

## Расчет поля равномерно поляризованных и равномерно намагниченных многогранников

НЕЧАЕВ М.А.

*При описании электрических явлений области материала (кристаллы, домены в ферроэлектриках и ферромагнетиках) можно полагать равномерно заряженными по своим объемам, равномерно поляризованными и равномерно намагниченными. Формы областей материала могут быть произвольными, но приближенно их можно считать многогранниками. Рассмотрено определение поля равномерно поляризованного и равномерно намагниченного многогранников, а также равномерно заряженного многогранного тела. Получены выражения для поля и потенциала равномерно заряженной бесконечно тонкой многоугольной пластины; выражения содержат только элементарные функции. Рассмотрены следующие формы пластины: трапеция, прямоугольник, прямоугольный и косоугольный треугольники. Описаны свойства поля равномерно поляризованного и равномерно намагниченного тел произвольной формы. Рассмотрены равномерно поляризованные и равномерно намагниченные тела: прямая призма, многогранник с осью симметрии 3-го и более порядков, бесконечно длинное трапециевидальное тело, усеченный прямой круговой конус.*

**Ключевые слова:** расчет поля, материал различной формы, равномерно заряженные многоугольные пластины, многогранное тело, равномерно поляризованный многогранник, равномерно намагниченный многогранник

При описании многих электрических явлений различные области материала можно считать равномерно заряженными по своим объемам, равномерно (электрически) поляризованными и равномерно намагниченными. Формы таких областей могут быть произвольными, но приближенно их можно считать многогранниками. В природе встречаются кристаллы, которые при решении многих задач можно считать равномерно поляризованными или равномерно намагниченными многогранниками. В ферроэлектриках и ферромагнетиках могут образовываться домены, которые можно считать равномерно поляризованными и равномерно намагниченными многогранниками соответственно.

Задачи определения поля равномерно поляризованных и равномерно намагниченных тел обладают аналогией, связанной с подобием полей электрического и магнитного диполей, поэтому решения обеих задач подобны друг другу. Макроскопические заряды и макроскопические токи в таких телах имеются только на их поверхностях. Можно сказать, что равномерно поляризованный и равномерно намагниченный многогранники состоят из многоугольников, по площадям которых заряды и токи соответственно распределены равномерно. Разумеется, эта идеализация приводит к нефизической расходимости поля вблизи ребер многогранников, для устранения которой идеализацию сле-

дует дополнить соответствующими подробностями. Но в данной работе такие модели не рассматриваются. Расчет поля равномерно поляризованных и равномерно намагниченных многогранников можно построить на основе выражения для поля равномерно заряженной бесконечно тонкой треугольной пластины. Ранее было известно выражение для потенциала такой пластины [1, с. 46], из которого, однако, сразу не следует удобное выражение для поля такой пластины.

**Основные свойства.** Аналогия между электростатическим и магнитостатическим полями. Индукция электрического поля  $\mathbf{D}$  и напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}$  определяются формулами:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}; \quad \mathbf{H} = \mathbf{B} / \mu_0 - \mathbf{M},$$

где  $\mathbf{P}$  – поляризованность среды;  $\mathbf{M}$  – намагниченность среды.

В системе единиц измерения СГС эти формулы имеют вид:

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}; \quad \mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}.$$

Точечный электрический диполь с моментом  $\mathbf{p}$  обладает напряженностью электрического поля

$$\mathbf{E} = k(3(\mathbf{p}\mathbf{r})\mathbf{r} / r^5 - \mathbf{p} / r^3),$$

где  $k = 1 / (4\pi\varepsilon_0)$ ;  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор точки, которой принадлежит значение  $\mathbf{E}$ , относительно диполя. В

системах СГСЭ и СГС  $k=1$ . Точечный магнитный диполь с моментом  $\mathbf{m}$  обладает индукцией магнитного поля

$$\mathbf{B} = k'(3(\mathbf{m}\mathbf{r})\mathbf{r} / r^5 - \mathbf{m} / r^3),$$

где  $k' = \mu_0 / (4\pi)$ ;  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки, которой принадлежит значение  $\mathbf{B}$ , относительно этого диполя. В системе СГСМ  $k'=1$ , в системе СГС  $k'=1/c$ , где  $c$  — скорость света.

Из-за подобия написанных выше формул следует, что напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}$  тела с намагниченностью  $\mathbf{M}$  равна напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  такого же тела с поляризованностью  $\mathbf{P}$ , равной  $\varepsilon_0\mathbf{M}$ . Или, наоборот: напряженность электрического поля  $\mathbf{E}$  тела с поляризованностью  $\mathbf{P}$  равна напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}$  такого же тела с намагниченностью  $\mathbf{M}$ , равной  $\mathbf{P}/\varepsilon_0$ . Аналогично следует, что индукция магнитного поля  $\mathbf{B}$  тела с намагниченностью  $\mathbf{M}$  равна индукции электрического поля  $\mathbf{D}$  такого же тела с поляризованностью  $\mathbf{P}$ , равной  $\mu_0\mathbf{M}$ . Или, наоборот: индукция электрического поля  $\mathbf{D}$  тела с поляризованностью  $\mathbf{P}$  равна индукции магнитного поля  $\mathbf{B}$  такого же тела с намагниченностью  $\mathbf{M}$ , равной  $\mathbf{P}/\mu_0$ . В системе СГС эта аналогия отличается тем, что поляризованность  $\mathbf{P}$  заменяется намагниченностью  $\mathbf{M}$ , а намагниченность  $\mathbf{M}$  — поляризованностью  $\mathbf{P}$ .

