нулевого порядка.

Таким образом, метод ЭПР позволяет свести решение волнового уравнения к решению уравнений Лапласа для электрического и магнитного потенциалов. Методы решения уравнения Лапласа для плоскостойких сред известны и рассмотрены, например, в [19–21]. Оценка степени адекватности предлагаемой математической модели (1) сделана в [13] на примере ряда задач, допускающих строгое решение волнового уравнения. Метод ЭПР имеет сравнительно небольшую вычислительную ёмкость и обладает достаточно большой для решения целого ряда практических задач частотной областью корректного использования, причём далеко за пределами области квазистационарного приближения. Однако применение этого метода во временной области до настоящего времени не описано. Ниже следует описание метода ЭПР во временной области применительно к задаче оценки паразитных электромагнитных эффектов в электронном модуле.

**Расчёт поля во временной области.** Во временной области расчёт поля методом ЭПР базируется на расчёте поля в частотной области, прежде всего на расчёте коэффициента передачи по напряжению канала распространения электромагнитной энергии. Расчёт потенциала поля во временной области возможен, например, с помощью интеграла Дюамеля, как это делается в [8], для чего необходимо знать переходную (или импульсную) характеристику канала распространения электромагнитной энергии.

Переходная характеристика, как известно, может быть найдена обратным преобразованием Лапласа:

$$h_i(t) = \int_0^{\infty} \frac{k(p) \exp(pt)}{p} dp, \quad (3)$$

где комплексная частота  $p = i\omega$ ;  $t$  – время; передаточная характеристика  $k(p) = K(p) / K(0)$  – отношение коэффициента передачи по напряжению канала распространения электромагнитной энергии, не содержащего проводник, на частоте  $p > 0$  к его значению на постоянном токе (при  $p = 0$ );  $K(p) = \varphi_{out}(x, y, z, p) / \varphi_{in}(x_0, y_0, z_0, p)$  – отношение потенциала  $\varphi_{out}(x, y, z, p)$ , создаваемого в точке с координатами  $\{x, y, z\}$  всем объёмом  $V_0$  источника поля, к такому же потенциалу  $\varphi_{in}(x_0, y_0, z_0, p)$  в

<sup>5</sup> При неизвестном законе распределения заряда плотность  $\eta$  считается равномерной.

точке с координатами  $\{x_0, y_0, z_0\}$  на поверхности источника.

С учётом (1) в среде без активных потерь ( $\sigma_e = 0$ ) в отсутствие отражённой волны ( $M_2 = 0$ ) потенциал помехонесущего поля

$$\varphi_{out}(x, y, z, p) = \int_{V_0} [M_1 \exp(-p \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_e \mu_0 \mu_e} R) / R] dv_0.$$

Распределение потенциала  $\varphi_{in}(x_0, y_0, z_0, p)$  и заряда  $\eta(x_0, y_0, z_0, \omega)$  по поверхности источника для расчёта  $M_1$  обычно известно по условиям задачи или может быть задано на основании теоретических предположений. Так, если источник поля – проводник, вдоль которого распространяется электромагнитная волна, то распределение потенциала и заряда по объёму источника поля можно задать, рассматривая проводник как линию с распределёнными параметрами [3].

Однако способ расчёта амплитуды наведённой помехи, основанный на прямом использовании интеграла Дюамеля, нельзя назвать вполне удачным из-за его немалой вычислительной ёмкости. Время счёта можно заметно снизить, если применить идею, основанную на использовании результата Элмора [22], который дал физическую трактовку моментам импульсной характеристики. Как показано в [23], метод Элмора описывает интегральные характеристики переходного процесса как в электрически коротких, так и в электрически длинных четырёхполюсниках.

В инженерной практике подробная информация о форме переходного процесса, описываемого интегралом Дюамеля, нередко бывает излишней, и проектировщику вполне достаточно знать лишь интегральные характеристики переходного процесса. Тогда значения времени его задержки  $\tau_d$  и длительности фронта  $\tau_f$  с учётом соотношения (1) при  $M_2 = 0$  рассчитываются методом моментов по формулам, которые получены по методике, предложенной в [22]:

$$\tau_d = R \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_e \mu_0 \mu_e}; \quad \tau_f = \sqrt{2\pi \left\{ \left[ \frac{\partial^2 k(p)}{\partial p^2} \right]_{p=0} - \tau_d^2 \right\}}. \quad (4)$$

Амплитуду напряжения  $u_{out}(t)$  на выходе канала распространения электромагнитной энергии можно найти, используя интеграл Дюамеля и применяя любой из известных численных методов поиска экстремума. Объём вычислений существенно снижается, если в качестве первого приближения при поиске экстремума принять значение аргумента (времени)  $t = \tau_d + \tau_f / 2$ .

