

## Аналитическая модель магнитного поля в ярме магнитоэлектрического вентильного двигателя

АФАНАСЬЕВ А.А.

*Процессы в магнитоэлектрическом вентильном двигателе могут рассматриваться в немагнитном зазоре, к которому следует отнести и слой высокоэнергетического магнита. Комплексные периодические потенциальные функции являются математической основой для аналитического решения задачи Дирихле как в немагнитном зазоре в виде бесконечной горизонтальной полосы с границами из двух параллельных прямых, так и в аналогичных полосах с однородной магнитной проницаемостью ярм статора и ротора. Мнимые составляющие комплексных потенциальных функций на границах указанных полос, представленные тригонометрическими рядами Фурье, являются известными скалярными магнитными потенциалами источников магнитного поля – обмотки статора и постоянных магнитов ротора. Для выполнения граничных условий магнитных полей в полосах ярма реализуется процедура приведения этих полей к магнитному полю в воздушном зазоре с помощью специальных коэффициентов для каждой из гармоник в радиальных и тангенциальных составляющих магнитной индукции. Выбор значения однородно распределенной в массиве ярма магнитной проницаемости определяется по максимальному значению магнитной индукции внутри ярма без учета импульсных значений индукции на границах с воздушным зазором. Представлены графики распределения магнитных полей в ярмах, соответствующие полученным аналитическим зависимостям.*

**К л ю ч е в ы е с л о в а:** магнитоэлектрический вентильный двигатель, участки ярма, полевая аналитическая модель, периодические комплексные потенциальные функции, граничные условия магнитных полей

Основные физические явления в электрических машинах (взаимное преобразование электромагнитных и механических энергий, формирование электромагнитного момента) происходят в воздушном зазоре между статором и ротором. Массив современного высокоэнергетического магнита, имеющего относительную магнитную проницаемость, близкую к единице, также можно отнести к немагнитному зазору.

С помощью периодических комплексных потенциальных функций может быть описано магнитное поле в воздушном зазоре, имеющем вид бесконечной полосы с гладкими границами, содержащее, тем не менее, обмоточные и зубцовые гармоники, обусловленные источниками магнитных полей статора и ротора.

Участки ярма магнитопроводов статора и ротора можно представить также в виде двух бесконечных полос соответствующей ширины, примыкающих сверху и снизу к бесконечной полосе воздушного зазора.

**Магнитное поле в ярме статора.** Источником поля – МДС обмотки статора. Ярмо статора представлено в виде бесконечной полосы шириной  $\delta_1$  с относительной магнитной проницаемостью  $\mu_{к1}$ . На об-

щей границе этой полосы и полосы воздушного зазора расположен источник магнитного поля – скалярный магнитный потенциал в виде известной МДС  $\tilde{m}$  фазной обмотки статора, который можно представить бесконечным рядом Фурье [1]:

$$F_{txv} = F_{Atxv} + F_{Btxv} + F_{Ctxv} + \dots = \frac{\tilde{m}}{2} \left\{ F_{m1} \sin\left(\omega t - \frac{x\pi}{\tau}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} F_{m(2\tilde{m}k+1)} \sin\left[\omega t - \frac{(2\tilde{m}k+1)x\pi}{\tau}\right] + \sum_{k=1}^{\infty} F_{m(2\tilde{m}k-1)} \sin\left[\omega t - \frac{(2\tilde{m}k-1)x\pi}{\tau}\right] \right\}, \quad (1)$$

где  $F_{m1} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} I \frac{wk_{w1}}{p}$ ;  $F_{mv} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} I \frac{wk_{wv}}{vp}$  – амплитуды МДС основной и высших (обмоточных) гармоник одной фазы обмотки статора;  $k=1,2,\dots$

Для основной бегущей волны координаты  $x$  и  $t$  связаны равенством

$$x(t) = \frac{\omega\tau}{\pi} t + C = \frac{\omega}{\alpha} t + C, \quad (2)$$

где  $C$  – некоторая константа, связанная с фиксацией фазы бегущей волны.

Эта временная зависимость подразумевается для всех последующих формул, содержащих координату  $x$ .

Выражение (1) можно записать и в таком виде:

$$F_{txv} = \frac{\tilde{m}}{2} F_{m1} \left( \sin \omega t \cos \frac{x\pi}{\tau} - \cos \omega t \sin \frac{x\pi}{\tau} \right) + \frac{\tilde{m}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} F_{m(2\tilde{m}k+1)} \left[ \sin \omega t \cos \frac{(2\tilde{m}k+1)x\pi}{\tau} - \cos \omega t \sin \frac{(2\tilde{m}k+1)x\pi}{\tau} \right] + \frac{\tilde{m}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} F_{m(2\tilde{m}k-1)} \left[ \sin \omega t \cos \frac{(2\tilde{m}k-1)x\pi}{\tau} + \cos \omega t \sin \frac{(2\tilde{m}k-1)x\pi}{\tau} \right]. \quad (3)$$

Для комплексного скалярного магнитного потенциала в бесконечной полосе немагнитного зазора (включая и слой магнитного материала), вызванного всем спектром пространственных синусных и косинусных гармоник на верхней границе этой полосы согласно выражению (3), получим [2, 3]:

$$w_{\text{статор}}(z) = [w_{\cos}(z) + w_{\sin}(z)] = \frac{\sqrt{2}m}{\pi} \frac{w}{p} I \left\{ \sin(\omega t) \frac{k_{w1} [\sin \alpha z]}{\text{sh}(\alpha \delta)} - \cos(\omega t) \frac{k_{w1} [\cos \alpha z]}{\text{sh}(\alpha \delta)} + \sin(\omega t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k_{w(2\tilde{m}k-1)} [\sin(2\tilde{m}k-1)\alpha z]}{(2\tilde{m}k-1)\text{sh}(2\tilde{m}k-1)\alpha \delta} + \cos(\omega t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k_{w(2\tilde{m}k-1)} [\cos(2\tilde{m}k-1)\alpha z]}{(2\tilde{m}k-1)\text{sh}(2\tilde{m}k-1)\alpha \delta} + \sin(\omega t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k_{w(2\tilde{m}k+1)} [\sin(2\tilde{m}k+1)\alpha z]}{(2\tilde{m}k+1)\text{sh}(2\tilde{m}k+1)\alpha \delta} + \cos(\omega t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k_{w(2\tilde{m}k+1)} [\cos(2\tilde{m}k+1)\alpha z]}{(2\tilde{m}k+1)\text{sh}(2\tilde{m}k+1)\alpha \delta} \right], \quad (4)$$

где  $\alpha = \pi / \tau$ ;  $\tau$  – полюсное деление;  $\delta$  – ширина полосы воздушного зазора.