Поверхностная плотность заряда равномерно поляризованного тела

$$\sigma = \mathbf{P}\mathbf{n}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали к поверхности тела в точке, к которой относится значение  $\sigma$ . В системах СИ, СГСЭ и СГС эта формула имеет одинаковый вид. Линейная плотность поверхностного тока равномерно намагниченного тела

$$\mathbf{i} = \mathbf{M} \times \mathbf{n},$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали к поверхности этого тела в точке, к которой относится значение  $\mathbf{i}$ . В системах СИ и СГСМ эта формула имеет одинаковый вид, в системе СГС имеет вид  $\mathbf{i} = c\mathbf{M} \times \mathbf{n}$ .

Рассчитывать магнитное поле по закону Био—Савара труднее, чем электрическое поле по закону Кулона. Поэтому для расчета магнитного поля системы равномерно намагниченных тел удобнее пользоваться 1-й частью (из 4-х частей) приведенной здесь аналогии, т.е. для расчета напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}$  тела с намагниченностью  $\mathbf{M}$  следует искать напряженность электрического поля  $\mathbf{E}$  такого же тела с поляризован-

ностью  $\mathbf{P}$ , равной  $\varepsilon_0\mathbf{M}$ . Тогда по (1) поверхностная плотность заряда равномерно намагниченного тела  $\sigma = \varepsilon_0\mathbf{M}\mathbf{n}$ ; в системе СГС  $\sigma = \mathbf{M}\mathbf{n}$ . Этот метод называют методом магнитных зарядов.

*Основная формула.* В дальнейшем много раз потребуется одна формула. Рассмотрим равномерно заряженную электрическим зарядом область плоскости. Заряд элемента области

$$dq = \sigma ds,$$

где  $\sigma$  — поверхностная плотность заряда области;  $ds$  — площадь элемента. Поле элемента

$$d\mathbf{E} = -kdq\mathbf{r} / r^3 = -k\sigma d\mathbf{s}\mathbf{r} / r^3,$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор элемента относительно точки наблюдения поля. Нормальная составляющая поля элемента

$$d\mathbf{E}_n = -k\sigma ds \cos\vartheta / r^2,$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, направленный перпендикулярно плоскости из соответствующей точки плоскости в точку наблюдения поля;  $\vartheta$  — угол между векторами  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{n}$ . В этом равенстве величина  $-ds \cos\vartheta$  есть площадь проекции элемента на сферу с радиусом  $r$  и центром, находящимся в точке наблюдения поля (рис. 1). Значит, это равенство можно написать в виде

$$d\mathbf{E}_n = k\sigma d\Omega\mathbf{n},$$

где  $d\Omega$  — телесный угол, под которым виден элемент из точки наблюдения поля. Отсюда нормальная составляющая поля всей области

$$E_n = k\sigma\Omega, \quad (2)$$

где  $\Omega$  — телесный угол, под которым видна область из точки наблюдения поля; аналогичная формула получена в [2, с. 23].

*Тело произвольной формы.* Заменим поверхность выпуклого равномерно поляризованного тела по-

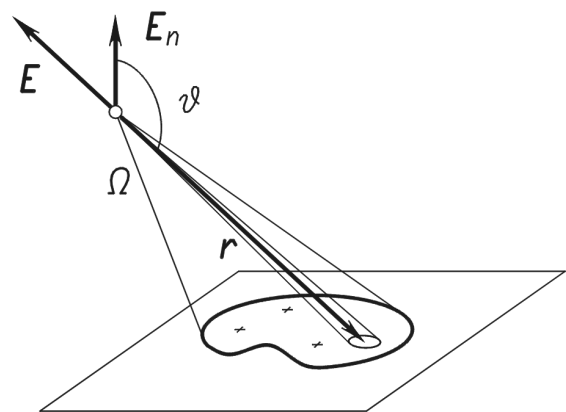


Рис. 1. К выводу формулы (2)

верхностью, описывающей тело и состоящей из площадей бесконечно малых прямоугольников с плоскостями, перпендикулярными соответствующим осям декартовой прямоугольной системы координат  $Oxuz$ . Тогда тело получит бесконечно малое увеличение объема (рис. 2). Будем считать, что точка наблюдения поля полученного тела находится на много дальше от его поверхности, чем наибольшая толщина добавленного объема. Следовательно, тогда поля исходного и полученного тел отличаются бесконечно мало.