Применение метода ЭПР для расчёта значения второй производной передаточной характеристики по (4) сомнений не вызывает, поскольку расчёт производной методом конечных разностей проводится на частотах, близких к нулю, а точность метода возрастает с уменьшением частоты. Однако для расчёта по (3), строго говоря, требуются значения  $k(p)$  на бесконечном интервале частот.

Границы области корректного использования метода ЭПР по частоте для небольших расстояний, характерных для микроэлектроники и приборостроения, исследованы в [24]. Как оказалось, на верхних частотах метод может давать значительную погрешность, хотя значения верхней граничной частоты метода  $f_{epc}$  лежат далеко за пределами области квазистационарного приближения. Следовательно, для небольших расстояний использование метода ЭПР вполне корректно для сигналов, верхняя граничная частота которых  $f_0 \leq f_{epc}$ .

**Эквивалентная схема канала.** Если зависимость  $k(p)$  в (3) представить отрезком ряда Маклорена по степеням комплексной частоты  $p$  через начальные моменты импульсной характеристики, то полученная по (3) переходная характеристика будет представлять собой алгебраическую сумму бесконечных слагаемых, так как соответствующие интегралы расходятся; в этом случае аппроксимация отрезком ряда Маклорена неприемлема. Требуется иная аппроксимация, которая обеспечивает достаточно простой процесс вычисления по (3) и имеет ясную физическую трактовку. Этим требованиям отвечает аппроксимация рациональными дробями, которая допускает прямую схемотехническую интерпретацию. Иными словами, переходную характеристику нужно рассчитывать, используя эквивалентную схему канала распространения электромагнитной волны.

Методика построения математической модели канала распространения электромагнитной энергии, ориентированная на прямую схемотехническую интерпретацию, заключается в следующем. Для определения параметров математической модели  $n$ -го порядка ( $n \geq 1$ ) и параметров соответствующего моделирующего четырёхполюсника надо получить с помощью исходной математической модели поля (например, методом ЭПР) выражение для нормированного коэффициента передачи  $k_{epc}(p)$  и потребовать равенства первых  $n+1$  членов разложения коэффициента передачи моделируемого объекта в ряд Маклорена по степеням частоты  $p$ , соответствующим членам разложения коэффициента передачи моделирующего четырёхполюсника. При этом для получения указанных первых  $n+1$  членов ряда для коэффициента передачи нередко



оказывается необходимым учитывать большее число членов ряда Маклорена для поля.

Необходимый и достаточный порядок математической модели определяется на основании соображений, изложенных в [25]. При необходимости повысить точность моделирования в частотной области при получении моделей  $n$ -го порядка ( $n > 1$ ) дополнительно накладывается условие равенства коэффициентов передачи на какой-либо частоте или условие минимизации ошибки на интервале. Полученные уравнения решаются относительно значений параметров эквивалентной схемы, обеспечивающих указанные равенства. Эти значения позволяют точно (по Элмору) смоделировать характеристики переходного процесса, в том числе время задержки в канале электромагнитной связи, с учётом всех составляющих поля, включая поле излучения, с точностью, определяемой принятой степенью квазистационарного приближения.

Метод прост, приводит к простым эквивалентным схемам и имеет широкую область применения. Именно этим методом в [26] была получена эквивалентная схема линии с распределёнными параметрами, обеспечивающая точное (по Элмору) воспроизведение времени задержки переходного процесса. Ещё один пример использования указанного метода представлен в [27], где показано, что в непроводящей слоистой среде беспроводной канал распространения электромагнитной энергии может быть смоделирован П-образным трёхполюсником, состоящим из трёх емкостей, причём такая эквивалентная схема позволяет учесть переходное поле и поле излучения [28, с. 244], а не только статическую составляющую поля, по которой обычно рассматривается электрическая ёмкость.

Рабочая эквивалентная схема канала распространения электромагнитной энергии может быть различной в зависимости от способа её дальнейшего использования. Дело в том, что в реальном физическом объекте на входе и выходе моделируемого канала, где конкретизируются потенциалы  $u_{in}(t)$  и  $u_{out}(t)$ , имеются проводимости, обусловленные не только и не столько электрофизическими свойствами слоистой среды, но, главным образом, свойствами (входными и выходными проводимостями) элементов, регламентируемых принципиальной электрической схемой конструктива, в котором дается количественная оценка паразитных электромагнитных эффектов.