Для комплексно-сопряжённого вектора магнитной индукции в воздушном зазоре, вызванной током обмотки статора, в соответствии с (4) справедливо выражение

$$\dot{B}(z) = j\mu_0 \frac{dw_{\text{статор}}(z)}{dz} = -j \frac{\sqrt{2}\tilde{m}\mu_0 \alpha}{\pi} \frac{w}{p} I \times \left\{ \sin(\omega t) \frac{k_{w1} [\cos \alpha z]}{\text{sh}(\alpha \delta)} + \cos(\omega t) \frac{k_{w1} [\sin \alpha z]}{\text{sh}(\alpha \delta)} + \right.$$

$$\left. + \sin(\omega t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k_{w(2\tilde{m}k-1)} [\cos(2\tilde{m}k-1)\alpha z]}{\text{sh}(2\tilde{m}k-1)\alpha \delta} - \cos(\omega t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k_{w(2\tilde{m}k-1)} [\sin(2\tilde{m}k-1)\alpha z]}{\text{sh}(2\tilde{m}k-1)\alpha \delta} + \sin(\omega t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k_{w(2\tilde{m}k+1)} [\cos(2\tilde{m}k+1)\alpha z]}{\text{sh}(2\tilde{m}k+1)\alpha \delta} + \cos(\omega t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k_{w(2\tilde{m}k+1)} [\sin(2\tilde{m}k+1)\alpha z]}{\text{sh}(2\tilde{m}k+1)\alpha \delta} \right\}. \quad (5)$$

Выделяя в этой формуле вещественные и мнимые части, получаем выражения для составляющих магнитной индукции по осям  $x$  и  $y$  в воздушном зазоре, вызванной током обмотки статора:

$$\dot{B}_{cx}(x, y) = -\frac{\sqrt{2}\tilde{m}\mu_0 \alpha}{\pi} \frac{w}{p} I \times \left\{ \sin(\omega t) \frac{k_{w1} [\sin \alpha x \text{sh} \alpha y]}{\text{sh}(\alpha \delta)} - \cos(\omega t) \frac{k_{w1} [\cos \alpha x \text{sh} \alpha y]}{\text{sh}(\alpha \delta)} + \sin(\omega t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k_{w(2\tilde{m}k-1)} [\sin(2\tilde{m}k-1)\alpha x \text{sh}(2\tilde{m}k-1)\alpha y]}{\text{sh}(2\tilde{m}k-1)\alpha \delta} + \cos(\omega t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k_{w(2\tilde{m}k-1)} [\cos(2\tilde{m}k-1)\alpha x \text{sh}(2\tilde{m}k-1)\alpha y]}{\text{sh}(2\tilde{m}k-1)\alpha \delta} + \sin(\omega t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k_{w(2\tilde{m}k+1)} [\cos(2\tilde{m}k+1)\alpha x \text{sh}(2\tilde{m}k+1)\alpha y]}{\text{sh}(2\tilde{m}k+1)\alpha \delta} - \cos(\omega t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k_{w(2\tilde{m}k+1)} [\cos(2\tilde{m}k+1)\alpha x \text{sh}(2\tilde{m}k+1)\alpha y]}{\text{sh}(2\tilde{m}k+1)\alpha \delta} \right\}; \quad (6)$$

$$\dot{B}_{cy}(x, y) = -\frac{\sqrt{2}\tilde{m}\mu_0 \alpha}{\pi} \frac{w}{p} I \times \left\{ \sin(\omega t) \frac{k_{w1} [\sin \alpha x \text{ch} \alpha y]}{\text{sh}(\alpha \delta)} + \cos(\omega t) \frac{k_{w1} [\cos \alpha x \text{ch} \alpha y]}{\text{sh}(\alpha \delta)} + \sin(\omega t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k_{w(2\tilde{m}k-1)} [\cos(2\tilde{m}k-1)\alpha x \text{ch}(2\tilde{m}k-1)\alpha y]}{\text{sh}(2\tilde{m}k-1)\alpha \delta} - \cos(\omega t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k_{w(2\tilde{m}k-1)} [\sin(2\tilde{m}k-1)\alpha x \text{ch}(2\tilde{m}k-1)\alpha y]}{\text{sh}(2\tilde{m}k-1)\alpha \delta} + \sin(\omega t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k_{w(2\tilde{m}k+1)} [\cos(2\tilde{m}k+1)\alpha x \text{ch}(2\tilde{m}k+1)\alpha y]}{\text{sh}(2\tilde{m}k+1)\alpha \delta} + \cos(\omega t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k_{w(2\tilde{m}k+1)} [\sin(2\tilde{m}k+1)\alpha x \text{ch}(2\tilde{m}k+1)\alpha y]}{\text{sh}(2\tilde{m}k+1)\alpha \delta} \right\}. \quad (7)$$

Формулы (6), (7) получены при начальном предположении, что тангенциальные составляющие магнитной индукции на границах полосы воздушного зазора равны нулю, т.е. в предположении, что магнитные проницаемости ярм статора и ротора равны бесконечности.

При конечных значениях относительной магнитной проницаемости ярм  $\mu_{r1(2)}$  для тангенциальной составляющей магнитной индукции в полосе воздушного зазора будет справедлива формула:

$$B_{cx}(x, y) = -\frac{\sqrt{2}\tilde{m}\mu_0\mu_{r1}\alpha w}{\pi p} I \times \left\{ \begin{aligned} &\sin(\omega t) \frac{k_{w1} [\sin \alpha x \operatorname{ch} \alpha y]}{\operatorname{sh}(\alpha \delta)} - \cos(\omega t) \frac{k_{w1} [\cos \alpha x \operatorname{ch} \alpha y]}{\operatorname{sh}(\alpha \delta)} + \\ &+ \sin(\omega t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k_{w(2\tilde{m}k-1)} [\sin(2\tilde{m}k-1)\alpha x \operatorname{ch}(2\tilde{m}k-1)\alpha y]}{\operatorname{sh}(2\tilde{m}k-1)\alpha \delta} + \\ &+ \cos(\omega t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k_{w(2\tilde{m}k-1)} [\cos(2\tilde{m}k-1)\alpha x \operatorname{ch}(2\tilde{m}k-1)\alpha y]}{\operatorname{sh}(2\tilde{m}k-1)\alpha \delta} + \\ &+ \sin(\omega t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k_{w(2\tilde{m}k+1)} [\sin(2\tilde{m}k+1)\alpha x \operatorname{ch}(2\tilde{m}k+1)\alpha y]}{\operatorname{sh}(2\tilde{m}k+1)\alpha \delta} - \\ &- \cos(\omega t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k_{w(2\tilde{m}k+1)} [\cos(2\tilde{m}k+1)\alpha x \operatorname{ch}(2\tilde{m}k+1)\alpha y]}{\operatorname{sh}(2\tilde{m}k+1)\alpha \delta} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Из (8) следует, что тригонометрические зависимости с аргументом  $x$  остались такими же, как и в предыдущей формуле (6), а гиперболические зависимости с аргументом  $y$  изменились: вместо  $\operatorname{sh}$  появился  $\operatorname{ch}$  и наоборот. Формула (8) показывает, что на границах полосы воздушного зазора ( $y=0$  и  $y=\delta$ ) тангенциальная магнитная индукция не равна нулю. Этот результат соответствует физической природе рассматриваемого магнитного поля.