Воспользовавшись (1) и (2), получим, что составляющая поля по оси  $Ox$  внутри полученного тела при поляризованности  $P$ , параллельной этой оси,

$$E_x^{(i)} = -kP \sum \Omega_x,$$

где  $\Omega_x$  — телесный угол, под которым виден прямоугольник с плоскостью, перпендикулярной оси  $Ox$ , из точки, к которой относится значение  $E_x^{(i)}$ , а суммирование проводится для всех таких прямоугольников. Следовательно,

$$E_x^{(i)} + E_y^{(i)} + E_z^{(i)} = -kP(\sum \Omega_x + \sum \Omega_y + \sum \Omega_z),$$

где  $E_x^{(i)}$ ,  $E_y^{(i)}$  и  $E_z^{(i)}$  — составляющие напряженности электрического поля по осям  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  соответственно в точке, находящейся внутри тела, при поляризованностях  $P$ , равных по модулю друг другу и сонаправленных осям  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  соответственно. По рис. 2 легко видеть, что сумма  $\sum \Omega_x + \sum \Omega_y + \sum \Omega_z$  есть телесный угол, заполнивший все пространство, значит,

$$E_x^{(i)} + E_y^{(i)} + E_z^{(i)} = -4\pi kP. \quad (3)$$

Аналогично докажем равенство

$$E_x^{(e)} + E_y^{(e)} + E_z^{(e)} = 0, \quad (4)$$

где  $E_x^{(e)}$ ,  $E_y^{(e)}$ ,  $E_z^{(e)}$  — те же составляющие  $E_x^{(i)}$ ,  $E_y^{(i)}$  и  $E_z^{(i)}$ , но точка наблюдения поля находится

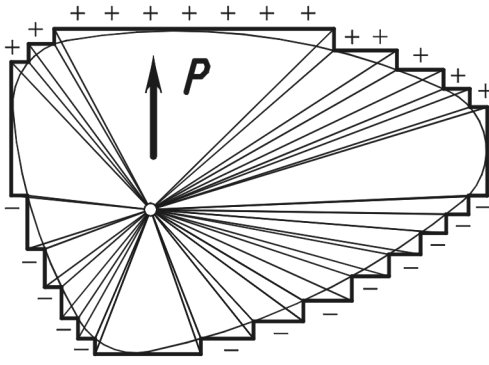


Рис. 2. К доказательству свойства (3)

вне тела. Следовательно, свойствами (3) и (4) обладает равномерно поляризованное тело произвольной формы. Эти свойства можно написать в виде:

$$D_x^{(i)} + D_y^{(i)} + D_z^{(i)} = 2P \text{ (СИ);}$$

$$D_x^{(i)} + D_y^{(i)} + D_z^{(i)} = 8\pi P \text{ (СГС);}$$

$$D_x^{(e)} + D_y^{(e)} + D_z^{(e)} = 0.$$

Равномерно поляризованным телом можно считать произвольную совокупность одинаково поляризованных бесконечно малых тел. Следовательно, равенство (4) справедливо также для произвольной системы точечных электрических диполей. Тогда в этом равенстве  $E_x^{(e)}$ ,  $E_y^{(e)}$ ,  $E_z^{(e)}$  — составляющие поля при направлениях диполей по осям  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  соответственно.

Воспользовавшись аналогией между электростатическим и магнитостатическим полями, напомним полученные свойства для равномерно намагниченного тела:

$$H_x^{(i)} + H_y^{(i)} + H_z^{(i)} = -M \text{ в системе СИ;}$$

$$H_x^{(i)} + H_y^{(i)} + H_z^{(i)} = -4\pi M \text{ в системе СГС;}$$

$$H_x^{(e)} + H_y^{(e)} + H_z^{(e)} = 0; \quad (5)$$

$$B_x^{(i)} + B_y^{(i)} + B_z^{(i)} = 8\pi k'M;$$

$$B_x^{(e)} + B_y^{(e)} + B_z^{(e)} = 0,$$

где  $H_x^{(i)}$ ,  $H_y^{(i)}$ ,  $H_z^{(i)}$ ,  $H_x^{(e)}$ ,  $H_y^{(e)}$ ,  $H_z^{(e)}$ ,  $B_x^{(i)}$ ,  $B_y^{(i)}$ ,  $B_z^{(i)}$ ,  $B_x^{(e)}$ ,  $B_y^{(e)}$ ,  $B_z^{(e)}$  — составляющие напряженности и индукции магнитного поля по осям  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  при намагниченностях  $M$ , равных по модулю друг другу и сонаправленных этим осям. Равенство (5) справедливо также для произвольной системы точечных магнитных диполей.

**Равномерно заряженные многоугольники.** *Отрезок.* Заменим равномерно заряженный отрезок прямоугольником. Тогда одна сторона прямоугольника должна стремиться совпасть с отрезком, а другая сторона  $b$  должна быть бесконечно малой. Поверхностная плотность заряда прямоугольника

$$\sigma = \tau / b,$$

где  $\tau$  — линейная плотность заряда отрезка. Вектор  $\mathbf{n}$  нормали к плоскости прямоугольника направим перпендикулярно отрезку из соответствующей точки прямой отрезка в точку наблюдения поля. Телесный угол, под которым виден элемент прямоугольника из точки наблюдения поля,

$$d\Omega = -\frac{b}{r} d\vartheta,$$

где  $r$  — длина радиус-вектора  $\mathbf{r}$  элемента прямоугольника относительно точки наблюдения поля;  $\vartheta$  — угол между векторами  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  ( $\mathbf{r}_2$  и  $\mathbf{r}_1$  — радиус-векторы концов отрезка относительно точки наблюдения поля). Подставим выражения для  $\sigma$  и  $d\Omega$  в (2), полученную формулу запишем в виде