Известны два подхода [29] к созданию математической модели конструктива, отражающей наличие в нём паразитных электромагнитных эффектов. В случае реализации одного из этих подходов, предложенного в [30] и предполагающего расчёт выходных электрических характеристик проекти-

руемого электронного модуля в комплексной САПР, канал распространения помехонесущего поля может быть представлен «автономной» эквивалентной схемой без учёта элементов, регламентируемых принципиальной электрической схемой; в этом случае наличие и функционирование элементов принципиальной схемы учитываются по результатам экстракции полной эквивалентной схемы электронного модуля, описывающей в том числе и паразитные электромагнитные эффекты. При ином подходе, реализованном в [31], рабочая эквивалентная схема канала распространения помехонесущего поля должна учитывать наличие элементов принципиальной схемы, для чего входная и выходная ёмкости упомянутой П-образной эквивалентной схемы [26] должны быть шунтированы комплексными сопротивлениями или четырёхполюсниками.

**Использование приближённых моделей слоистой среды.** Применение метода ЭПР сдерживается отсутствием в доступных источниках аналитических выражений для математических моделей плоско-слоистых сред, адекватных реальным конструкциям радиоэлектронных модулей.

Для среды в виде двух диэлектрических слоёв постоянной толщины, которая ограничена сверху и снизу идеально проводящими параллельными плоскостями, её математические модели, полученные по описанной в [28, 29] классической методике, имеют вид:

$$\Phi_{\varepsilon}(\lambda) = \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_2\Omega - \varepsilon_1} \left[ \frac{1}{1+u^{2(h-H)/\tau_0}} - \frac{1}{1+u^{2(H-h)/\tau_0}} \right],$$

$$\text{где } u = \exp(-\lambda\tau_0); \quad \Omega = \frac{(1+u^{2h/\tau_0})[1-u^{2(h-H)/\tau_0}]}{(1-u^{2h/\tau_0})[1+u^{2(h-H)/\tau_0}]},$$

$$\Phi_{\mu}(\lambda) = \frac{2}{\mu_1\Omega/\mu_2 - 1} \left[ \frac{1}{1+u^{2(h-H)/\tau_0}} - \frac{1}{1+u^{2(H-h)/\tau_0}} \right].$$

Такая модель может быть принята, например, при расчёте поля в гибридной интегральной микросхеме с металлическим корпусом внутренней высотой  $H$  и диэлектрической подложкой толщиной  $h$ ; относительные диэлектрические проницаемости слоёв —  $\varepsilon_2$  (подложки) и  $\varepsilon_1$  (слоя над подложкой); относительные магнитные проницаемости слоёв —  $\mu_2$  (подложки) и  $\mu_1$  (слоя над подложкой).

Для металлизированной печатной платы (для полупространства относительной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_1$ , относительной магнитной проницаемостью  $\mu_1$  на диэлектрическом слое, который имеет толщину  $h$ , относительную магнитную

проницаемость  $\mu_2$  и относительную диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon_2$ , плоская нижняя поверхность слоя является идеально проводящей) математические модели

$$\Phi_\varepsilon(\lambda) = \frac{2\varepsilon_1(1-u^{2h/\tau_0})}{\varepsilon_2(1+u^{2h/\tau_0}) + \varepsilon_1(1-u^{2h/\tau_0})};$$

$$\Phi_\mu(\lambda) = \frac{2(1-u^{2h/\tau_0})}{(1+u^{2h/\tau_0})\mu_1/\mu_2 + (1-u^{2h/\tau_0})}.$$

Для двух полупространств с плоской границей раздела

$$\Phi_\varepsilon(\lambda) = \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}; \quad \Phi_\mu(\lambda) = \frac{2}{\mu_1/\mu_2 + 1}.$$

Границы слоёв и полупространств считаются плоскопараллельными, а сами слои и полупространства – непроводящими, изотропными, однородными и неограниченными в азимутальном направлении. В подавляющем большинстве практических случаев  $\varepsilon_1 = 1$  и  $\mu_1 = 1$ . Сопоставление приведённых аналитических выражений для математических моделей слоистых сред показывает, что для данной среды (конструкции) магнитная модель рассматриваемого типа  $\Phi_\mu(\lambda)$  может быть получена из соответствующей электрической модели  $\Phi_\varepsilon(\lambda)$  с помощью простой замены переменных  $\varepsilon_1 = 1/\mu_1$  и  $\varepsilon_2 = 1/\mu_2$ .