Магнитное поле в ярмовой полосе статора шириной  $\delta_1$  при относительной магнитной проницаемости  $\mu_{r1}$ , вызванное током статора, будет описываться формулами:

$${}^c B_{cx}(x, y) = -\frac{\sqrt{2}\tilde{m}\mu_0\mu_{r1}\alpha w}{\pi p} I \times \left\{ \begin{aligned} &\sin(\omega t) \frac{k_{w1} [\sin \alpha x \operatorname{ch} \alpha (y - \delta_1)]}{\operatorname{sh}(\alpha \delta_1)} - \\ &- \cos(\omega t) \frac{k_{w1} [\cos \alpha x \operatorname{ch} \alpha (y - \delta_1)]}{\operatorname{sh}(\alpha \delta_1)} + \\ &+ \sin(\omega t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k_{w(2\tilde{m}k-1)} [\sin(2\tilde{m}k-1)\alpha x \operatorname{ch}(2\tilde{m}k-1)\alpha (y - \delta_1)]}{\operatorname{sh}(2\tilde{m}k-1)\alpha \delta_1} + \\ &+ \cos(\omega t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k_{w(2\tilde{m}k-1)} [\cos(2\tilde{m}k-1)\alpha x \operatorname{ch}(2\tilde{m}k-1)\alpha (y - \delta_1)]}{\operatorname{sh}(2\tilde{m}k-1)\alpha \delta_1} \end{aligned} \right\}$$

$$+ \sin(\omega t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k_{w(2\tilde{m}k+1)} [\sin(2\tilde{m}k+1)\alpha x \operatorname{ch}(2\tilde{m}k+1)\alpha (y - \delta_1)]}{\operatorname{sh}(2\tilde{m}k+1)\alpha \delta_1} - \cos(\omega t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k_{w(2\tilde{m}k+1)} [\cos(2\tilde{m}k+1)\alpha x \operatorname{ch}(2\tilde{m}k+1)\alpha (y - \delta_1)]}{\operatorname{sh}(2\tilde{m}k+1)\alpha \delta_1} \quad (9)$$

$${}^c B_{cy}(x, y) = -\frac{\sqrt{2}\tilde{m}\mu_0\alpha w}{\pi p} I \times \left\{ \begin{aligned} &\sin(\omega t) \frac{k_{w1} [\cos \alpha x \operatorname{sh} \alpha (y - \delta_1)]}{\operatorname{sh}(\alpha \delta_1)} + \\ &+ \cos(\omega t) \frac{k_{w1} [\sin \alpha x \operatorname{sh} \alpha (y - \delta_1)]}{\operatorname{sh}(\alpha \delta_1)} + \\ &+ \sin(\omega t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k_{w(2\tilde{m}k-1)} [\cos(2\tilde{m}k-1)\alpha x \operatorname{sh}(2\tilde{m}k-1)\alpha (y - \delta_1)]}{\operatorname{sh}(2\tilde{m}k-1)\alpha \delta_1} - \\ &- \cos(\omega t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k_{w(2\tilde{m}k-1)} [\sin(2\tilde{m}k-1)\alpha x \operatorname{sh}(2\tilde{m}k-1)\alpha (y - \delta_1)]}{\operatorname{sh}(2\tilde{m}k-1)\alpha \delta_1} + \\ &+ \sin(\omega t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k_{w(2\tilde{m}k+1)} [\cos(2\tilde{m}k+1)\alpha x \operatorname{sh}(2\tilde{m}k+1)\alpha (y - \delta_1)]}{\operatorname{sh}(2\tilde{m}k+1)\alpha \delta_1} + \\ &+ \cos(\omega t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k_{w(2\tilde{m}k+1)} [\sin(2\tilde{m}k+1)\alpha x \operatorname{sh}(2\tilde{m}k+1)\alpha (y - \delta_1)]}{\operatorname{sh}(2\tilde{m}k+1)\alpha \delta_1} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Формулы (9), (10) показывают, что на наружной границе полосы ( $y=\delta_1$ ) есть тангенциальная составляющая индукции и нет радиальной, на внутренней границе ( $y=0$ ) есть обе эти составляющие.

Для выполнения условий сопряжения магнитного поля на границе двух рассматриваемых полос (воздушного зазора и ярма статора)

$$B_{cx}(x, \delta) = {}^c B_{cx}(x, 0) / \mu_{r1}; \quad (11)$$

$$B_{cy}(x, \delta) = {}^c B_{cy}(x, 0)$$

следует преобразовать формулы (9) и (10) для ярмовой полосы статора путем введения в них соответствующих граничных коэффициентов. После этой процедуры выражения для приведенных магнитных индукций ярма статора будут иметь вид:

$$B_{cx}(x, y) = -\frac{\sqrt{2}\tilde{m}\mu_0\mu_{r1}\alpha w}{\pi p} I \times \left\{ \begin{aligned} &k_{cx} \sin(\omega t) \frac{k_{w1} [\sin \alpha x \operatorname{ch} \alpha (y - \delta_1)]}{\operatorname{sh}(\alpha \delta_1)} - \\ &- k_{cx} \cos(\omega t) \frac{k_{w1} [\cos \alpha x \operatorname{ch} \alpha (y - \delta_1)]}{\operatorname{sh}(\alpha \delta_1)} + \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& +k_{cx1}(k)\sin(\omega t) \times \\
& \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k_{w(2\tilde{m}k-1)} [\sin(2\tilde{m}k-1)\alpha x \operatorname{ch}(2\tilde{m}k-1)\alpha(y-\delta_1)]}{\operatorname{sh}(2\tilde{m}k-1)\alpha\delta_1} + \\
& +k_{cx1}(k)\cos(\omega t) \times \\
& \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k_{w(2\tilde{m}k-1)} [\cos(2\tilde{m}k-1)\alpha x \operatorname{ch}(2\tilde{m}k-1)\alpha(y-\delta_1)]}{\operatorname{sh}(2\tilde{m}k-1)\alpha\delta_1} + \\
& +k_{cx2}(k)\sin(\omega t) \times \\
& \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k_{w(2\tilde{m}k+1)} [\sin(2\tilde{m}k+1)\alpha x \operatorname{ch}(2\tilde{m}k+1)\alpha(y-\delta_1)]}{\operatorname{sh}(2\tilde{m}k+1)\alpha\delta_1} - \\
& -k_{cx2}(k)\cos(\omega t) \times \\
& \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k_{w(2\tilde{m}k+1)} [\cos(2\tilde{m}k+1)\alpha x \operatorname{ch}(2\tilde{m}k+1)\alpha(y-\delta_1)]}{\operatorname{sh}(2\tilde{m}k+1)\alpha\delta_1},
\end{aligned} \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned}
k_{cx} &= \frac{\operatorname{sh}\alpha\delta_1}{\operatorname{ch}\alpha\delta_1}; \quad k_{cx1}(k) = \frac{\operatorname{sh}(k-1)\alpha\delta_1}{\operatorname{ch}(k-1)\alpha\delta_1}; \\
k_{cx2}(k) &= \frac{\operatorname{sh}(k+1)\alpha\delta_1}{\operatorname{ch}(k+1)\alpha\delta_1}
\end{aligned} \tag{13}$$