$$dE_n = k \frac{\tau}{|r_n|} d\cos\vartheta, \quad (6)$$

где  $|r_n|$  — расстояние между точкой наблюдения поля и прямой отрезка, отсюда

$$d\mathbf{E} = k \frac{\tau}{|r_n|} d\vartheta \frac{\mathbf{r}}{r},$$

где  $\mathbf{r}$  — теперь радиус-вектор элемента отрезка. Следовательно, вектор  $\mathbf{E}$  поля равномерно заряженного отрезка лежит на биссектрисе угла, под которым виден отрезок из точки наблюдения поля. Из (6) также следует

$$E_n = k \frac{\tau}{|r_n|} (\cos\vartheta_2 - \cos\vartheta_1), \quad (7)$$

где  $\vartheta_2$  — угол между векторами  $\mathbf{r}_2$  и  $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ ;  $\vartheta_1$  — угол между векторами  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ .

**Полоса.** Потенциал равномерно заряженной полосы

$$\varphi = \int_{h_0}^{\infty} E_n dh,$$

где  $E_n$  — нормальная составляющая поля полосы в точке перпендикуляра к плоскости полосы;  $h$  — расстояние между этой точкой и плоскостью;  $h_0$  — расстояние  $h$  для точки, к которой относится значение  $\varphi$ . Следует сказать, что значения потенциала равномерно заряженной полосы по модулю бесконечно велики во всех точках пространства. Конечное значение может иметь разность потенциалов между двумя точками. Подставим сюда формулу (2) и воспользуемся формулой

$$E_x = -\frac{\partial}{\partial x} \varphi,$$

где  $x$  — прямоугольная координата по оси  $Ox$ , перпендикулярной границам полосы и параллельной плоскости полосы;  $E_x$  — составляющая поля полосы по  $Ox$ . В результате

$$E_x = k\sigma \ln \frac{r_1^2}{r_2^2}, \quad (8)$$

где  $\sigma$  — поверхностная плотность заряда полосы;  $r_1$  и  $r_2$  — расстояния между точкой наблюдения поля и границами полосы, относящиеся к границам с

координатами  $x_1$  и  $x_2$  соответственно, причем  $x_1 < x_2$ .

**Трапеция.** Рассмотрим трапецию, равномерно заряженную по своей площади, с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$ . Воспользовавшись (7) и (8), получим, что вертикальная составляющая (т.е. составляющая по оси, направленной перпендикулярно основаниям трапеции от нижнего основания к прямой верхнего основания) поля трапеции в точке пересечения прямых боковых сторон трапеции

$$E_y = k\sigma (\cos A_1 + \cos A_2) \ln \frac{h_2}{h_1},$$

где  $A_1$  и  $A_2$  — углы при нижнем основании трапеции;  $h_1$  и  $h_2$  — расстояния между этой точкой и основаниями, причем  $h_1 < h_2$ . Если трапеция равнобедренная, то поле направлено вертикально и определяется формулой

$$E = k\sigma \sin B \ln \frac{h_2}{h_1}, \quad (9)$$

где  $B$  — полуугол между боковыми сторонами.

**Прямоугольник.** Рассмотрим прямоугольник, равномерно заряженный по своей площади, с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$ . Введем декартову систему координат с осью абсцисс, параллельной двум сторонам прямоугольника и осью ординат, параллельной двум другим сторонам прямоугольника. Разделим прямоугольник на элементы, представляющие собой прямоугольники, у каждого из которых две стороны параллельны оси ординат и равны стороне всего прямоугольника, а две другие стороны бесконечно малы (рис. 3). Воспользовавшись формулой (6), напишем выражение для составляющей поля элемента по оси абсцисс в начале координат:

$$dE_x = -k\sigma \frac{dx}{\sqrt{x^2 + z^2}} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Big|_{y_1}^{y_2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}},$$

где  $x, y, z$  — абсцисса, ордината и аппликата точки элемента;  $y_1, y_2$  — наименьшая и наибольшая ор-

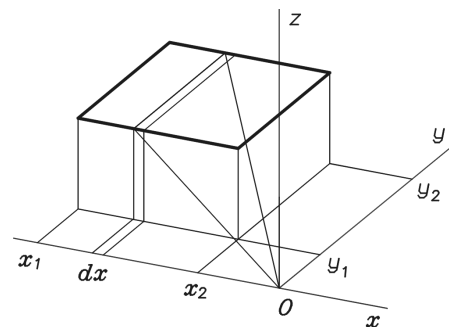


Рис. 3. К нахождению тангенциальной составляющей поля равномерно заряженного прямоугольника

динаты всего прямоугольника. Отсюда составляющая поля всего прямоугольника по оси абсцисс

$$E_x = k\sigma \operatorname{arsh} \frac{y}{\sqrt{x^2 + z^2}} \Big|_{y_1}^{y_2} \Big|_{x_1}^{x_2}, \quad (10)$$

где  $x_1$  и  $x_2$  — наименьшая и наибольшая абсциссы всего прямоугольника.