Разумеется, потребности практики не ограничиваются двумя конструкциями, для которых представлены математические модели, требуемые для решения задач, сводимых к решению уравнения Лапласа, и для реализации метода ЭПР. Учитывая, что процесс получения таких математических моделей довольно трудоёмок и требует достаточно высокой квалификации, представляет практический интерес возможность использования упрощённых моделей для других конструкций (прежде всего многослойных). Эвристическое обоснование такого использования было дано в [32].

Разумно предположить, что поле в плоскостой среде в пределах слоя определяется прежде всего электрофизическими свойствами и толщиной этого слоя; поле вблизи границы раздела слоёв определяется в основном электрофизическими характеристиками и толщиной слоёв, прилегающих к границе раздела; влияние слоёв, не прилегающих к границе раздела, существенно ниже, особенно на малых расстояниях  $r$ , характерных для приборостроения и микроэлектроники. Если в рассматриваемой среде содержится провод, то такой феномен усиливается проявлением внешнего скин-эф-

фекта [33, с. 259], т.е. эффекта концентрации внешнего поля около поверхности провода.

С учётом этого поле в плоскостой среде вблизи границы раздела слоёв можно рассчитывать, выделив главную составляющую поля, определяемую по известным функциям практически точно<sup>6</sup>, а оставшуюся часть вычислять с меньшей точностью (например, в квазистационарном приближении). Такой главной составляющей является потенциал поля вблизи границы раздела двух полупространств с плоской границей раздела; необходимые аналитические выражения для частот  $\omega > 0$  хорошо известны из классических работ. Соответствующая методика расчёта поля с помощью решения Зоммерфельда описана и использована, например, в [23, 32].

Для численной конкретизации этих правдоподобных рассуждений был проведён вычислительный эксперимент, результаты которого частично представлены на рис. 1 и 2 (см. приложение). Анализ этих результатов и выводы даны ниже.

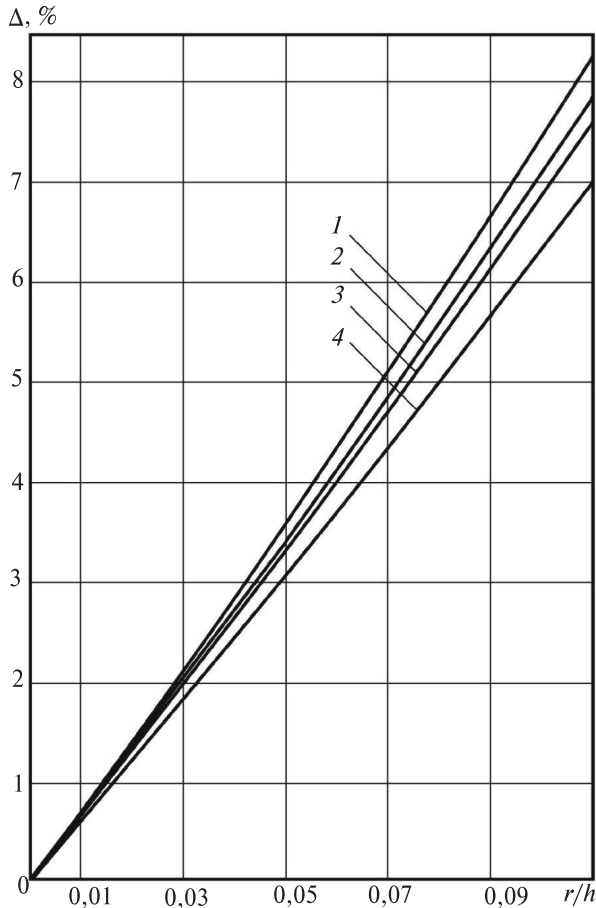
**П р и л о ж е н и е. Численный эксперимент.** На рис. 1 представлена зависимость относительной погрешности расчёта функции Грина от нормированного азимутального расстояния, на рис. 2 – зависимость указанной погрешности от диэлектрической проницаемости платы. Считается, что в обоих случаях погрешность вносится вследствие использования математической модели, соответствующей двум полупространствам с плоской границей раздела, вместо моделей слоистых сред, соответствующих диэлектрической подложке в металлическом корпусе и металлизированной печатной платы без верхнего экрана. Таким образом, используется приближённая математическая модель конструкции вместо точных.