— коэффициенты приведения;

$$\begin{aligned}
{}^c B_{1cy}(x, y) &= -\frac{\sqrt{2\tilde{m}}\mu_0\alpha w}{\pi p} I \times \\
& \times \left\{ k_{cy} \sin(\omega t) \frac{k_{w1} [\cos\alpha x \operatorname{sh}\alpha(y-\delta_1)]}{\operatorname{sh}(\alpha\delta_1)} + \right. \\
& + k_{cy} \cos(\omega t) \frac{k_{w1} [\sin\alpha x \operatorname{sh}\alpha(y-\delta_1)]}{\operatorname{sh}(\alpha\delta_1)} + \\
& + k_{cy1}(k)\sin(\omega t) \times \\
& \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k_{w(2\tilde{m}k-1)} [\cos(2\tilde{m}k-1)\alpha x \operatorname{sh}(2\tilde{m}k-1)\alpha(y-\delta_1)]}{\operatorname{sh}(2\tilde{m}k-1)\alpha\delta_1} - \\
& - k_{cy1}(k)\cos(\omega t) \times \\
& \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k_{w(2\tilde{m}k-1)} [\sin(2\tilde{m}k-1)\alpha x \operatorname{sh}(2\tilde{m}k-1)\alpha(y-\delta_1)]}{\operatorname{sh}(2\tilde{m}k-1)\alpha\delta_1} + \\
& + k_{cy2}(k)\sin(\omega t) \times \\
& \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k_{w(2\tilde{m}k+1)} [\cos(2\tilde{m}k+1)\alpha x \operatorname{sh}(2\tilde{m}k+1)\alpha(y-\delta_1)]}{\operatorname{sh}(2\tilde{m}k+1)\alpha\delta_1} + \\
& + k_{cy2}(k)\cos(\omega t) \times \\
& \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k_{w(2\tilde{m}k+1)} [\sin(2\tilde{m}k+1)\alpha x \operatorname{sh}(2\tilde{m}k+1)\alpha(y-\delta_1)]}{\operatorname{sh}(2\tilde{m}k+1)\alpha\delta_1} \left. \right\},
\end{aligned} \tag{14}$$

где

$$\begin{aligned}
k_{cy} &= \frac{\operatorname{ch}\alpha\delta_1}{\operatorname{sh}\alpha\delta_1}; \quad k_{cy1}(k) = \frac{\operatorname{ch}(k-1)\alpha\delta_1}{\operatorname{sh}(k-1)\alpha\delta_1}; \\
k_{cy2}(k) &= \frac{\operatorname{ch}(k+1)\alpha\delta_1}{\operatorname{sh}(k+1)\alpha\delta_1}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Идентичный импульсный характер изменения индукции на границе двух полюсов в пределах магнитного периода иллюстрируют рис. 1 и 2. Им-

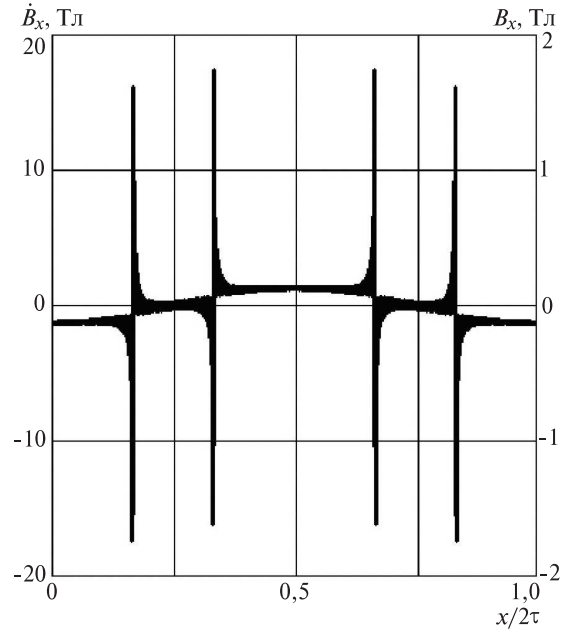


Рис. 1. Сопряжение со скачкообразным разрывом тангенциальных составляющих магнитной индукции от тока статора на границе воздушного зазора и яма статора;  $\dot{B}_x$ ,  $B_x$  — граничные тангенциальные составляющие магнитной индукции яма статора и воздушного зазора при  $\mu_{r1} = 10$

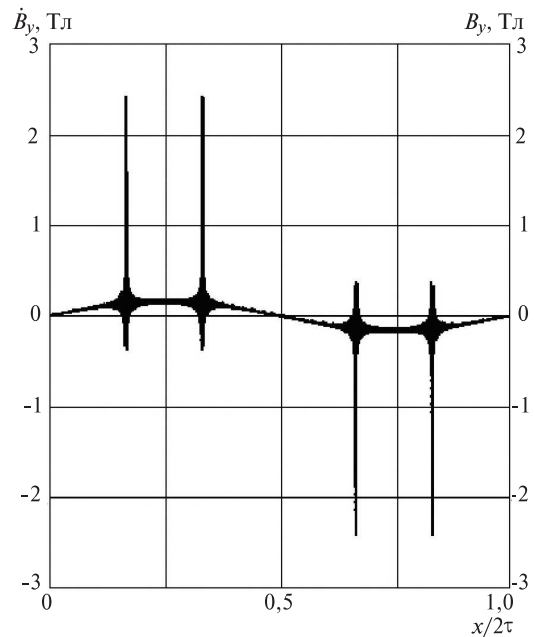


Рис. 2. Сопряжение радиальных составляющих магнитной индукции от тока статора на границе воздушного зазора и яма статора;  $\dot{B}_y$ ,  $B_y$  — граничные радиальные составляющие магнитной индукции соответственно яма статора и воздушного зазора

пульсный характер этих кривых объясняется тем, что они получены в результате дифференцирования ступенчатой кривой МДС обмотки статора.

По формулам (12) и (14) на рис. 3 построены кривые составляющих магнитной индукции внутри и на наружной границе ярма статора ( $y = \delta_1$ ).