**Прямоугольный треугольник.** Рассмотрим прямоугольный треугольник, равномерно заряженный по своей площади, с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$ . Введем декартову систему координат с осью абсцисс, параллельной катету  $a$  треугольника, осью ординат, параллельной другому катету треугольника, и осью аппликат, проходящей через тот конец катета  $a$ , в котором находится вершина тупого угла  $B$  треугольника. Направления осей выберем так, чтобы для треугольника выполнялись неравенства  $x \geq 0$  и  $y \geq 0$ . Воспользовавшись формулой (6) аналогично действиям, приведенным выше, запишем выражение для составляющей поля треугольника по оси абсцисс в начале координат:

$$E_x = -k\sigma \int_0^a \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}} \frac{x \operatorname{ctg} A}{\sqrt{x^2 + x^2 \operatorname{ctg}^2 A + z^2}} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + z^2}},$$

где  $x$  и  $z$  — абсцисса и аппликата того элемента треугольника, к которому относится значение  $dE_x$ ;  $A$  — противолежащий катету  $a$  угол треугольника. В результате

$$E_x = -k\sigma X(A, a, z), \quad (11)$$

где

$$X(A, a, z) = \cos A \operatorname{arsh} \frac{a}{|z| \sin A} - \operatorname{arsh} \frac{\operatorname{actg} A}{\sqrt{a^2 + z^2}}.$$

Аналогично получим выражение для составляющей поля треугольника по оси ординат в начале координат:

$$E_y = -k\sigma \int_0^{\operatorname{actg} A} \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}} \times \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + y^2 + z^2}} - \frac{y \operatorname{tg} A}{\sqrt{y^2 \operatorname{tg}^2 A + y^2 + z^2}} \right) \times \frac{dy}{\sqrt{y^2 + z^2}} = -k\sigma Y(A, a, z), \quad (12)$$

где

$$Y(A, a, z) = \operatorname{arsh} \frac{a}{|z|} - \sin A \operatorname{arsh} \frac{a}{|z| \sin A}.$$

Эту формулу можно получить также из (10) и (11).

Рассмотрим проекцию треугольника на сферу относительно ее центра, находящегося на оси аппликат. Такой проекцией является сферический треугольник. Его углы  $A$  и  $B$  являются проекциями косых углов  $A$  и  $B$  плоского треугольника. Проекцией прямого угла плоского треугольника является прямой угол сферического треугольника. Оба угла  $A$  и  $B$  — косые, причем  $B = B$  (рис. 4). Телесный угол, под которым видны и сферический, и плоский треугольники из центра сферы,

$$\Omega = A + B - \pi / 2. \quad (13)$$

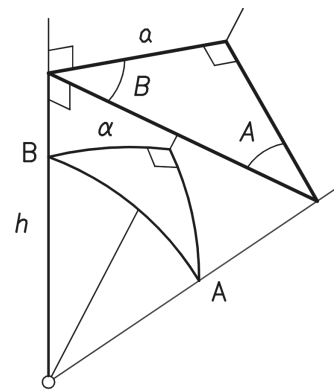


Рис. 4. К равенству (14)

Имеет место равенство

$$\cos A = \sin B \cos \alpha, \quad (14)$$

где  $\alpha$  — противолежащий углу  $A$  катет сферического треугольника.

Потенциал исходного треугольника в начале координат

$$\varphi = \int_{|z|}^{\infty} E_n dh,$$

где  $E_n$  — нормальная составляющая поля исходного треугольника в точке оси аппликат;  $h$  — расстояние между этой точкой и плоскостью треугольника. Подставив сюда равенства (2), (13) и (14), получим

$$\varphi = k\sigma \int_{|z|}^{\infty} \{-\arcsin(\sin B \cos \alpha) + B\} dh.$$

В результате с учетом равенства  $h = \operatorname{actg} \alpha$  получим

$$\varphi = k\sigma a F(A, a, z), \quad (15)$$

где

$$F(A, a, z) = \operatorname{arsh} \frac{\operatorname{actg} A}{\sqrt{a^2 + z^2}} - \frac{|z|}{a} \left( \arccos \frac{|z| \cos A}{\sqrt{a^2 + z^2}} - A \right).$$

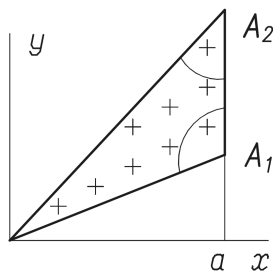


Рис. 5. Равномерно заряженный косоугольный треугольник и два составляющих его прямоугольных треугольника

**Косоугольный треугольник.** Косоугольный треугольник, равномерно заряженный по своей площади, составим из двух равномерно заряженных по своим площадям прямоугольных треугольников с общим катетом  $a$ . Поверхностные плотности зарядов двух треугольников могут быть либо одинаковыми, либо противоположными друг другу (на рис. 5 эти плотности противоположны). Воспользовавшись формулами (11) и (12), запишем выражения для составляющих поля косоугольного треугольника по осям абсцисс и ординат в начале общей системы координат прямоугольных треугольников:

$$\begin{aligned} E_x &= -k\sigma[X(A_1, a, z) + X(A_2, a, z)]; \\ E_y &= -k\sigma[Y(A_2, a, z) - Y(A_1, a, z)], \end{aligned} \quad (16)$$