Анализ и обобщение результатов численного эксперимента, частично представленных на рис. 1 и 2, показывают, что для рассмотренных конструкций (в случае  $\varepsilon_1 = 1$ ) при различных значениях диэлектрической проницаемости и толщины подстилающего слоя (подложки) указанную приближённую математическую модель конструкции вместо точной можно использовать для расчёта поля в квазистационарном приближении методом ЭПР с приемлемым уровнем погрешности (до 8%), по крайней мере, для расстояний  $r \leq 0,1h$ , где зависимость погрешности от расстояния близка к линейной<sup>7</sup>.

Следует особо отметить, что знак погрешности положительный, т.е. приближённое значение

<sup>6</sup> Имеется в виду принципиальная возможность точного вычисления, не учитывающая погрешность округления.

<sup>7</sup> На самом деле вторая производная  $\partial^2 \Delta / \partial r^2 < 0$ .

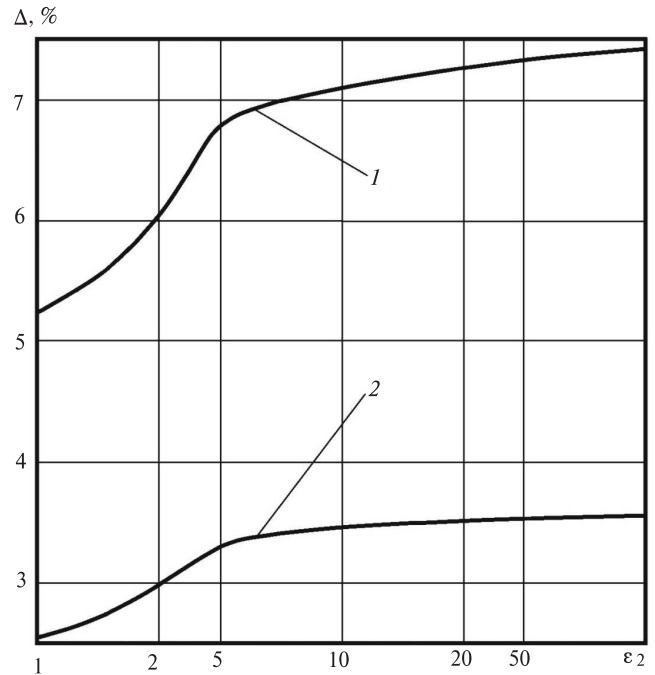


**Рис. 1.** Зависимость относительной погрешности расчёта функции Грина от нормированного азимутального расстояния: 1 – для диэлектрической подложки  $h = 1$  мм,  $\epsilon_2 = 10,5$  в металлическом корпусе с внутренней высотой  $H = 3$  мм; 2 – для диэлектрической подложки  $h = 1,2$  мм,  $\epsilon_2 = 8,5$  в металлическом корпусе внутренней высотой  $H = 5$  мм; 3 – для металлизированной печатной платы  $h = 4$  мм,  $\epsilon_2 = 5,5$ ,  $H = \infty$ ; 4 – для металлизированной печатной платы  $h = 1$  мм,  $\epsilon_2 = 2,5$ ,  $H = \infty$

функции Грина больше точного. Эти особенности зависимости погрешности от расстояния могут быть полезными для проведения коррекции значения функции Грина. Зависимость погрешности от диэлектрической проницаемости на рис. 2 для значений  $\epsilon_2 \geq 20$  представлена для диэлектрических подложек марок В20, В40, В80, В92 и В100 с высокими значениями относительной диэлектрической проницаемости, предназначенных для использования в гибридных интегральных схемах, микроволновых фильтрах и линиях задержки (см. справочное издание [34]).

Что касается верхнего экрана (верхней крышки металлического корпуса), то его влияние становится пренебрежимо малым и может не учитываться математической моделью уже при  $H > 3,5h$ . Влияние слоёв, отделённых слоями толщиной более  $3,5h$  (расположенных за «толстыми» слоями), как правило, можно не учитывать.

**Заключение.** Предлагаемый подход позволяет значительно снизить вычислительную ёмкость це-



**Рис. 2.** Зависимость относительной погрешности расчёта функции Грина от относительной диэлектрической проницаемости платы  $h = 2$  мм,  $H = \infty$ : 1 –  $r/h = 0,1$ ; 2 –  $r/h = 0,05$