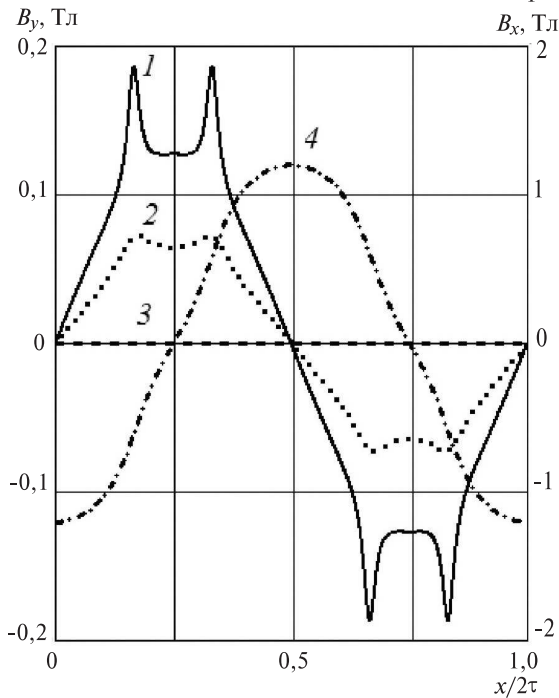


Рис. 3. Радиальные (кривые 1, 2, 3) и тангенциальные (кривая 4) составляющие магнитной индукции в ярме статора от тока статорной обмотки, построенные для линий со значениями координаты соответственно:  $0, 2\delta_1; 0, 6\delta_1; \delta_1$  при  $\mu_{r1} = 10$

Источник поля – магниты на роторе. Представляя скалярный магнитный потенциал магнитов, расположенных в воздушной полосе на поверхности ярма ротора (на нижней границе бесконечной полосы воздушного зазора шириной  $\delta$ ), синусным рядом

$$u(x, \vartheta) = \frac{I_M}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\alpha x = \frac{4 I_M}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \beta(2n-1)}{2n-1} \sin[\alpha(2n-1)(x - \vartheta)], \quad (16)$$

можем получить составляющие магнитной индукции по осям  $x$  и  $y$  в полосе воздушного зазора, вызванной магнитами ротора:

$$B_{px}(x, y, \vartheta) = \frac{2\mu_0 \alpha I_M}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \beta(2n-1)}{\text{sh} \alpha(2n-1)\delta} \times \cos[\alpha(2n-1)(x - \vartheta)] \text{sh}[\alpha(2n-1)(y - \delta)]; \quad (17)$$

$$B_{py}(x, y, \vartheta) = -\frac{2\mu_0 \alpha I_M}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \beta(2n-1)}{\text{sh} \alpha(2n-1)\delta} \times$$

$\times \sin[\alpha(2n-1)(x - \vartheta)] \text{ch}[\alpha(2n-1)(y - \delta)], \quad (18)$   
 где  $I_M = 2H_{cB}h_M$ ;  $h_M$  – высота магнита в направлении его намагниченности;  $\vartheta$  – сдвиг продольной оси ротора относительно аналогичной оси магнитного поля статора.

Формула (17) получена в предположении, что ферромагнитные ярма, примыкающие к границам полосы воздушного зазора, имеют бесконечно большую магнитную проницаемость.

При наличии ярм с  $\mu_r \neq \infty$  формулу для тангенциальной составляющей индукции следует записать в виде

$$\dot{B}_{px}(x, y, \vartheta) = \frac{2\mu_0 \alpha I_M}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \beta(2n-1)}{\text{sh} \alpha(2n-1)\delta} \times \cos[\alpha(2n-1)(x - \vartheta)] \text{ch}[\alpha(2n-1)(y - \delta)]. \quad (19)$$

В этом случае на границе с ярмом статора ( $y = \delta$ ) эта составляющая индукции в воздушном зазоре не будет равна нулю.

Перенеся источник магнитного поля ротора (16) на нижнюю границу полосы ярма статора шириной  $\delta_1$ , можем записать формулы для магнитной индукции в этой полосе с учётом граничных условий для двух рассматриваемых полос:

$${}^p \dot{B}_{cx}(x, y, \vartheta) = \frac{2\mu_0 \mu_{r1} \alpha I_M}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \beta(2n-1)}{\text{sh} \alpha(2n-1)\delta_1} \times k_{cx}(n) \cos[\alpha(2n-1)(x - \vartheta)] \text{ch}[\alpha(2n-1)(y - \delta_1)], \quad (20)$$

$${}^p \dot{B}_{cy}(x, y, \vartheta) = -\frac{2\mu_0 \alpha I_M}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \beta(2n-1)}{\text{sh} \alpha(2n-1)\delta_1} \times k_{cy}(n) \sin[\alpha(2n-1)(x - \vartheta)] \text{sh}[\alpha(2n-1)(y - \delta_1)], \quad (21)$$

где

$$k_{cx}(n) = \frac{\text{sh}[(2n-1)\alpha\delta_1]}{\text{sh}[(2n-1)\alpha\delta]} \frac{1}{\text{ch}[(2n-1)\alpha(\delta - \delta_1)]}; \quad (22)$$

$$k_{cy}(n) = \frac{\text{sh}[(2n-1)\alpha\delta_1]}{\text{sh}[(2n-1)\alpha\delta]} \frac{1}{\text{sh}[(2n-1)\alpha(\delta - \delta_1)]}$$

– коэффициенты приведения магнитного поля ротора, учитывающие граничные условия этого поля на стыке полос воздушного зазора и ярма статора.

На рис. 4 и 5 показаны граничные значения магнитной индукции на периоде магнитного поля, построенные по (17), (18) и (20), (21) для положения ротора  $\vartheta = \tau/2$ .

На рис. 6 и 7 показаны кривые результирующих радиальных и тангенциальных составляющих магнитных индукций для внутренних точек ярма статора, вызванных токами статора и магнитов ротора при  $\vartheta = \tau/2$ .

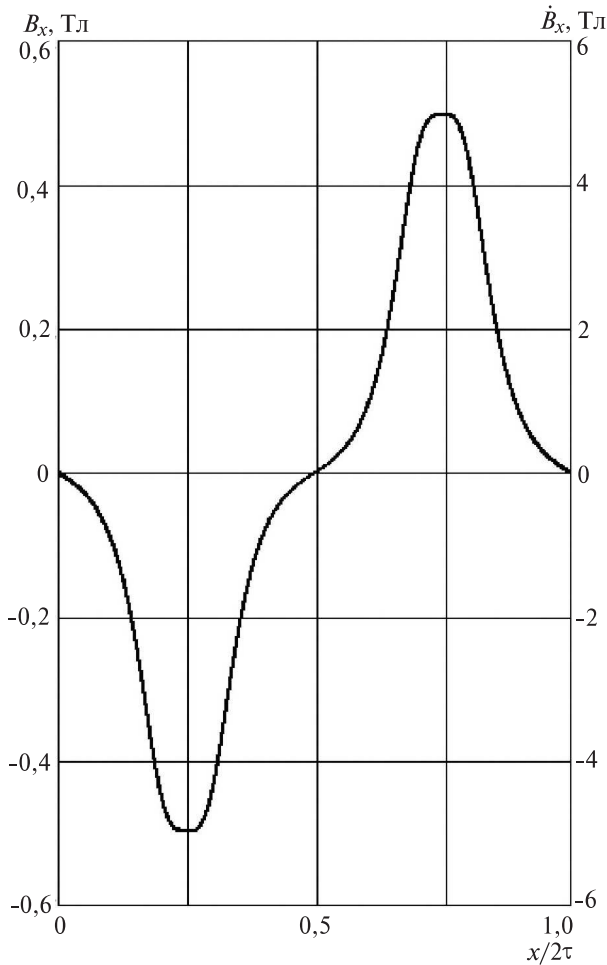


Рис. 4. Изменение тангенциальных составляющих магнитной индукции, вызванных магнитами ротора, на границе воздушного зазора  $B_x$  и ярма статора  $\dot{B}_x$  с  $\mu_{r1} = 10$  при  $\vartheta = \tau/2$