где  $\sigma$  — поверхностная плотность заряда косоугольного треугольника;  $A_1$  и  $A_2$  — те углы косоугольного треугольника, вершины которых имеют абсциссы  $a$ , причем ордината вершины угла  $A_1$  меньше ординаты вершины угла  $A_2$ . Воспользовавшись формулой (15), запишем выражение для потенциала косоугольного треугольника в начале координат:

$$\varphi = k\sigma a[F(A_1, a, z) + F(A_2, a, z)]. \quad (17)$$

При  $z=0$   $\varphi = k\sigma a(\operatorname{arsh} \operatorname{ctg} A_1 + \operatorname{arsh} \operatorname{ctg} A_2) = k\sigma a(\operatorname{arth} \cos A_1 + \operatorname{arth} \cos A_2)$ .

**Произвольный многоугольник.** Произвольный  $m$ -угольник, равномерно заряженный по своей площади, составим из  $m$  равномерно заряженных по своим площадям треугольников с общей вершиной (рис. 6). Противолежащие этой вершине стороны треугольников совпадают с соответствующими сторонами  $m$ -угольника. В случаях, когда треугольник и  $m$ -угольник имеют общую ненулевую площадь, их поверхностные плотности зарядов одинаковы, в других случаях плотности противоположны друг другу. Воспользовавшись формулами (16), можно найти тангенциальную составляющую поля всего  $m$ -угольника в общем начале систем координат треугольников. Нормальную составляющую поля  $m$ -угольника можно найти по (2), где

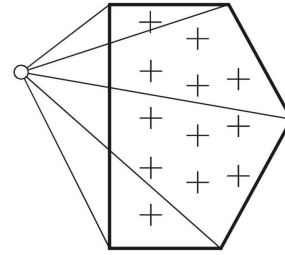


Рис. 6. Равномерно заряженный многоугольник и составляющие его треугольники

$$\Omega = A_1 + \dots + A_m - (m-2)\pi, \quad (18)$$

где  $A_1, \dots, A_m$  — двугранные углы между соседними гранями  $m$ -гранного угла, ограничивающего телесный угол  $\Omega$  (при  $m=2$   $m$ -угольник становится плоской).

Пусть точка наблюдения поля лежит на плоскости многоугольника, но не на его границе, тогда по формулам (16) поле многоугольника получается неопределенным. Но поскольку это поле конечно, все члены разложения его выражения в степенной ряд по  $z$  с отрицательными степенями должны взаимно уничтожиться. Следовательно, формулы (16) для нахождения поля многоугольника при  $z=0$  можно написать в виде

$$\begin{aligned} E_x &= k\sigma(\operatorname{arth} \cos A_1 + \operatorname{arth} \cos A_2) = \\ &= k\sigma(\operatorname{arsh} \operatorname{ctg} A_1 + \operatorname{arsh} \operatorname{ctg} A_2); \quad E_y = 0. \end{aligned}$$

Потенциал многоугольника  $\varphi$  можно найти, воспользовавшись формулой (17), применив также формулу  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ , поле многоугольника можно найти иначе.

**Многогранники.** *Равномерная пространственная плотность заряда.* Рассмотрим многогранную пирамиду, равномерно заряженную по своему объему. Разобьем пирамиду на параллельные ее основанию пластины равной толщины. Поля различных пластин по отдельности в вершине пирамиды равны друг другу. Следовательно, поле в вершине пирамиды равно полю многоугольника, которым является основание пирамиды и поверхностная плотность заряда которого

$$\sigma = \rho h,$$

где  $\rho$  — пространственная плотность заряда тела пирамиды;  $h$  — высота пирамиды.

Равномерно заряженное многогранное тело можно составить из равномерно заряженных пирамидальных тел с общей вершиной аналогично тому, как выше был составлен многоугольник из треугольников. Следовательно, применяя формулы, полученные выше, можно найти поле и потенциал равномерно заряженного многогранного тела.

*Равномерная поляризованность и равномерная намагниченность.* Поле равномерно поляризованного

многогранника состоит из полей его граней. Поверхностные плотности зарядов граней можно найти по формуле (1). Значит, применяя формулы, полученные выше, можно найти поле и потенциал равномерно поляризованного многогранника. Для нахождения поля равномерно намагниченного многогранника удобен изложенный выше метод магнитных зарядов.

**Прямая призма.** Поле равномерно поляризованной прямой призмы при поляризованности, перпендикулярной основаниям призмы, в ее главной плоскости симметрии можно найти, воспользовавшись формулой (2), где значение  $\Omega$  находится по (18). Следовательно, воспользовавшись формулой (2), можно найти также поле равномерно намагниченной прямой призмы при намагниченности, перпендикулярной основаниям призмы, в ее главной плоскости симметрии.