лого ряда прикладных задач и даёт возможность моделировать поле как в частотной, так и во временной областях даже в случае использования вычислительной техники широко доступного класса. Метод ЭПР может применяться для моделирования электромагнитного поля произвольно ориентированных излучателей в различных технических областях.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Слышалов В.К., Гречухин В.Н. Математическое моделирование электромагнитного поля коаксиального измерительного шунта. – Электричество, 2010, № 1, с. 54–61.
2. Шишигин С.Л. Математические модели и методы расчёта заземляющих устройств. – Электричество, 2010, № 1, с. 16–23.
3. Конников И.А. Влияние плотности распределения заряда на ёмкость прямоугольной плёнки в слоистой среде. – Электричество, 2007, №3, с. 37–41.
4. Подосенов С.А., Сахаров К.Ю., Соколов А.А. Влияние поверхности земли на распространение сверхкоротких импульсов электромагнитного поля. – Технологии электромагнитной совместимости, 2006, №2 (17), с. 50 – 53.
5. Балюк Н.В., Зеленин А.Н. Метод расчёта взаимодействия импульсного электромагнитного поля с объектом сложной конфигурации. – Технологии электромагнитной совместимости, 2006, №2 (17), с. 54–58.
6. Williams D.F., Hayden L.A., Marks R.B. A Complete Multimode Equivalent-Circuit Theory for Electrical Design. – Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology, 1997, vol.102, No.4, pp. 405–423.
7. Konefal T.A., Dawson J.F., Marvin A. Fast Multiple Mode Intermediate Level Circuit Model for the Prediction of Shielding Effectiveness of a Rectangular Box Containing a Rectangular Aperture. – IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, 2005, vol. 47, No. 4, pp. 678–691.



8. Kochetov S.V., Wollenberg G. Stable and Effective Full-Wave PEEC Models by Full-Spectrum Convolution Macromodeling. — IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, February 2007, vol. 49, No. 1, pp. 25–34.
9. Antonini G., Deschrijver D., Dhaene T. Broadband Macromodels for Retarded Partial Element Equivalent Circuit (rPEEC) Method. — IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, 2007, vol. 49, No. 1, pp. 35–48.
10. Yee K.S. Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media. — IEEE Transactions on Antennas and Propagation, May 1966, vol. 14, No. 3, pp. 302–307.
11. Wallyn W., De Zutter D., Rogier H. Prediction of the Shielding and Resonant Behaviour of Multisection Enclosures Based on Magnetic Current Modeling. — IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, February 2002, vol. 44, No.1, pp. 130–138.
12. Ren K., Railton C.J. Modelling of Microstrip Circuit Using a Hybrid PEEC/FDTD Approach. — IEEE Transactions on Antennas and Propagation, October 2008, vol. 56, No. 10, pp. 3253–3259.
13. Конников И.А. Метод расчёта монохроматического поля в слоистой среде. — Журнал технической физики, 2013, №10, с. 8–12.
14. Конников И.А. Расчёт перекрёстных помех в электронном модуле. — Электромагнитные волны и электронные системы, 2013, №7, с. 53–60.
15. Куфуд О. Зондирование методом сопротивлений. — М.: Недра, 1984, 270 с.
16. Федоров А.И. Математическое моделирование электромагнитных полей в слоистых средах с наклоном осей анизотропии электропроводности: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук, Новосибирск, 2005, 87 с.
17. Говорков В.А. Электрические и магнитные поля. — М.: Л.: Госэнергоиздат, 1960, 464 с.
18. Конников И.А. Математическая модель конструкции микросхемы. — Математическое моделирование, 2007, №4, с. 37–44.
19. Конников И.А. Два способа вычисления функции Грина для уравнения Лапласа. — Прикладная физика, 2007, №2, с. 17–24.
20. Конников И.А. К расчёту квазистационарного поля в задачах электроники. Метод расчёта. — Петербургский журнал электроники, 2013, №3, с. 97–104.
21. Конников И.А. Метод вычисления функции Грина для уравнения Лапласа. — Прикладная физика и математика, 2013, № 6, с. 75–83.
22. Elmore W.C. The Transient response of Damped Linear Networks with Particular Regard to wideband Amplifiers. — Journal of Applied Physics, 1948, №1, pp. 11–15.
23. Конников И.А. Помехи элементарного источника электромагнитного поля в радиоэлектронном модуле. — Технологии электромагнитной совместимости, 2006, №4, с. 18–26.
24. Конников И.А. Приближённый метод вычисления функции Грина для волнового уравнения. — Инженерная физика, 2013, № 5, с.7–12.
25. Конников И.А. Метод расчёта поля излучателя в слоистой среде. — Радиотехника и электроника, 2008, №1, с. 70–72.
26. Конников И.А. Моделирование распределённых RLC-структур. — Известия вузов. Приборостроение, 2006, №12, с. 38–44.
27. Конников И.А. Моделирование электромагнитных наводок в САПР электронных модулей. — Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Приборостроение, 2007, №4(69), с. 3–20.
28. Пановский В., Филипс М. Классическая электродинамика. — М.: Физматгиз, 1963, 432 с.
29. Конников И.А. Расчёт наведенной помехи в электронном модуле. — Авиакосмическое приборостроение, 2013, № 8, с. 39–48.
30. Конников И.А. Принципы организации подсистемы учёта конструктивно-технологических факторов при автоматизированном проектировании микросборок. — Вопросы радиоэлектроники. Сер. ТПО, 1982, вып. 3, с. 8–12.
31. Сиротко В.К. Программа анализа перекрёстных помех в цепях печатных плат. — Технология и конструирование в электронной аппаратуре, 2008, №6, с. 11–22.
32. Конников И.А. Моделирование паразитных электромагнитных эффектов при автоматизированном проектировании электронных модулей. — Информационные технологии, 2007, № 5, с. 9–17.
33. Зоммерфельд А. Электродинамика. — М.: Иностранная литература, 1958, 502 с.
34. Приборостроение и средства автоматизации, 2002, №5, с. 44.