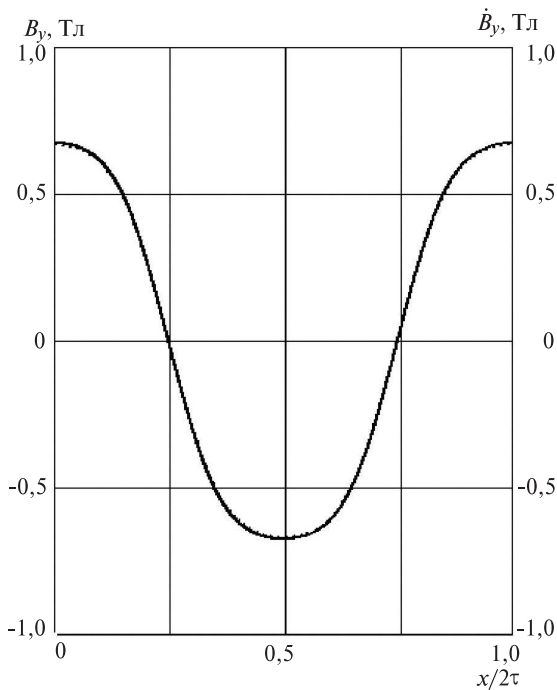


Рис. 5. Изменение радиальных составляющих магнитной индукции, вызванных магнитами ротора, на границе воздушного зазора  $B_y$  и ярма статора  $\dot{B}_y$  при  $\vartheta = \tau/2$

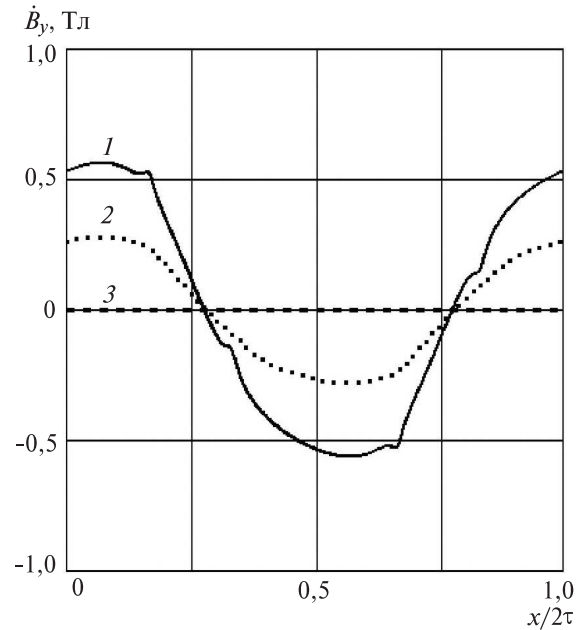


Рис. 6. Кривые результирующих радиальных магнитных индукций при  $\vartheta = \tau/2$  в ярме статора на линиях, находящихся на расстоянии от внутреннего края ярма: 1 –  $0,2\delta_1$ ; 2 –  $0,6\delta_1$ ; 3 –  $\delta_1$  ( $\delta_1$  – высота ярма статора)

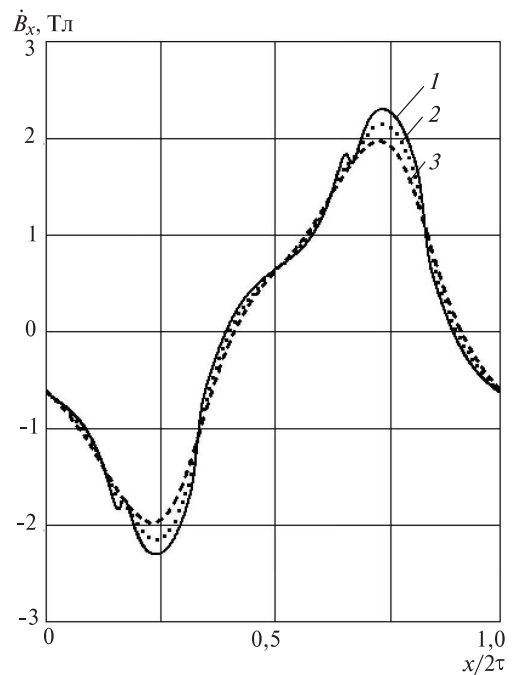


Рис. 7. Кривые результирующих тангенциальных магнитных индукций при  $\vartheta = \tau/2$  в ярме статора с  $\mu_{r1} = 10$  на линиях, находящихся на расстоянии от внутреннего края ярма: 1 –  $0,2\delta_1$ ; 2 –  $0,4\delta_1$ ; 3 –  $\delta_1$  ( $\delta_1$  – высота ярма статора)

**Магнитное поле в ярме ротора.** *Источник поля – МДС обмотки статора.* Тангенциальное магнитное поле в полосе ярма ротора шириной  $\delta_2$  при относительной магнитной проницаемости  $\mu_{r2}$ , вызванное током статора, будет описываться формулой

$${}^c B_{px}(x, y) = -\frac{\sqrt{2} \tilde{m}_0 \mu_{r2} \alpha w}{\pi p} I \times$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left\{ k_{px} \sin(\omega t) \frac{k_{w1} [\sin \alpha x \operatorname{ch} \alpha (y - \delta_2)]}{\operatorname{sh}(\alpha \delta_2)} \right. \\
 & - k_{px} \cos(\omega t) \frac{k_{w1} [\cos \alpha x \operatorname{ch} \alpha (y - \delta_2)]}{\operatorname{sh}(\alpha \delta_2)} + \\
 & + k_{px1}(k) \sin(\omega t) \times \\
 & \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k_{w(2\tilde{m}k-1)} [\sin(2\tilde{m}k-1)\alpha x \operatorname{ch}(2\tilde{m}k-1)\alpha(y-\delta_2)]}{\operatorname{sh}(2\tilde{m}k-1)\alpha\delta_2} + \\
 & + k_{px1}(k) \cos(\omega t) \times \\
 & \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k_{w(2\tilde{m}k-1)} [\cos(2\tilde{m}k-1)\alpha x \operatorname{ch}(2\tilde{m}k-1)\alpha(y-\delta_2)]}{\operatorname{sh}(2\tilde{m}k-1)\alpha\delta_2} + \\
 & + k_{px2}(k) \sin(\omega t) \times \\
 & \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k_{w(2\tilde{m}k+1)} [\sin(2\tilde{m}k+1)\alpha x \operatorname{ch}(2\tilde{m}k+1)\alpha(y-\delta_2)]}{\operatorname{sh}(2\tilde{m}k+1)\alpha\delta_2} - \\
 & - k_{px2}(k) \cos(\omega t) \times \\
 & \times \left. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k_{w(2\tilde{m}k+1)} [\cos(2\tilde{m}k+1)\alpha x \operatorname{ch}(2\tilde{m}k+1)\alpha(y-\delta_2)]}{\operatorname{sh}(2\tilde{m}k+1)\alpha\delta_2} \right\}, \quad (23)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 k_{px} &= \frac{\operatorname{sh}(\alpha\delta_2)}{\operatorname{sh}(\alpha\delta)}; \quad k_{px1}(k) = \frac{\operatorname{sh}[\alpha\delta_2(2\tilde{m}k-1)]}{\operatorname{sh}[\alpha\delta(2\tilde{m}k-1)]}; \\
 k_{px2}(k) &= \frac{\operatorname{sh}[\alpha\delta_2(2\tilde{m}k+1)]}{\operatorname{sh}[\alpha\delta(2\tilde{m}k+1)]}, \quad (24)
 \end{aligned}$$