**Многогранник с осью симметрии 3-го и более порядка.** Рассмотрим равномерно поляризованный многогранник с осью симметрии 3-го и более порядка. Ввиду симметрии многогранника из свойства (3) следует

$$E_{\perp}^{(i)} = -2\pi k P - E_{\parallel}^{(i)} / 2, \quad (19)$$

где  $E_{\parallel}^{(i)}$  и  $E_{\perp}^{(i)}$  – напряженности электрического поля внутри многогранника на оси при поляризованности, равных по значению  $P$ , причем  $E_{\parallel}^{(i)}$  – при поляризованности, параллельной оси, а  $E_{\perp}^{(i)}$  – при поляризованности, перпендикулярной оси. Из свойства (4) аналогично следует

$$E_{\perp}^{(e)} = -E_{\parallel}^{(e)} / 2, \quad (20)$$

где  $E_{\parallel}^{(e)}$  и  $E_{\perp}^{(e)}$  – те же поля  $E_{\parallel}^{(i)}$  и  $E_{\perp}^{(i)}$ , но точка наблюдения поля находится вне многогранника. С помощью (19) и (20) можно найти поле такого многогранника на его оси при произвольном направлении поляризованности.

Для равномерно намагниченного многогранника с осью симметрии 3-го и более порядка формулы, аналогичные (19) и (20), имеют вид:

$$H_{\perp}^{(i)} = -M / 2 - H_{\parallel}^{(i)} / 2 \quad (\text{СИ});$$

$$H_{\perp}^{(i)} = -2\pi M - H_{\parallel}^{(i)} / 2 \quad (\text{СГС});$$

$$H_{\perp}^{(e)} = -H_{\parallel}^{(e)} / 2,$$

где  $H_{\parallel}^{(i)}$  и  $H_{\perp}^{(i)}$ ,  $H_{\parallel}^{(e)}$  и  $H_{\perp}^{(e)}$  – напряженности магнитного поля такого многогранника на его оси при

намагниченностях, равных по значению  $M$ , и при направлениях намагниченности, параллельном и перпендикулярном оси, соответственно. Отсюда

$$B_{\perp}^{(i)} = 4\pi k' M - B_{\parallel}^{(i)} / 2;$$

$$B_{\perp}^{(e)} = -B_{\parallel}^{(e)} / 2.$$

**Бесконечно длинное трапецеидальное тело.** Поле равномерно поляризованного бесконечно длинного трапецеидального тела состоит из полей равномерно заряженных полос. Поля оснований тела в точке, находящейся на пересечении плоскостей боковых граней тела, взаимно уничтожаются. Пусть поперечное сечение тела – равнобедренная трапеция. По (1) при поляризованности  $P$ , направленной перпендикулярно основаниям тела от нижнего основания к верхнему, поверхностная плотность заряда боковых граней

$$\sigma = P \cos \alpha,$$

где  $\alpha$  – полуугол между боковыми гранями. Воспользовавшись этим равенством и формулой (8), найдем, что поле в точке на пересечении плоскостей боковых граней при поляризованности  $P_{\parallel}$ , параллельной оси симметрии тела,

$$E_{\parallel} = 2k P_{\parallel} \sin 2\alpha \ln \frac{h_2}{h_1}, \quad (21)$$

где  $h_1$  и  $h_2$  – расстояния между этой точкой и основаниями тела, причем  $h_1 < h_2$ . Поле в этой точке при поляризованности  $P_{\perp}$ , перпендикулярной оси симметрии тела (рис. 7) и параллельной поперечной плоскости тела,

$$E_{\perp} = -2k P_{\perp} \sin 2\alpha \ln \frac{h_2}{h_1}. \quad (22)$$

Если  $P_{\parallel} = P_{\perp}$ , то  $E_{\parallel} + E_{\perp} = 0$ . Это равенство следует также из свойства (4). Из (21) и (22) следует, что модуль поля в этой точке максимален при

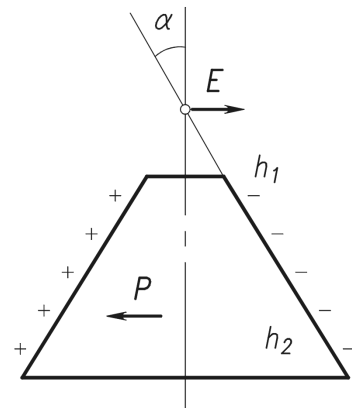


Рис. 7. К нахождению поля на пересечении плоскостей боковых граней бесконечно длинного трапецеидального тела

$\alpha = \pi/4$  и не зависит от направления поляризованности в поперечной плоскости тела.

Для равномерно намагниченного бесконечно длинного трапецеидального тела формулы, аналогичные формулам (21) и (22), имеют вид:

$$B_{\parallel} = 2k'M_{\parallel} \sin 2\alpha \ln \frac{h_2}{h_1}; \quad B_{\perp} = -2k'M_{\perp} \sin 2\alpha \ln \frac{h_2}{h_1},$$

где  $B_{\parallel}$  и  $B_{\perp}$  — значения поля в точке, находящейся на пересечении плоскостей боковых граней такого тела, при намагниченностях  $M_{\parallel}$  и  $M_{\perp}$  соответственно, параллельных поперечной плоскости тела, причем намагниченность  $M_{\parallel}$  параллельна оси симметрии тела, а намагниченность  $M_{\perp}$  перпендикулярна ей. Если  $M_{\parallel} = M_{\perp}$ , то  $B_{\parallel} + B_{\perp} = 0$ . Это равенство следует также из свойства (5). Модуль поля в этой точке максимален при  $\alpha = \pi/4$  и не зависит от направления намагниченности в поперечной плоскости тела.