[29.03.2017]

*Автор: Конников Игорь Аркадьевич окончил Ленинградский институт авиационного приборостроения в 1972 г. В 2009 г. защитил докторскую диссертацию «Математическое моделирование паразитных электромагнитных эффектов в электронных модулях».*

*Elektrichestvo (Electricity), 2017, No. 7, pp. 60–67*

*DOI:10.24160/0013-5380-2017-7-60-67*

## Electromagnetic Field Calculation in a Stratified Medium

KONNIKOV Igor' A. (St. Petersburg, Russia) — Dr. Sci. (Eng.)

*Methods for solving the wave equation for plane-stratified media are subjected to a comparative analysis. The essence of the equivalent propagation constant method, a technique featuring a comparatively wide frequency band and posing moderate demand for computation capacities, is outlined. It is shown that the use of the equivalent propagation constant method allows the solution of wave equation to be reduced to solving the Laplace equations for the field electrical and magnetic potentials. The field calculation technique in the time domain is described that is based on calculating the field in the frequency domain and on using the Duhamel integral and the moments of the electromagnetic energy propagation channel's impulse characteristic. The method for calculating the parameters of equivalent circuits using which the integral characteristics of a transient are exactly replicated is briefly described in general form. Analytical*

integral characteristics of a transient are exactly replicated is briefly described in general form. Analytical expressions for the mathematical models of plane-stratified media adequately representing the most widely used structures are given. The computation experiment carried out for quantitatively assessing the possibility of using simplified mathematical models of stratified media instead of their exact models is described.

Key words: electromagnetic field, stratified medium, calculation, wave equation, Laplace equation, equivalent propagation constant