Для радиальной составляющей магнитной индукции в ярме ротора

$$\begin{aligned}
 c \dot{B}_{px}(x, y) &= -\frac{\sqrt{2}\tilde{m}\mu_0\mu_{r2}\alpha w}{\pi p} I \times \\
 & \times \left\{ k_{px} \sin(\omega t) \frac{k_{w1} [\cos \alpha x \operatorname{sh} \alpha y]}{\operatorname{sh}(\alpha \delta_2)} \right. \\
 & - k_{px} \cos(\omega t) \frac{k_{w1} [\sin \alpha x \operatorname{sh} \alpha y]}{\operatorname{sh}(\alpha \delta_2)} + \\
 & + k_{px1}(k) \sin(\omega t) \times \\
 & \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k_{w(2\tilde{m}k-1)} [\cos(2\tilde{m}k-1)\alpha x \operatorname{sh}(2\tilde{m}k-1)\alpha y]}{\operatorname{sh}(2\tilde{m}k-1)\alpha\delta_2} + \\
 & + k_{px1}(k) \cos(\omega t) \times \\
 & \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k_{w(2\tilde{m}k-1)} [\sin(2\tilde{m}k-1)\alpha x \operatorname{sh}(2\tilde{m}k-1)\alpha y]}{\operatorname{sh}(2\tilde{m}k-1)\alpha\delta_2} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + k_{px2}(k) \sin(\omega t) \times \\
 & \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k_{w(2\tilde{m}k+1)} [\cos(2\tilde{m}k+1)\alpha x \operatorname{sh}(2\tilde{m}k+1)\alpha y]}{\operatorname{sh}(2\tilde{m}k+1)\alpha\delta_2} - \\
 & - k_{px2}(k) \cos(\omega t) \times \\
 & \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k_{w(2\tilde{m}k+1)} [\sin(2\tilde{m}k+1)\alpha x \operatorname{sh}(2\tilde{m}k+1)\alpha y]}{\operatorname{sh}(2\tilde{m}k+1)\alpha\delta_2} \left. \right\}. \quad (25)
 \end{aligned}$$

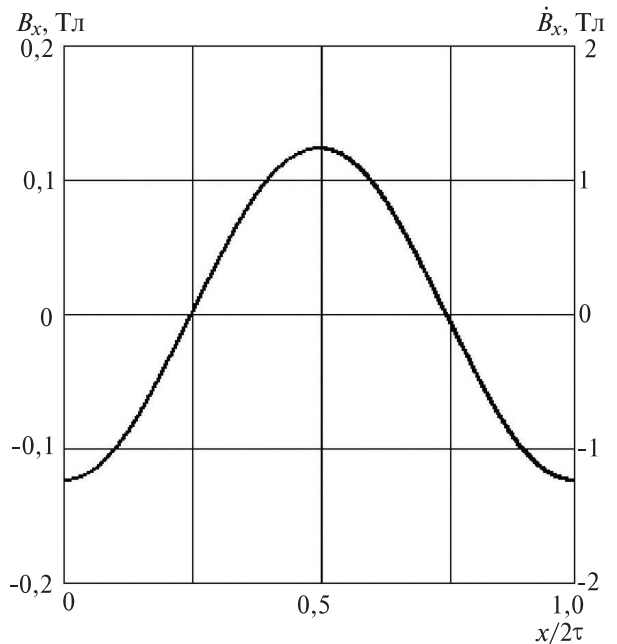


Рис. 8. Тангенциальные составляющие магнитной индукции на границе воздушного зазора и ярма ротора при  $\mu_{r2} = 10$ , вызванные током статора

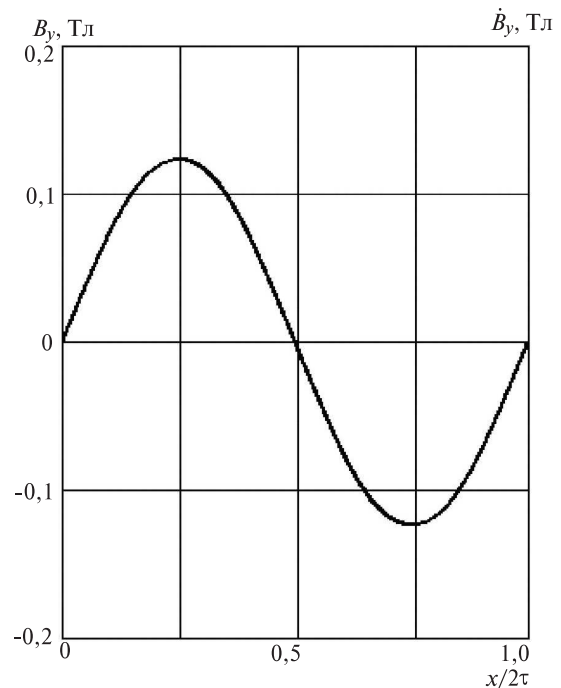
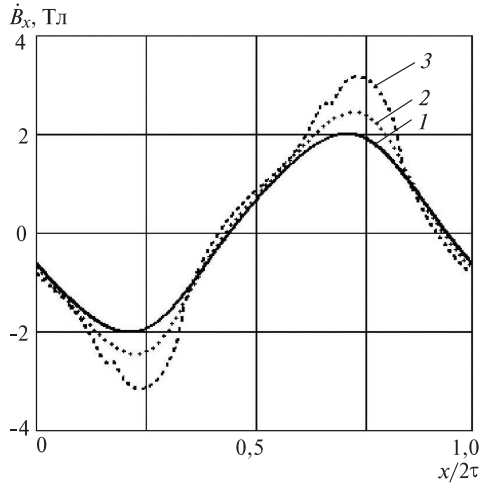


Рис. 9. Радиальные составляющие магнитной индукции, вызванные током статора, на границе воздушного зазора и ярма ротора



**Рис. 10.** Распределение в ярме ротора с  $\mu_{r2} = 5$  результирующей тангенциальной индукции на различных уровнях от внутренней поверхности ярма при  $\vartheta = \tau/2$ : 1 –  $y = 0$ ; 2 –  $y = 0,2\delta_2$ ; 3 –  $y = 0,4\delta_2$

Графики изменения магнитной индукции, вызванной током статора, на общей границе воздушного зазора и ярма ротора показаны на рис. 8 и 9.