Конус. Рассмотрим равномерно поляризованный усеченный прямой круговой конус. Поля оснований конуса в его вершине взаимно уничтожаются. Боковую поверхность конуса разобьем на трапецеидальные элементы. Воспользовавшись формулами (1) и (9), получим, что поле конуса в вершине при поляризованности  $P_{\parallel}$ , параллельной оси конуса,

$$E_{\parallel} = 2\pi k P_{\parallel} \sin^2 \alpha \cos \alpha \ln \frac{h_2}{h_1}, \quad (23)$$

где  $\alpha$  — полуугол раствора конуса;  $h_1$  и  $h_2$  — расстояния между вершиной и основаниями, причем  $h_1 < h_2$ . Поле в вершине при поляризованности  $P_{\perp}$ , перпендикулярной оси,

$$E_{\perp} = -\pi k P_{\perp} \sin^2 \alpha \cos \alpha \ln \frac{h_2}{h_1}. \quad (24)$$

Если  $P_{\parallel} = P_{\perp}$ , то  $E_{\parallel} + 2E_{\perp} = 0$ . Это равенство следует также из свойства (4). Модули полей  $E_{\parallel}$  и  $E_{\perp}$  максимальны при  $\alpha = \arctg \sqrt{2} \approx 55^\circ$ , при этом  $E_{\parallel} \approx 0,19 \cdot 4\pi k P \ln(h_2/h_1)$ .

Для равномерно намагниченного конуса формулы, аналогичные (23) и (24), имеют вид:

$$B_{\parallel} = 2\pi k' M_{\parallel} \sin^2 \alpha \cos \alpha \ln \frac{h_2}{h_1};$$

$$B_{\perp} = -\pi k' M_{\perp} \sin^2 \alpha \cos \alpha \ln \frac{h_2}{h_1},$$

где  $B_{\parallel}$  и  $B_{\perp}$  — значения поля в вершине такого конуса при намагниченностях  $M_{\parallel}$  и  $M_{\perp}$  соответственно, причем  $M_{\parallel}$  параллельна оси конуса, а намагниченность  $M_{\perp}$  — перпендикулярна ей. Если  $M_{\parallel} = M_{\perp}$ , то  $B_{\parallel} + 2B_{\perp} = 0$ . Это равенство следует также из свойства (5). Модули полей  $B_{\parallel}$  и  $B_{\perp}$  максимальны при  $\alpha = \arctg \sqrt{2} \approx 55^\circ$ ; при этом  $B_{\parallel} \approx 0,19 \cdot 4\pi k' M \ln(h_2/h_1)$ . Кроме того, при этом значении угла  $\alpha$  конический соленоид с равномерной намоткой и заданными значениями  $h_1$  и  $h_2$  обладает наибольшим значением поля в своей вершине.

Итак, получены выражения для поля равномерно поляризованного и равномерно намагниченного многогранников. Выражения содержат только элементарные функции.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иосель Ю.Я. Расчет емкости элементов электротехнических аппаратов и устройств. — М.: Информэлектро, 1985, 60 с.
2. Сивухин Д.В. Электричество. Общий курс физики. — М.: Наука, 1977, т. III, 688 с.

[23.04.2017]

Автор: *Нечаев Михаил Александрович* окончил физический факультет Красноярского госуниверситета в 1993 г. В настоящее время постоянной работы не имеет.

## Calculating the Field of Uniformly Polarized and Uniformly Magnetized Polyhedrons

NECHAYEV Mikhail A. (Krasnoyarsk, Russia) — Currently, there is no permanent job

*In describing electrical phenomena in material areas (crystals and domains in ferroelectrics and ferromagnetics), the latter can be regarded to be uniformly charged over their volumes, uniformly polarized, and uniformly magnetized. The material areas may have arbitrary shapes, but in a first approximation they can be considered to be polyhedral. The problem of determining the field of uniformly polarized and uniformly magnetized polyhedrons, and the field of a uniformly charged polyhedral body is considered. Expressions for the field and potential of a uniformly charged infinitesimally thin polygonal plate are obtained, which contain only elementary functions. The following plate shapes are considered: trapezoid,*



rectangle, and rectangular and oblique triangles. Features pertinent to the field of arbitrarily shaped uniformly polarized and uniformly magnetized bodies are described. The following uniformly polarized and uniformly magnetized bodies are considered: a right-angle prism, a polyhedron with the symmetry axis of the third and higher orders, an infinitely long trapezoid body, and a truncated right circular cone.

**Key words:** field calculation, materials with different shapes, uniformly charged polygonal plates, polyhedral body, uniformly polarized polyhedron, uniformly magnetized polyhedron

---

REFERENCES

1. **Iossel' Yu.Ya.** *Raschet emkosti elementov elektrotekhnicheskikh apparatov i ustroystv* (Calculation of the capacity of electrical devices and devices). Moscow, Publ. «Informelekro», 1985, 60 p.

2. **Sivukhin D.V.** *Elektrichestvo. Obshchii kurs fiziki (Electricity General physics course)*. Moscow, Publ. «Nauka», 1977, vol. III, 688 p.