## REFERENCES

1. Slyshalov V.K., Grechukhin V.N. *Elektrichestvo – in Russ (Electricity)*, 2010, No. 1, pp. 54–61.
2. Shishigin S.L. *Elektrichestvo – in Russ. (Electricity)*, 2010, No. 1, pp. 16–23.
3. Konnikov I.A. *Elektrichestvo – in Russ (Electricity)*, 2007, No.3, pp. 37–41.
4. Podosenov S.A., Sakharov K.Yu., Sokolov A.A. *Tekhnologii elektromagnitnoi sovместимости – in Russ. (Electromagnetic Compatibility Technologies)*, 2006, №2 (17), pp. 50–53.
5. Balyuk N.V., Zelenin A.N. *Tekhnologii elektromagnitnoi sovместимости – in Russ. (Electromagnetic Compatibility Technologies)*, 2006, No.2 (17), pp. 54–58.
6. Williams D.F., Hayden L.A., Marks R.B. A Complete Multimode Equivalent-Circuit Theory for Electrical Design. – *Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology*, 1997, vol.102, No.4, pp. 405–423.
7. Konefal T.A., Dawson J.F., Marvin A. Fast Multiple Mode Intermediate Level Circuit Model for the Prediction of Shielding Effectiveness of a Rectangular Box Containing a Rectangular Aperture. – *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 2005, vol. 47, No. 4, pp. 678–691.
8. Kochetov S.V., Wollenberg G. Stable and Effective Full-Wave PEEC Models by Full-Spectrum Convolution Macromodeling. – *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, February 2007, vol. 49, No. 1, pp. 25–34.
9. Antonini G., Deschrijver D., Dhaene T. Broadband Macromodels for Retarded Partial Element Equivalent Circuit (rPEEC) Method. – *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 2007, vol. 49, No. 1, pp. 35–48.
10. Yee K.S. Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media. – *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, May 1966, vol. 14, No. 3, pp. 302–307.
11. Wallyn W., De Zutter D., Rogier H. Prediction of the Shielding and Resonant Behaviour of Multisection Enclosures Based on Magnetic Current Modeling. – *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, February 2002, vol. 44, No.1, pp. 130–138.
12. Ren K., Railton C.J. Modelling of Microstrip Circuit Using a Hybrid PEEC/FDTD Approach. – *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, October 2008, vol. 56, No. 10, pp. 3253–3259.
13. Konnikov I.A. *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki – in Russ. (Technical Physics Journal)*, 2013, No.10, pp. 8–12.
14. Konnikov I.A. *Elektromagnitnye volny i elektronnye sistemy – in Russ. (Electromagnetic waves and electronic systems)*, 2013, No.7, pp. 53–60.
15. Kufud O. *Zondirovaniye metodom soprotivlenii (Resistance sounding)*. Moscow, Publ. «Nedra», 1984, 270 p.
16. Fedorov A.I. *Matematicheskoye modelirovaniye elektromagnitnykh polei v sloistyykh sredakh s naklonom osei anizotropii elektroprovodnosti: Avtoref. dis.... kand. fiz.-mat.nauk (Mathematical modeling of electromagnetic fields in layered media with slope of anisotropy axes of electrical conductivity. Authors abstract of Cand. Sci. (Eng.))*. Novosibirsk, 2005, 87 p.
17. Govorkov V.A. *Elektricheskiye i magnitnye polya (Electrical and magnetic fields)*. Moscow; Leningrad, Gosenergoizdat, 1960, 464 c.
18. Konnikov I.A. *Matematicheskoye modelirovaniye – in Russ. (Mathematical modeling)*, 2007, No. 4, pp. 37–44.
19. Konnikov I.A. *Prikladnaya fizika – in Russ. (Applied physics)*, 2007, No. 2, pp. 17–24.
20. Konnikov I.A. *Peterburgskii zhurnal elektroniki – in Russ. (St. Petersburg electronics journal)*, 2013, No.3, pp. 97–104.
21. Konnikov I.A. *Prikladnaya fizika i matematika – in Russ. (Applied physics and mathematics)*, 2013, No. 6, pp. 75–83.
22. Elmore W.C. The Transient response of Damped Linear Networks with Particular Regard to wideband Amplifiers. – *Journal of Applied Physics*, 1948, No.1, pp. 11–15.
23. Konnikov I.A. *Tekhnologii elektromagnitnoi sovместимости – in Russ. (Electromagnetic Compatibility Technologies)*, 2006, No.4, pp. 18–26.
24. Konnikov I.A. *Inzhenernaya fizika – in Russ. (An Engineering physics)*, 2013, No. 5, pp.7–12.
25. Konnikov I.A. *Radiotekhnika i elektronika – in Russ. (Radiotechnics and electronics)*, 2008, No.1, pp. 70–72.
26. Konnikov I.A. *Izv. vuzov. Priborostroyeniye – in Russ. (News of Higher Education Institutions. Instrumentation)*, 2006, No. 12, pp. 38–44.
27. Konnikov I.A. *Vestnik MGTU im. Baumana. Priborostroyeniye – in Russ. (Bulletin of the Bauman Moscow State Technical University. Instrumentation)*, 2007, No. 4(69), pp. 3–20.
28. Panovskii V., Filips M. *Klassicheskaya elektrodinamika (Classical electricity and magnetism)*. Moscow, Fizmatgiz, 1963, 432 p.
29. Konnikov I.A. *Aviakosmicheskoye priborostroyeniye – in Russ. (Aerospace Instrumentation)*, 2013, No. 8, pp. 39–48.
30. Konnikov I.A. *Voprosy radioelektroniki – in Russ. (Questions of radio electronics)*, 1982, iss. 3, pp. 8–12.
31. Sirotko V.K. *Tekhnologiya i konstruirovaniye v elektronnoi apparature – in Russ. (Technology and design in electronic equipment)*, 2008, No. 6, pp. 11–22.
32. Konnikov I.A. *Informatsionnye tekhnologii – in Russ. (Information technologies)*, 2007, No. 5, pp. 9–17.
33. Zommerfel'd A. *Elektrodinamika (Electrodynamics)*. Moscow, Publ. «Inostrannaya literatura», 1958, 502 p.
34. *Priborostroyeniye i sredstva avtomatizatsii – in Russ. (Instrument making and automation means)*, 2002, No.5, p. 44.

[29.03.2017]