*Источник поля – магниты ротора.* В полосе воздушного зазора магниты расположены на нижней границе, в полосе ярма ротора они, естественно, должны располагаться на верхней границе. Этот источник создаёт в ярме ротора магнитное поле, которое будет описываться уравнениями:

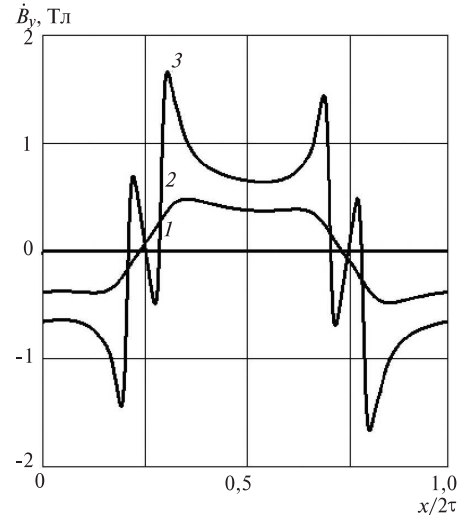
$$p \dot{B}_{px}(x, y, \vartheta) = \frac{2\mu_0 \mu_{r2} \alpha I_M}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \beta(2n-1)}{\text{sh} \alpha(2n-1)\delta_1} \times k_{px}(n) \cos[\alpha(2n-1)(x-\vartheta)] \text{ch}[\alpha(2n-1)y]; \quad (26)$$

$$p \dot{B}_{py}(x, y, \vartheta) = -\frac{2\mu_0 \alpha I_M}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \beta(2n-1)}{\text{sh} \alpha(2n-1)\delta_1} \times k_{py}(n) \sin[\alpha(2n-1)(x-\vartheta)] \text{sh}[\alpha(2n-1)y], \quad (27)$$

где

$$k_{px}(n) = -\frac{\text{sh}[(2n-1)\alpha\delta_2]}{\text{ch}[(2n-1)\alpha\delta_2]}, \quad k_{py}(n) = -\frac{\text{sh}[(2n-1)\alpha\delta]}{\text{ch}[(2n-1)\alpha\delta]}. \quad (28)$$

Результирующие значения магнитных индукций в ярме ротора, обусловленные магнитами на роторе и токами обмотки статора, показаны на рис. 10 и 11.



**Рис. 11.** Распределение в ярме ротора результирующей радиальной индукции на различных уровнях от внутренней поверхности ярма при  $\vartheta = \tau/2$ : 1 –  $y = 0$ ; 2 –  $y = 0,5\delta_2$ ; 3 –  $y = 0,9\delta_2$

**Выводы.** 1. Магнитное поле в ярмах магнитоэлектрического вентильного двигателя можно адекватно аналитически описать с помощью комплексной потенциальной функции, мнимые значения которой на границах с воздушным зазором являются известными скалярными магнитными потенциалами.

Выбор значения однородно распределенной в массиве ярма магнитной проницаемости определяется по максимуму магнитной индукции внутри ярма без учета импульсных значений индукции на границах с воздушным зазором.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сергеев П.С. Электрические машины. — М.; Л.: Госэнергоиздат, 1962, 280 с.
2. Иванов-Смоленский А.В., Абрамкин Ю.В. Применение конформного преобразования в электромагнитных расчётах электрических машин. Аналитические методы. — М.: Изд-во МЭИ, 1980, 85 с.
3. Домбровский В.В. Справочное пособие по расчёту электромагнитного поля в электрических машинах. — Л.: Энергоатомиздат, 1983, 256 с.

[21.11.1016]

*А в т о р:* **Афанасьев Александр Александрович** окончил электромеханический факультет Московского энергетического института (МЭИ) в 1962 г. Докторскую диссертацию «Совместная работа синхронной машины со статическим преобразователем частоты (теория и приложения)» защитил в МЭИ в 1991 г. Профессор кафедры автоматики и управления в технических системах Чувашского государственного университета.

## A Field Analytical Model of Magnetic Field in the Yoke Zones of a Switched Permanent Magnet Motor

AFANAS'YEV Aleksandr A. (Chuvash State University, Cheboksary Russ) – Professor, Dr. Sci. (Eng.)

The processes occurring in a switched permanent magnet motor can be considered in the nonmagnetic gap. The high-energy magnet layer should also be related to this gap. Complex periodic potential functions



serve as the mathematical basis for analytically solving the Dirichlet problem both in the nonmagnetic gap represented by an infinite horizontal strip with the boundaries delineated by two parallel straight lines and in similar strips with homogeneous magnetic permeability of the stator and rotor yokes. The imaginary components of the complex potential functions at the boundaries of the above-mentioned strips represented by trigonometric Fourier series are the known scalar magnetic potentials of magnetic field sources, namely, the stator winding and permanent magnets on the rotor. To fulfill the magnetic field boundary conditions in the yoke belts, a procedure for reducing these fields to the magnetic field in the air gap is implemented by means of special coefficients for each of the harmonic components in the magnetic induction radial and tangential components. The value of magnetic induction uniformly distributed in the yoke body is selected from the maximal magnetic induction inside the yoke without taking into account the induction impulse values at the boundaries with the air gap. Graphs showing the distribution of magnetic fields in the yokes corresponding to the obtained analytical correlations are given.

Key words: switched permanent magnet motor, yoke areas, field analytical model, periodic complex potential functions, magnetic field boundary conditions

#### REFERENCES

1. **Sergeyev P.S.** *Elektricheskiye mashiny* (Electrical machines). Moscow, Leningrad, Gosenergoizdat, 1962, 280 p.

2. **Ivanov-Smolenskii A.V., Abramkin Yu.V.** *Primeneniye konformnogo preobrazovaniya v elektromagnitnykh raschetakh elektricheskikh mashin. Analiticheskiye metody* (Application of conformal transformations in electromagnetic calculations of the

electrical machines. Analytical methods). Moscow, Publ. of the Moscow Power Engineering Institute, 1980, 85 p.

3. **Dombrovskii V.V.** *Spravochnoye posobiye po raschetu elektromagnitnogo polya v elektricheskikh mashinakh* (Handbook on the calculation of the electromagnetic field in electrical machines). Leningrad, Energoatomizdat, 1983, 256 p.

[21.11.1016]

\* \* \*

#### Поправка

В опубликованной в № 7/2017 статье И.А. Конникова «Расчет электромагнитного поля в слоистой среде» неправильно показана масштабная разметка по оси абсцисс рис. 2. По просьбе автора помещаем исправленный рис. 2.

